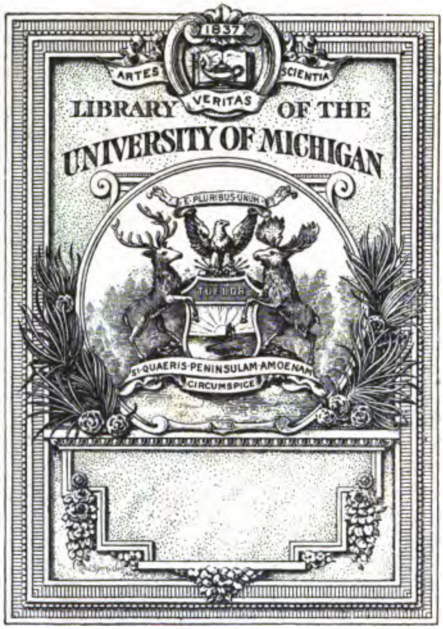

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

[illegible]

[illegible] Handschriften

[illegible]

[illegible] Heinrich Pertz.

[illegible]

Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Erster Band.

BERLIN.

Verlag von A. Asher & Comp.

1849.

Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band I.

Briefwechsel zwischen Leibniz und Oldenburg, Collins, Newton, Galloys, Vitale Giordano.

BERLIN.

Verlag von A. Asher & Comp.

1849.

Das Werk, von dem der erste Band vorliegt, soll sämmtliche mathematische Schriften Leibnizens, die gedruckten wie die unter seinen nachgelassenen Manuscripten aufgefundenen bisher ungedruckten, enthalten. Eine vollständige Sammlung der mathematischen Correspondenzen, so weit sie sich noch herbeischaffen lassen, wird die erste Abtheilung bilden, eine zweite die mathematischen Abhandlungen umfassen. — Zunächst nur einige Bemerkungen über die erste Abtheilung.

Leibnizens vorzüglichstes Streben ging stets dahin, mit den bedeutendsten Persönlichkeiten seiner Zeit Verbindungen anzuknüpfen. In Frankfurt am Main, wo er zuerst einem Kreise hoch gestellter Männer nahe trat, war es sein enthusiastischer Gönner, der Baron von Boineburg, durch den Leibniz den berühmtesten Gelehrten auf das wärmste empfohlen wurde; durch dessen Vermittelung geschah es auch, dass Leibniz in der Blüthe jugendlicher Kraft die Brennpunkte des gesammten wissenschaftlichen Treibens damaliger Zeit, Paris und London, sah und in ersterer Stadt längere Zeit verweilte. In Paris wurde er nicht allein ein Schüler von Hugens, dessen hohe Meisterschaft nur durch das gleichzeitig aufgehende, alles überstrahlende Gestirn Newton's etwas in Schatten gestellt worden ist; der Meister erkannte vielmehr sehr bald das eminente Talent des jungen Mannes, und er würdigte ihn seiner Freundschaft. Eine bis zum Tode des Ersteren ununterbrochen fortgesetzte Correspondenz ist ein schöner Beweis davon und giebt ein herrliches Zeugniss von dem Charakter beider Männer. Ausserdem verschmähte aber auch Leibniz während seines Aufenthalts zu Paris keineswegs den Verkehr mit den Mathematikern zweiten Ranges; ihre Namen finden sich häufig in seinen Briefen erwähnt und unter seinen hinterlassenen Manuscripten finden sich manche Spuren von gegenseitigen Mittheilungen. — Ebenso war es in London, das Leibniz zweimal auf kürzere Zeit besuchte. Hier diente Oldenburg, Secretair der Königlichen Societät, als Vermittler; durch ihn wurde Leibniz mit den hervorragendsten wissenschaftlichen Persönlichkeiten London's bekannt. — Als nun Leibniz, nach langem Kampfe mit sich selbst, aus der Nähe dieser ihm fast unentbehrlich gewordenen Kreise wissenschaftlicher Autoritäten im Jahre 1676 schied, um im Vaterlande eine amtliche Stellung, die ihm der Herzog von Hannover antrug, zu übernehmen, sah er sich gewissermassen genöthigt, wenn er nicht mit den weitern Fortschritten seiner Lieblingswissenschaft, der Mathematik, an seinem für dergleichen ganz vereinsamten Wohnorte unbekannt bleiben wollte, die Feder zu ergreifen und den mündlichen Ideenaustausch durch eine lebhafte Correspondenz zu ersetzen.

Dies Verhältniss änderte sich zum Theil, seitdem Leibniz durch die Bekanntmachung der Differentialrechnung sich den grössten Mathematikern aller Zeiten zugesellt hatte. Er wurde, besonders nachdem man erkannt hatte, welch' wichtiges Mittel in der neuen Methode zur Bewältigung der bis dahin unlösbaren Probleme gegeben war, der Mittelpunkt und der Stimmführer der Mathematiker des Continents. Von allen Seiten wandte man sich an ihn; nicht allein Coryphäen, wie die Bernoullis, der Marquis de l'Hospital, unterhielten einen ununterbrochenen Briefwechsel mit ihm, auch von weniger glänzenden Geistern, deren Namen in jenem an hervorragenden Männern, wenigstens auf dem Gebiete der mathematischen Disciplinen, ausgezeichneten Zeitalter nicht zur Geltung gelangten, trafen Zuschriften bei ihm ein, und unverdrossen, obwohl seine Zeit durch die verschiedenartigsten

Beschäftigungen auf das drückendste in Anspruch genommen wurde, antwortete Leibniz stets. Alle diese Briefe wurden in der Regel auf das sorgfältigste ausgearbeitet; nicht genug, dass Leibniz sie entwarf, mehrmals überarbeitete, alsdann zum Absenden abschreiben liess; sehr häufig wurde die Abschrift noch einmal verbessert und nun erst abgesandt. In seinem Nachlass finden sich zahlreiche Beweise davon.

Hieraus erhellt, dass die mathematische Correspondenz Leibnizens für die Schätzung seiner Leistungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur von grosser Wichtigkeit ist, zumal das, wodurch er sich als Mathematiker einen unsterblichen Namen gemacht hat, in einzelnen abgerissenen, in verschiedenen Journalen zerstreuten Abhandlungen niedergelegt ist. Seine mathematischen Correspondenzen bilden hierzu das vermittelnde Band und eröffnen zugleich die richtigen Gesichtspunkte zur Beurtheilung derselben. Deshalb hat auch bei der vorliegenden Sammlung dieser Briefe die Rücksicht vorgewaltet, dass möglichst die Briefwechsel zusammengestellt sind, die in aufeinander folgenden Jahren geschrieben wurden. — Von bei weitem höherer Bedeutung sind aber diese Correspondenzen Leibnizens für die Geschichte der mathematischen Disciplinen in der zweiten Hälfte des 17. und zu Anfang des 18. Jahrhunderts. Denn obwohl gegen Ende des 17. Jahrhunderts die ersten wissenschaftlichen Journale gegründet wurden, so bestand doch die bisherige Sitte noch lange fort, in Briefen sich gegenseitig Mittheilungen zu machen über neue Methoden, deren eigentliches Wesen man indess so viel als möglich zurückhielt, und über neue, mittelst derselben gefundene Resultate; oder — und dies geschah damals fast allgemein — man legte sich gegenseitig Probleme vor, die nur mittelst einer neuen, von dem Aufgabesteller sorgfältig geheim gehaltenen Methode gelöst werden konnten, und reizte so das Erfindungstalent. Eine unausbleibliche Folge davon war, dass bald mehrere sich im Besitz desselben neuen Verfahrens befanden und nun jeder Anspruch machte auf die Priorität der Entdeckung desselben. Daher denn auch die öfters mit der grössten Erbitterung geführten Streitigkeiten über die ersten Erfinder. Der bis auf die neueste Zeit fortgeführte Kampf über den ersten Entdecker der Differentialrechnung, der zu Anfang des 18. Jahrhunderts ein Streit zwischen Nationen wurde, bietet das grossartigste Beispiel davon. Für den Geschichtsschreiber der Mathematik reicht es da offenbar nicht aus, wenn er die Frage über die Priorität entscheiden soll, auf ein Urtheil, das zur Zeit des Streites von dem erregten Gemüthern in Druckschriften niedergelegt wurde, zu fussen, oder diesem oder jenem Lemma oder Corollarium eine Deutung unterzulegen; die zur Zeit der Entdeckung gewechselten Briefe sind für die letzte Entscheidung die einzig gültigen Aktenstücke. Der Grundsatz Arago's kommt hier ganz besonders zur Anwendung: Il n'y a qu'une manière rationnelle et juste d'écrire l'histoire des sciences, c'est de s'appuyer exclusivement sur des publications ayant date certaine; hors de là tout est confusion et obscurité. —

Mögen die unglückseligen politischen Verhältnisse, die das theure Vaterland gegenwärtig zerfleischen, sich bald so gestalten, dass es dem Herrn Verleger möglich wird, das Unternehmen zu Ende zu führen — ein Unternehmen, das die hohen Verdienste eines der grössten deutschen Männer um die Wissenschaft zu genauerer Kenntniss bringen wird.

Salzwedel im Juni 1849.

Dr. Gerhardt.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Oldenburg, Collins, Newton.

Es ist bekannt, dass Leibniz in Folge einer Intrigue aus seiner Vaterstadt Leipzig auswanderte, um in andern Ländern das Ziel zu erreichen, welches er in brennender Begierde nach Ruhm sich vorgesteckt. Ein glücklicher Zufall führte ihn in Nürnberg mit dem als Staatsmann wie als Gelehrten weit berühmten Baron von Boineburg zusammen, der sehr bald das ausserordentliche Talent des jungen, aufstrebenden Mannes erkannte. Durch ihn wurde Leibniz bewogen, seinen Aufenthalt in Frankfurt am Main zu nehmen, und bald gelang es ihm, in die Dienste des Kurfürsten von Mainz zu treten. Boineburg blieb sein warmer Freund und eifriger Gönner, und obwohl er die glänzenden Geisteskräfte Leibnizens für seine Pläne vielfach in Anspruch nahm und so vielleicht dem eigenen Streben des jungen Mannes entgegentrat, so hatte doch Leibniz namentlich ihm zu verdanken, dass er den berühmtesten Männern der damaligen Zeit, mit welchen Boineburg eine lebhafte Correspondenz führte, bekannt und von seinem Gönner empfohlen wurde. Unter andern stand auch Boineburg mit Heinrich Oldenburg in Briefwechsel, der von Geburt ein Deutscher, während Cromwell's Herrschaft das Amt eines Consuls seiner Vaterstadt Bremen zu London bekleidete, später nach Verlust seiner amtlichen Stellung zu Oxford gelehrten Studien obgelegen hatte und so mit den Männern bekannt geworden war, welche die Königliche Societät zu London gründeten. 1663 wurde Oldenburg einer der Secretäre dieser gelehrten Gesellschaft. Als solcher besorgte er die Herausgabe der Philosoph. Transactions. Das Aprilheft dieses Journals des Jahres 1669 enthielt die Regeln, die Hugens über die Bewegung der Societät zugesandt hatte. Um dieselbe Zeit hatte der englische Mathematiker Wren fast gleichlautende Regeln derselben Gesellschaft vorgelegt. Hiervon nahm Hugens Veranlassung, Wren eines Plagiats zu beschuldigen. Nach Leibnizens Meinung war aber der Streit zwischen beiden Männern überflüssig, da keiner von beiden Genügendes geleistet hatte. Dies gab Leibniz Veranlassung, wahrscheinlich durch Vermittelung Boineburgs, mit Oldenburg in Correspondenz zu treten und diesem seine Idee über die Bewegung vorzutragen. Leider fehlen uns die ersten Briefe Leibnizens an Oldenburg; sie sind bisher weder in der Königlichen Bibliothek zu Hannover, noch in dem Archiv der Königlichen Societät zu London aufgefunden worden. Indessen sind die Antworten Oldenburgs auf der Bibliothek zu Hannover fast vollständig vorhanden und aus ihnen lässt sich schliessen, von welchem Inhalte die Leibnizischen Briefe waren. Wenn auch der Hauptgegenstand dieser ersten Briefe, die Ansichten Leibnizens über die Bewegung, für die Gegenwart weniger Interesse darbietet, so sind doch die übrigen Notizen, die Oldenburg über die Arbeiten und Pläne der Gelehrten der damaligen Zeit mittheilt, für die Culturgeschichte nicht ohne Wichtigkeit. Sie bilden die erste Gruppe der Correspondenz zwischen Oldenburg und Leibniz, die mit dem Briefe vom 28. Sept. 1671 abschliesst.

Die hierauf folgende Lücke wurde höchst wahrscheinlich dadurch veranlässt, dass Leibniz mit dem grössten Eifer gegen Ende des Jahres 1671 bis zu seiner Abreise nach Paris (im März 1672) mit politischen Gegenständen sich befasste, die mit seiner Mission an den französischen Hof in Verbindung standen (siehe Guhrauer im Leben Leibniz. Theil 1 S. 95 ff.). Alsdann war Leibniz während seines Aufenthalts zu Paris nach allen Seiten hin zu sehr beschäftigt, es eröffneten sich ihm so viele neue Aussichten, dass er kein Bedürfniss fühlte, die Correspondenz mit Oldenburg wieder anzuknüpfen. Im Anfang des Jahres 1673 ging Leibniz im Gefolge des Kurmainzischen Gesandten selbst nach London, und so fand sich zugleich mit der persönlichen Bekanntschaft die Veranlassung zum Wiederbeginn des Briefwechsels.

Diese zweite, bei weitem die wichtigste Gruppe der Correspondenz zwischen Leibniz und Oldenburg dauerte bis zum Tode des letztern (im August 1677). Schon vor seiner Abreise von Paris hatte Leibniz die Bekanntschaft von Hugens gemacht, und es war diesem grossen Meister gegenüber seine alte Neigung für die Mathematik mit erneuter Heftigkeit erwacht. In London traf Leibniz bei dem berühmten Boyle mit dem Mathematiker Pell zusammen, der ebenso wie Leibniz besonders mit arithmetischen Untersuchungen sich befasst hatte. Es konnte nicht fehlen, dass die Unterhaltung auf mathematische Gegenstände kam; Leibniz gedachte seiner Arbeiten, und was er Neues gefunden hätte, Pell bemerkte ihm aber, dass dies schon in der Schrift Mouton's: De Diametris apparentibus Solis et Lunae, enthalten sei. Leibniz hörte hier zuerst von dem Vorhandensein dieser Schrift, und erhielt sie durch Oldenburg zur Einsicht. Glücklicherweise ergab es sich, dass Mouton auf andere Weise, als Leibniz, zu denselben Resultaten gelangt war, und dass Leibniz den Verdacht eines Plagiats von sich abzuwehren vermochte, indem er zeigte, dass seine Regeln umfassender seien. Er that dies in einem Schreiben an Oldenburg (X), das er noch während seiner Anwesenheit in London abfasste. Es enthält dies vielleicht den ganzen Umfang der mathematischen Untersuchungen, die Leibniz bis dahin angestellt hatte. Indess erhellt aus dem Briefe (XII), den Leibniz unmittelbar nach seiner Rückkehr nach Paris an Oldenburg schrieb, dass er damals sich mehr mit mechanischen, chemischen und physikalischen Problemen beschäftigte, als mit mathematischen. Unter andern war seine Aufmerksamkeit auf das Problem, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu finden, das er durch allmälige Erniedrigung des Grades der Gleichungen zu lösen vermeinte, gerichtet. Von Newton's analytischen Arbeiten scheint Leibniz keine Kenntniss gehabt zu haben; er spricht bloss von seinen Untersuchungen über die Farben. Besonders aber ergiebt sich aus dem folgenden Briefe Oldenburgs an Leibniz (XIII), dass letzterer während seines diesmaligen Aufenthalts zu London nicht die Bekanntschaft von Collins gemacht, der vermöge seiner weit verbreiteten Correspondenz vielleicht am meisten in die analytischen Entdeckungen Newton's eingeweiht war.

Folgen wir Brewster, dem neuesten Biographen Newton's, so hatte Newton beim Beginn seiner Studien die Entdeckung ge macht, jede beliebige Potenz eines Binoms durch eine Reihe darzustellen. Es war dies ein Ergebniss aus Wallis's Methoden zur Summation von Reihen, das Newton durch Verallgemeinerung gewann. Die Untersuchungen aber und Resultate, die Wallis in der Arithmetica infinitorum niedergelegt hatte, wurzelten in der Methode des Untheilbaren Cavaleri's; man hatte nämlich erkannt, dass wenn man die Summation von Reihen bewerkstelligen könnte, auch die Quadraturen von krummlinig begränzten Ebenen und die Cubatur von Körpern mit krummen Oberflächen gefunden wären. Das Mittel indess, das man gebrauchte, um die arithmetisch gewonnenen Resultate auf geometrische Grössen anzuwenden: Zerlegung in Theile, die sich wie die Glieder solcher Reihen zu einander verhielten, war zu mechanisch und willkürlich, als dass es dem eminenten Geiste Newton's behagen konnte. Es musste ihm darauf ankommen, eine bestimmte, direkte, auf alle Fälle anwendbare Methode aufzustellen; er ging deshalb auf das eigentliche Verfahren Cavaleri's zurück, setzte es mit den analytischen Ergebnissen in Verbindung, und fand so das Princip der Fluxionsrechnung*). Dass dies im Allgemeinen der Gang sein durfte, den Newton bei seinen Untersuchungen einschlug, geht aus der Abhandlung: Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, hervor, die er um das Jahr 1669 abfasste und dem Dr. Barrow zusandte, der sie wiederum Collins mittheilte. Es kann nicht geläugnet werden, dass Newton bei Abfassung dieser Schrift das Princip der Fluxionsrechnung erkannt hatte; auf der andern Seite muss aber auch besonders hervorgehoben werden, dass jeder Algorithmus der neuen Rechnung fehlt, ein Mangel, der, wie bekannt, für die Entwickelung und Ausbildung jeder mathematischen Theorie äusserst hinderlich ist. Man hat nun von jeher ein besonderes Gewicht auf die Annahme gelegt, dass Leibniz entweder durch Oldenburg oder Collins von der oben erwähnten Abhandlung Newton's Kenntniss erhalten hätte, und in Folge dessen angeregt worden wäre, dasselbe was Newton darin aufgestellt zu entdecken. Wäre diese Schrift in den Jahren 1672 bis 1674 Leibniz mitgetheilt worden, als er unter Hugens's Leitung eifrig die höhere Mathematik trieb, so hätte dieselbe, das kann nicht geläugnet werden, einen mächtigen Eindruck auf ihn machen müssen, und er

*) Es ist zu bemerken, dass Cavaleri den Ausdruck „fluere" gebraucht.

würde gewiss sich bemüht haben, in die aufgestellte Theorie einzudringen und dieselbe sich anzueignen. Davon findet sich indess auch nicht die geringste Andeutung. Im Gegentheil, Leibniz erhielt Kenntniss von jener Abhandlung Newton's, als er bereits die Bezeichnungsweise der höhern Analysis in seinen Untersuchungen gebrauchte, und die Differentialrechnung entdeckt hatte. Wir haben nämlich in der Sammlung der Handschriften Leibnizens auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover ein Manuscript gefunden, mit der Aufschrift: Excerpta ex tractatu Newtoni Msco. De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, auf dem leider der Vermerk der Zeit fehlt, in welcher Leibniz es schrieb. Schon die erste Zeile dieses Manuscripts bestätigt unsere Behauptung; sie lautet: $AB \sqcap x$, $BD \sqcap y$, a, b, c quantitates datae, m, n numeri integri. Si $ax^{\frac{m}{n}} \sqcap y$, erit $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} \sqcap \left[\int y\right]$ areae*). Im Folgenden hat sich Leibniz nur das Beispiel $\frac{1}{x^2} \sqcap y$, ferner die Entwickelung von $\frac{1}{1+x}$ in eine Reihe und die Wurzelausziehung Newton's angemerkt, dagegen ist fast vollständig der Abschnitt: De Resolutione aequationum affectarum, ausgeschrieben, für welchen Leibniz sich besonders interessirt zu haben scheint. Demnach ist die Annahme durchaus von der Hand zu weisen, als sei Leibniz durch Oldenburg, Collins oder auf andere Weise von den analytischen Entdeckungen Newtons unterrichtet gewesen, bevor er die Elemente der Differentialrechnung gefunden. — Leibniz wurde durch Hugens in die Cartesianische Geometrie eingeweiht, und indem sein Streben dahin ging, die Probleme, an deren Lösung die Bemühungen Descartes's gescheitert waren, zu finden, gewann er das Princip der höhern Analysis und gebrauchte zugleich die so äusserst glücklich gewählte Bezeichnungsweise; Newton hingegen fand die Fluxionen durch Verallgemeinerung der Methode des Untheilbaren Cavaleri's.

Die Briefe, die Leibniz in den Jahren 1673 und 1674 aus Paris an Oldenburg schreibt, sind Beweise von dem

*) In seinen Excerpten pflegte Leibniz die eigenen Bemerkungen durch Klammern einzuschliessen.

Umfang seiner Beschäftigungen um diese Zeit. Für jede literarische Neuigkeit zeigt er Interesse. Die Thätigkeit seines Geistes ist ungemein. Dazu kommt, dass sehr verschiedenartige Arbeiten im Auftrage von Fürsten und Freunde auf ihm lasten und ihm die Zeit rauben. Was die Mathematik anlangt, so gedenkt Leibniz seiner Untersuchungen über Zahlreihen, der Entdeckung der nach ihm benannten Reihe für den Inhalt des Kreises, der Vollendung seiner Rechenmaschine, an die ihn Oldenburg so oft mahnt, besonders aber der Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen.

Wie überhaupt Leibniz bis zum Jahre 1675 mathematische Studien trieb, dürfte am besten der Plan eines Werkes darlegen, das Leibniz um diese Zeit herauszugeben beabsichtigte. Unter seinen Manuscripten findet sich nämlich ein Blatt in 8. mit der Aufschrift: April. 1675. Geometria Amoenior, subjicienda Geometriae arcanae. Nur den Anfang der Inhaltsanzeige zur Charakterisirung des Ganzen wollen wir hier mittheilen:

Geometriae est explicare figuras quas natura et ars singulari quadam ratione producit: ita guttae liquorum, orbiculi pinguedinis in aqua natantis egregie rotundi, bullae aëris rotundae, pentagonum factum ope quadrati et hexagonum ope pentagoni, figurae cristallisationum etc.

Geometria Sartorum.

De linea recta par le moyen de la filiere, et per tornum.

De dividendis instrumentis par la canetille.

Wrenni Hyperbola per Tornum.

Hyperbola par la fusée.

Parabola, Ellipsis, Hyperbola, ope flexionis.

Ellipses, des arcades et de la coupe des pierres.

Descriptio Lineae Logarithmicae meae.

Wallisii et Rivii Contignationes.

Blondelli linea diminutionum Architectonica.

Varenii de crepusculis Analysis.

Libella per Bullam aëris Thevenotiana.

De circulis qui in aqua aut alio liquore injecto lapillo nascuntur.

Quomodo Vitri-fusores oris flatu formant vitra.

De Huddenianis Lentibus, physico artificio tornatis; addatur P. Pardies.

De Tornatoria arte, vide Bruestorf.

De annulis sibi inclusis, ut modus non appareat.
De artificio puerorum, quo fila digitis implicata educunt.
De linea quam describunt lapilli ita jacti, ut aliquot per aquam subsultationes exerceant.
De Geometria apum et aranearum, vid. Thevenotius.
De Textoria arte.
De divisione Instrumenti ope cochleae cylindraceae circumductae e longinquo etc.

Gegen Ende des Jahres 1675 fand Leibniz das Mittel, das sogenannte umgekehrte Tangentenproblem, das Descartes ungelöst gelassen, zu behandeln; er zeigt es Oldenburg in dem Briefe (XXXI) vom 28. December 1675 an: Sed et ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene desperatum, nuper aditum reperi felicem; de quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi. Den Verfolg der Untersuchungen über diesen Punkt, der mit der Entdeckung der Differentialrechnung innig zusammenhängt, haben wir in der Schrift: Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz, Halle 1848, ausführlich dargethan.

Den Glanzpunkt der Correspondenz bildet das Jahr 1676. Newton, vielleicht durch Collins dazu vermocht, richtet zwei lange Schreiben an Oldenburg, um sie Leibniz zu überschicken. Sie enthalten die Summe der analytischen Entdeckungen, die Newton bis dahin gewonnen. Es konnte nicht fehlen, dass sie auf Leibniz, der namentlich mit der Entwickelung der Ausdrücke in Reihen noch ziemlich unbekannt war, einen mächtigen Eindruck machen mussten; er bittet über einige Punkte um Aufklärung. Indess zeigen die Randbemerkungen Leibnizens, die er dem zweiten Schreiben Newton's beigefügt hat, wie weit er damals schon in die höhere Analysis eingedrungen; er übersetzt sogleich die Theoreme und Resultate, die Newton mittelst der Fluxionen erhalten, in die Sprache der Differential- und Integralrechnung und spürt so dem Ursprung derselben nach. Während Newton scheu das Fundamentaltheorem der Fluxionsrechnung in ein Buchstabenräthsel verhüllt, theilt Leibniz in seinem Antwortschreiben auf den zweiten Brief Newton's (XXXXI) die Grundzüge der Differentialrechnung offen mit, unterdrückt jedoch sorgfältig den Algorithmus der Integralrechnung.

Der Briefwechsel wurde durch den Tod Oldenburgs (im August 1677) unterbrochen, und es ist keine Spur vorhanden, dass die beiden grossen Männer in weitere unmittelbare Verbindung ge-treten wären, bis zum Jahre 1693, wo Leibniz einen Versuch machte, einen Ideenaustausch wieder anzuknüpfen. Indessen scheint die geringe Neigung Newton's zur Fortsetzung der Correspondenz (quamvis commercia philosophica et mathematica quam maxime fugiam, sind seine Worte) auf Leibniz keinen besondern Eindruck gemacht zu haben, und er antwortete auf Newton's Brief nicht weiter.

I.

Oldenburg an Leibniz.

Obtinere a me non potui, Vir Consultissime, ut Literas tuas $^{13}/_{23}$ Julii novissimi Moguntia ad me datas silentio praeterirem. Spirant quippe humanitatem non vulgarem; quin et eximiam in provehenda re Philosophica voluntatem testantur. Hujusmodi nova non leviter eos afficiunt juvantque, qui in votis omnino habent, ut omnium gentium viri sagaces et industrii velint studia et exercitia sua ad augendam ornandamque solidam et feracem Philosophicam consociare. Anglia nostra eo imprimis innititur; molitur idem Gallia et ipsa Italia: nec Germaniam opinamur post principia latere. Tu, Vir Amplissime, insigniorem pro aetate tua in rebus physicis tum affectum tum progressum significas, eaque de Veris Motus Rationibus epistola tua subinnuis, quae Sitim mihi et aliis movent, unicam illam tuam, de qua loqueris, certi motus Universalis in Globo nostro Terraqu-aëreo Hypothesin cognoscendi, ex qua scil. omnium quos in corporibus est deprehendere, motuum ratio, insueta hactenus claritate, reddatur. Virum sane philosophum Te praestabis, si tanti momenti negotium confeceris, remque feceris Societati Regiae gratissimam, si Hypothesis illius Summam et rationes exponere non graveris. Idem jam fecit de suis Motus Regulis Hugenius, aliis ipsum in eodem argumento explicando imitantibus; quorum nomina aeque ac meletemata, cedro digna, nunquam intermorituram in Soc. Regiae Archivis, suum cuique tribuere summopere satagentibus, perennitatem consequuntur. Quod idem Tuis eveniet meditationibus et inventis, si quidem in iis edisserendis et communicandis cordatum et facilem Te mihi praebueris.

Quam de Arte Combinatoria Dissertationem edidisse Te scribis, ea ad oras nostras necdum pervenit. Eam tanto magis videre opto, quod in ea Te nova non pauca, quaedam etiam profutura observasse sub-indicas. Quae hactenus de Arte illa varii scripserunt, vanam potius loquendi de variis amplitudinem, quam judiciose disserendi et nova solida ac profutura excogitandi rationem docuerunt.

Societas nostra in consectandis perpetim Experimentis laborat, unde Sylva suo tempore confertissima succrescet, amplissimam Naturae Historiam complectens, solido et feraci Physices Systemati condendo posteritati forte suffecturam. Quidam ejus Socii de variis varia nuper in lucem emiserunt. Nosti jam, quae Dn. Boylius per aliquot annos feliciter edidit, quorum postrema sunt de Formarum et Qualitatum Origine; de Argumento illo, Num detur absoluta sive perfecta Quies in corporibus etiam solidissimis? De Qualitatibus Systematicis sive Cosmicis; De Suspicionibus Cosmicis: De regionum subterranearum juxta ac submarinarum Temperie; Deque maris Fundo; quibus accessit Ejusdem Introductio in Historiam de Qualitatibus particularibus. Insuper Dn. Wallisius imprimi nuper curavit duas partes priores Mechanicae sive Tractatus sui Geometrici de Motu, in quarum prima, de Motu praemittit Generalia, agitque de Gravium descensu et Motuum Declivitate, speciatim vero de Libra doctrinam tradit: In secunda vero de Centro Gravitatis, ejusque Calculo in figuris quam plurimis Curvi-lineis atque ex his oriundis Solidis et Superficiebus Curvis. Tertiam et ultimam partem habebimus, quam primum per Praeli difficultates licebit. Ad haec Dn. Barrovius, priori haud impar Author, Lectiones edidit tum Opticas tum Geometricas, a subacti judicii Lectoribus magni aestimatas. — In Anatomicis prodiere Dr. Lowerus de Motu Cordis et Sanguinis, ubi Experimenta istius generis egregia inseruntur; nec non Dr. Thrustoni de Respirationis Usu primario diatriba.

Non ita pridem ad manus meas e Germania pervenerunt chartae quaedam impressae, quarum titulus: Inventum Novum Artis et Naturae Connubium, in copulatione Levitatis cum Gravitate per Artificium Siphonis, Machinae Aquaticae et Antliae exhibitum a Georg. Christoph. Wernero, Memmingensi; excusum Augustae A. 1670. Ait Author, Machinam hanc, non modo in minori, sed et majori forma descriptam, in aedibus ipsius, ad quorumvis conditionis hominum servitia prostare. Scire percuperem, num dicta Machina per Germaniam longe lateque innotuerit et a viris harum rerum callentioribus laudem impetraverit. Multum me tibi devinceris, Vir Spectatissime, si Memminghae, ubi inventi Author degit, vel Augustae Vindelicorum, ubi excusus est Libellus, rei et successus veritatem sollicite inquiras, meque de re tota, et de ipsius imprimis artificii ratione perfecte edoceas.

Hugenianum Longitudinis, Penduli beneficio, Inventum adhuc in suspenso est. Existimant nonnulli, duo adhuc istius Automati complemento deesse; unum est, quod necdum perpetuo retineatur in situ perpendiculari; alterum, quod multum incommodi ab irregulari motu Aëris ingeratur. Spes tamen est, remedium, defectibus hisce curandis aptum, non adeo esse difficile inventu, quum degit inter nos Vir quidam Mathematicus, qui actu se invenisse remedium illud affirmat, cumque opportunum fuerit, se propalaturum pollicetur. Haec sunt, quae Tuis regerenda hac vice suppetebant. Tu interim, Vir Doctissime, rem philosophicam ornare et augere perge. Dabam Londini d. 10 Augusti, 1670.

P. S. Litteras tuas Dn. Hobbio *) inscriptas rus, ubi nunc degit, transmisi. Si quid responsi dederit, sine mora ad te curabitur.

II.

Oldenburg an Leibniz.

Responsum ad locupletissimas tuas literas, 18 Septemb. ad me datas, invitus plane ad hoc usque tempus, ob varia impedimenta distuli. Tu facile indolem provinciae meae dispicies, eoque pronius scripti hujus tarditatem excusabis. Dicere vix possum, quam gestiat animus, dum intelligit, Virum inter Leges et Aulam dispunctum, ista tam recenti aetate, magnorum in Philosophia Nominum, Baconi puta, Gassendi, Cartesii, similiumque, scripta, non dico perreptasse, sed tam subacto Judicio, ut

---

*) Diesen Brief Leibnizens an Hobbes hat Guhrauer nach einer Abschrift Oldenburgs im British Museum herausgegeben. Siehe: Guhrauer, Leben Leib. Theil II. Beilage. S. 61. ff.

a Te factum excussisse. Quae de Jure constituendo brevi et dilucido infinitis tamen casibus, sola paucarum ac pene simplicium Regularum Combinatione, sufficturo, moliris, totum ea sola hominem, quin totos homines quam plures, deposcunt. Rem arduam fateor, sed integritati, perspicaciae, solertiae industriaeque, mea quidem sententia, nequaquam impossibilem. Felicem Tibi tuique geminis in conatu, non utili minus quam laudabili, successum ex animo comprecor, meque posse Tibi cordatos in tanto opere Patronos et hyperaspistas conciliare, in votis quam maxime habeo. Re ferente cum nostris hic loci in Jure Civili Doctoribus de Instituto tuo forte disseram, eorumque opinionem exploratam suo tempore rescribam.

Hac vice in reliqua hujus epistolae parte juvat philosophari, quaeque literarum tuarum occasione, cogitata subnascuntur, enarrare.

Et primo quidem occurit Hugenianum de Longitudinibus Penduli ope inveniendis, conamen. Lutetia Parisiorum nuper accepi, cordatos quosdam Viros, rerumque Mathematicarum peritos sumptibus publicis tum in Indiam Orientalem tum in Americam brevi navigaturos, Automatis aliquot, Hugeniano artificio fabrefactis, instructos; eo plane consilio, ut memorati Penduli in agitatis maribus exactitudinem, summa cura explorent, fidamque Regi suo de successu narrationem afferant.

Ille qui hic Londini incommodis illis, quae hac in re etiam num superesse censet, mederi satagit, est Doctissimus Mercator: Promisit ille Automatum, Longitudini deprehendendae idoneum, quod 1) habeat Duas Annulos Cylindricos, qui id perpetuo in situ retineant perpendiculari, eidemque Navis lateri obversum, quocunque demum fluctu ea feratur; unde, cum motus fere tendat a Puppi ad Proram, certiores Penduli vibrationes evadant, quamsi in quamvis Navis plagam Machina digrediatur.

2) Quod Aequationem Temporis exhibeat perquam accurate, ipsi Automato applicandam.

3) Quod ab irregulari Aëris motu ingeritur incommodi (praecedentia, ipsius quidem sententia, longe superantis) amoliatur. Tempus docebit eximii hujus inventi successum, eosque, qui authoritate et munificentia sua illud juvent, Terrarum Principes excitabit.

Quid Machinae Aquaticae Memmingenses, in fodinis Suacensibus ab Aquarum importunitate liberandis, praestiterint, scire per quam aveo. Spes est, Serenissimum Bavariae Electorem, quem eo evocasse Machinas scribis, rem pro merito examinaturum, Teque ubi de exitu rei liquido judicatum fuerit, pro humanitate tua perscripturum.

Aegerrime fero, Clarissimum Doct. Mauritium tuas de Primis Abstractisque Motus rationibus Meditationes nobis invidisse. Solatur interim, quod generose adeo candideque aliud nobis Exemplum polliceris. Eousque de Summa illa, mihi jam transmissa, judicium suspendere nobis fas fuerit, cum multo commodius rectiusque de re tota ex integro Scripto, quam ex compendio pronuntiari possit. Interim quae de natura Punctorum, eorumque Penetratione, inque partes antea non positas extra partes, seu in partes antea se penetrantes Divisibilitate subtiliter disseris, majorem lucem, firmiusque quo consistant talum postulare videntur.

Jungas, obsecro, Hypothesin integram, quae ex universali quodam Motu, in Globo nostro supposito, plaerorumque in corporibus Phaenomenum rationem reddit. Nec ea nos celes, quae ex ipsa de Abstractis Motus Rationibus Theoria duxisse Te in Mentium non Existentiam tantum, sed et intimiorem a corporea distinctam Naturam asseris. Gratissima haec nobis futura sunt, et summo, mihi crede, candore, excipienda.

Visa Tibi sine dubio fuere Elementa Physica Francisci Wilhelmi Baronis de Nuland, qui Cartesianorum Principiorum falsitatem se ostendisse, ipsiusque errores ac paralogismos (sic vocat Author) ad oculum demonstrasse arbitratur. In hoc libello cum Motus statuatur unicum productorum Corporum Organon, ejusdem Natura et Leges investigantur, quas cum Te vidisse et examinasse credam, hic commemorare supersedeo.

De caetero, Societas Regia consectandis Experimentis pro viribus incumbit. Socii quidam ejus Tractatulos quosdam Physicos nuper edidere. Nobilissimi Domini Boylii Origo Formarum et Qualitatum, juxta Philosophiam Corpuscularem Experimentis et Considerationibus illustrata, Latine nunc extat, Oxoniae impressa, et propediem in Belgiam magno Exemplarium numero transvehenda. Idem Author Anglice non ita dudum emisit Dissertationes quasdam de Qualitatibus Cosmicis, deque Regionum Subterranea rum et Submarinarum Temperie, nec non Maris fundo; Adhaec, Diatribas aliquas Experimentales de miranda Aëris, etiam citra Calorem, Expansione, deque Elasticitatis ejusdem Duratione: Quae omnia sine dubio viris cordatis et sagacibus acceptissima erunt.

Quam cupis Josephi Glanvilli de Scientiarum et Artium incremento Historiam, lubens transmittam; sed Amicum expectem oportet, qui in oras vestras commigret, sibique hujus aliorumque quorundam libellorum fasciculum imponi sinat. — Transactiones, quas vocamus, Philosophicas, hinc a Te postulatas, forte non mittam, cum eas audiam Hamburgi sermone Latino nunc imprimi; unde commodius Tibi eas comparare poteris. Consilium edendae hoc loco Bibliothecae Philosophicae me latet: Si quid tamen ea de re deinceps rescivero, perscribam; nec qui Catalogi librorum recentiores apud nos extant, fasciculo dicto adjungere omittam.

Finem hic facerem, nisi ad Epistolae tuae calcem, de Motus perpetui procurandi ratione perquam facili, a Te inventa, nonnulla innueres, quae tantillum me remorantur. Ais, Te rei demonstrationem, stupentibus viris magnis, expedivisse; animosque sumpsisse, specimen in machinula edendi, atque ubi res successerit, vadum publicum tentandi, dummodo intelligas, esse qui rem ex vero aestiment.

Facile, puto, credes, me in Anglia peregrinum, sine palpo et assentatione de Anglis pronuntiaturum. Sunt inter eos viri complures, subacto in rebus Mathematicis et Mechanicis judicio praepollentes, quorum de Invento isto tuo sententiam ut exquiras, prius quam id evulges, ejusve Authorem te scribas, omnino et amice suaserim. Si consilium allubescat, meque hac in re parario opus fuerit, provinciam non detrecto, omnemque, quae virum bonum decet candorem spondeo. Vale, Vir Egregie, et me Tibi devinctissimum ama. Dabam Londini die 8. Dec. 1670.

Si quo responso me digneris, literas tuas, quas tabellario committis, hunc in modum inscribas, quaeso:

A Monsieur

Mons. Grubendol

à

Londres.

Nihil praeterea; multo tutius literae sic inscriptae, et per tabellarium missae, ad manus meas perveniunt, quam si meum ipsius nomen adhibeatur. Interim si quis amico hinc profecturo literas vel fasciculos pro me tradiderit, eo casu proprio meo nomine utendum fuerit.

III.

Oldenburg an Leibniz.

Recte accepi, Vir Nobilissime, Hypothesin tuam Physicam, typis Moguntinis editam, et mox prima ferente occasione coram Soc. Regia produxi. Praefixa ipsi fuit honorifica Dedicatio, proximisque nonnullis ejus sociis in mandatis datum, ut libellum istum evolverent et expenderent, suamque de eo sententiam, quam primum fieri commode posset, in coetu publico referrent. Id dum agitur, suadere velim, Vir optime, ut partem alteram quantocyus ad me, tuta occasione, expedire ne graveris, cum intelligam Ego, viros illos, quibus examinis hujus provincia est demandata, vix quicquam de re tota pronunciaturos esse, nisi et tuam de Abstracta Motus Theoria doctrinam, saepe a Te citatam et pluribus positionibus substratam, cognoverint. Interim, quantum colligo, non displicet opera tua iis, qui inspexere, certe mihi perplacet, qui ad multa Te respexisse percipio. Cum posteriora videro scripti hujus, mox Hypothesi tota Transactiones Philosophicas exornare satagam.

Quam primum de Machinae Wernerianae successu certi quid acceperis, nobis quoque impertiri ne graveris. Rationem dulcificandi aquam Marinam invenies impressam No. 67. Transact. philosophicarum, quantum quidem ejus retegere inventori visum fuit.

Famigeratum illud Grandamici de Terella Magnetica Experimentum successu carere, satis liquet ex iis, quae ex Dn. Petiti epistola in Transact. phil. No. 28. inserta habentur.

Operam dabo, ut cura Martini nostri libros a Te hinc desideratos accipias; Vale et porro Tui studiossimo fore. Raptim Londini d. 14. April. 1671.

P. S. Ne, quaeso, invideas mihi peculiares illas, quas dicis, de Deo ac mente demonstrationes, circa quas nonnulla innuis, quae me perquam attonitum habent, adeoque stimulant, ut tanto importunius eorum communicationem expetam.

IV.

Oldenburg an Leibniz.

Paucis abhinc diebus per Tabellionem ordinarium de plurimis rebus Philosophicis, nec non de Hypothesi tua Physica ad Te scripsi, inprimis vero unum, ut partem ejus secundam de Abstractis Motus regulis quantocius, ad majorem illius rei lucem, huc transmittas. Spero litteras illas rite Tibi fuisse traditas. Jam quod scribam aliud non suppetit, nisi ut significem, me per Bibliopolam nostratem, Martinum, et per Schultzium Hamburgensem, ad Zunnerum Francofurtensem libros a Te desideratos, quos quidem eorum concessu potui transmisisse, nempe:

	lib. sterl.	shil.	d.
Phil. Transact. annorum 68, 69, 70	1	0	0
Lexicon Bluntii	0	4	6
Boylius de Rarefactione Aëris	0	0	6
Boilii Tractatus aliquot de qual. Cosmicis etc.	0	1	8
Glanvils Plus Ultra	0	1	6
Mercur. librarius	0	1	6
Summa........	1	10	8

Persuasissimum habeo, Te curaturum, ut Zunnerus Schultzio de precio satisfaciat, ut Schultzius deinde possit satisfacere Martino; absque quo si fuerit, difficilis erit imposterum Martinus noster in consimili occasione. Vale et a Tui observantissimo plurimum salve.

Dabam Londini d. 24. April. 1674. Denique Schultzius Amplitudini Tuae suppeditabit omnes hujusmodi libros, in Anglia impressos: Noster enim Martinus cum eo rem habet.

V.

Oldenburg an Leibniz.

Exhibita, prout jusseras, Regiae Societati Hypothesi tua Physica, nec non Motus Abstracti Theoria, mox Illa, more suo, utrumque libellum, diversis vicibus, nonnullis e coetu suo Mathematicis et Physicis evolvendum atque examinandum commendavit. Factum hic, quod fieri assolet in ferenda de rebus extra Mathematicam evidentiam positis sententia: In diversas quippe opiniones Philosophi illi abiere. Interim, qui favere sensis tuis omnium maxime videbatur, erat Clarissimus Wallisius, Geometriae Professor Savilianus Oxonii, cujus mentem, si placet, paucis et quidem primo de Hypothesi ipsa, sic accipe;

„Legi semel atque iterum Dn. Leibnitii Hypothesin novam, „de qua opinionem meam petitis. Authorem quod spectat, utut „de nomine (quod memini) mihi ignotum prius, aestimare tamen „debeo, ut qui, in loco magno inter magna negotia positus, va„care tamen potest liberae Philosophiae, et rerum causis inves„tigandis, quique ad multa respexisse videtur. Opus quod atti„net, multa inibi reperio summa cum ratione dicta, et quibus „Ego plane assentior, ut quae sint sensis meis consona. Talia „sunt, debere Physicum ad mechanicas rationes, quam „fieri potest, omnia accommodare § 15. Nihil se ip„sum, ex abstractis Motus rationibus, in lineam pri„orem restituere, etiam sublato impedimento, nisi „accedat nova vis § 23. Omnia corpora sensibilia, „saltem dura, esse Elastica; Atque ab Elatere oriri „Reflexionem § 27. (Quae meis de Motu Hypothesibus, Trans„actionibus Philosophicis*) jam antehac insertis, omnino „congruunt, quaeque in Mechanicis seu de Motu Tractatu fusius „prosequor capp. 11 et 12). Item, Attolli gravia, non metu „vacui, sed propter Atmosphaerae aequilibrium § 25. „Levitatem vero per accidens tantum sequi ex Gra„vitate (gravioribus minus gravia sursum pellentibus) § 24. „Irruptionem Aëris (sed et Aquae etc.) in vas exhaus„tum ob Aëris Gravitatem et Elaterem fieri § 26. Item

*) Am Rand bemerkt: V. Num. 43.

„Exhausti atque Distenti (ut loquitur) Effectus; unde „Fermentationes, Deflagrationes et Displosionum „omne genus, nempe displodente altero, quod alterum „absorbet (seu admittit potius) § 27, 39, 40. Nam et haec „etiam ab Elatere fiunt, vel in Contento vel in Continente, vel „utroque; illo, explicante se quod nimis fuerat compressum; „hoc contrahente se quod nimis fuerat distentum: quippe utro- „vis modo, nedum utroque, fiet irruptio vel explosio, dummodo „locus sit, quo sine impedimento recipi possit quod ejiciendum „erit. Suntque haec plane consona traditis nostris Mechan. c. 14. „Sed et illud, Gravitatem in inferioribus oriri ex motu „(vel pressu) superioris aetheris § 43, 46. magna saltem „verisimilitudine dicitur: quamquam enim Gravitatis causa (ut „et Elateris) tam sit in abscondito, ut mihi nondum usquequaque „satisfactum sit quid in ea re statuam; Naturae tamen phaeno- „mena Pulsione quam Tractione felicius ut plurimum explicantur. „Aliaque multa sunt, quae repetitu non est opus, quae magna „verisimilitudine, si non et certitudine, dicta judico; quaeque „per se satis consistunt independenter ab aliis; neque enim ita „inter se sunt connexa omnia, ut uno vacillante caetera simul „ruant. De tota vero Hypothesi ne quid statim pronuntiem, id „saltem facit, quod non sim pronus Ego (in rebus saltem pure „Physicis, non Mathematicis) assensum novis traditis adhibere, „donec vel Eruditorum sententiis in utramque partem ventilatis „quid statuendum sit rectius constet, vel ipsa sui evidentia (quod „in veris Hypothesibus non raro fit) veritas eluceat. Fundamen- „tum Hypotheseos novae petit ex Abstracta sua motus The- „oria (quam necdum vidi, ut nec hujus Tractatus posteriora, „quae passim citantur), nempe, Quod nulla sit cohaesio „quiescentis, sed omnis consistentia seu cohaesio „oriatur a motu § 7, 18, 34. (quod cum Gulielmi Neili nos- „tri placitis coincidit). Contra vero Honoratissimus Boylius Con- „sistentiam in particularum quiete, et Fluiditatem in „earundem continuo motu, collocat. Alii, ad varias Atomo- „rum figuras, hamatas et varie implicitas, rem referunt. „Neque Ego is sum, qui in tanta sententiarum varietate me „velim arbitrum interponere. Sed tempori res permittenda est „et Doctorum in utramque partem rationibus. Quippe, idem „fere obtinet in novis Hypothesibus atque in Pendulorum Oscillati- „onibus; ubi, post crebras hinc inde factas reciprocationes,

„tandem in perpendiculo fit quies. Id vidimus in Hypothesi
„Copernicana, quae, utut fuerit Veteribus cognita, tamdiu tamen
„jacuit sepulta, ut pro nova haberetur. Et quamvis optima esset
„suffulta ratione, non tamen statim obtinuit, sed a variis fuit
„variis modis impedita, et acriter disputata, donec tandem rati-
„onibus authoritati praevalentibus ita jam universim admittitur,
„ut vix quispiam harum rerum gnarus de ea dubitet, nisi quibus
„Cardinalium decretum praejudicio est. Et quamquam Tycho
„novam illius loco substituerit, quae illi aequipolleret, ea tamen
„tot onerata est incommodis, ut existimandus videatur potius
„ad frangendam invidiam id fecisse (quoniam Telluris motus ita
„Vulgi opinionibus horribilis videbatur) quam, quod Copernici
„Hypothesin ex animo repudiaverit. Idem dicendum de Circu-
„latione Sanguinis Harveana, quae utut optime stabilita
„fuerit et oculorum αὐτοψίᾳ comprobata, disceptata tamen
„fuit inter Londinenses Medicos viginti plus minus annis, ante-
„quam in publicum prodiret; et ab aliis postea. Quae tamen
„deinceps post maturam rei pensitationem (quod temporis tandem
„erat) ab omnibus ut indubitata recipitur. Sic Galilaei Hypo-
„thesis (cur Antliae aquam non ultra certam altitudinem attra-
„hant, primum excogitata) quam Torricellius in graviori liquido
„adeoque magis tractabili promovit, Aequilibrium Atmosphae-
„rae pro Veterum Fuga Vacui substituens, non nisi post diu-
„tinas hinc inde disputationes eum apud Viros Doctos locum
„obtinuit, quem jam habet. Idem de Glissonii nostri Vasis Lym-
„phaticis, ante multos annos Londinensibus Medicis ab illo
„indicatis atque ab iisdem admissis et approbatis dicendum
„erit. Quae tamen ita rationi consona reperta sunt et oculari
„inspectioni manifesta, ut tandem longo post tempore inter
„alios aliquot acriter disputatum sit, quis eorum primus Inventor
„fuerit. Idemque in hoc negotio, aliisque novis Hypothesibus
„expectandum, quae nec oculi inspectione nec certa demonstra-
„tione probari possunt, ut, si veris rationibus fundatae sint, tan-
„dem, quamvis non nisi post velitationes utrinque factas, in li-
„beris philosophantium animis locum obtinebunt, interea pendu-
„lae mansurae."

Secundo, idem Wallisius de Theoria Motus Abstracti haec alio tempore multo parcius respondet;

„Accepi transmissam Dn. Leibnitii Theoriam Motus Abstracti;
„de qua etiam judicium meum expectatis. Duo autem sunt

„quae suadeant, ne illud praestem. Alterum, quod res invidiosa „videatur de aliorum scriptis censuram agere. Alterum, quod „occupatissimo tempore huc advenerit, quo aegre tempus obti„nuerim semel atque iterum attentius legendi, nedum omnia „pensiculatius expendendi. Quoniam vero id petitis, haec pauca „dicam. Multa scilicet inibi contenta, Ego plane approbo, ut „subtiliter et solide dicta, quaeque virum curiosum et cogitabun„dum indicant. Si pauca sint, quibus non statim assentiar, ignoscet, „spero, Vir humanissimus. Et speciatim, fateor, mihi nondum satis„factum esse, ut, primis saltem cogitationibus, statim assentiar, Co„haesionem omnem ex continuo celerique sed inobservabili particula„rum motu fieri (quod ille Theoriae Motus Concreti fundamentum „ponit;) uti nec pridem mihi fiebat satis, cum, ante aliquot an„nos, similem quietis et Cohaesionis causam assignaverit Nei„lius noster*). Quid olim aliquando fiet, post rem accuratius „perpensam, nec dicere possum, nec praevidere. Interim Ego „ἐπέχω nec quicquam in aliorum praejudicium pronuntio; quin „liberum cuique sit, eam quam rationi magis consentaneam ju„dicaverit sententiam amplecti."

Hucusque Wallisius noster, qui forte rem totam a Te propositam, concesso ampliori otio, penitius excutiet. Neilius ille, quem indigitat, vir adhuc juvenis, e Societate Regia, aetate juxta ac ingenio florenti satis nuper concessit. Is anno 1667 sua de Principiis et Natura Motus Cogitata primum Doctissimo Wallisio et mihi, deinceps vero ipsi Societati Regiae exhibuerat, prout in ejusdem Archivis consignata reperiuntur. Supponebat ille, Nullum quiescens habere resistentiam ad Motum; et duo corpora sibi invicem occurrentia, ambo in concursus instanti a Motu desinere. Nullam ipse in mundo admittebat Reflexionem, statuens, nullam materiae particulam posse retroagi quin prius moveri desineret; si vero denuo moveatur, a novo id impulsu oriri, etc.

Caeterum, Vir Amplissime, morem gessi desiderio tuo, et pro commodiori distributione Scriptum tuum hic recudendum tradidi. Hoc sane pacto, Doctorum quorumvis nostratium sententias longe lateque explorabit, ab iisque forsan, ubi Tu necdum clare cernis, ampliorem aliquam lucem foenerabitur. Tu interim

---

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: Nota, si quies est causa cohaesionis, omnis cohaesio est aequalis.

valeas feliciter et scientiam Philosophicam pro virili augere pergas. Dabam Londini d. 12 Junii 1674.

P. S. Jam ante aliquot septimanas transmittendos ad Te curavi libros, quos petieras. Martinus noster, Bibliopola Londinensis, commendavit eos Schültzio Hamburgensi; hic Zunnero Francofurtano. Tu operam dabis, si placet, ut quantocius rescisceam, postquam tum illi libri, tum haec literae ad manus tuas pervenerint; memineris que inscriptionis solitae, nempe etc.

Nil praeterea, nisi ut literae tuae rite curentur vel Amstelodamum, vel Antverpiam; inde enim tuto ad nos transferentur.

Si quid Parisienses de tua Hypothesi et Motus Theoria censuerint, id nobis a Te communicatum iri omnino confidimus.

VI.

Oldenburg an Leibniz.

Ante paucos dies Studioso cuidam Francofurtensi, Hamburgum hinc velificaturo, literas ad Te datas commisi, satis, ut puto, prolixas, quas Tibi rite traditas jam esse dubitare nolim. Continent illae, quid philosophorum nostratium nonnulli de Hypothesi tua sentiant, quidque Ego de eadem in Transactionibus philosophicis commemorandum duxerim. Supersunt nonnulla in literis tuis novissime ad me datis, quibus responsum debeo, quod tamen cum paratum necdum habeam, in aliud tempus differre cogor. Interim dimittere harum gerulum nobilissimum haud potui, quin Te salutarem, simul et fidem facerem, me reliqua, quae de me exspectas, quamprimum fieri id poterit, confecturum. Caeterum cum eximius Helmontius, affectu mihi conjunctissimus, propediem ad nos sit reversurus, poteris, si placet, ipsi tuto committere, quaecunque forsan mihi scribenda vel communicanda occurrerint. In novissimo Nundinarum Francofurtensium Catalogo unus alterve liber juridicus occurrit, quorum tituli singulare quid spondere videntur. Sunt illi quidem, Strykii Tractatus de Jure Sensuum, et Gutherii Tractatus de Jure Manium. Si quidem libros hos lectu dignos judicaveris, ut mihi hac occasione transmittas, rogo, operam daturo, ut quibusdam Autoribus hinc tibi mittendis beneficium rependam. — Vale, et raptim ex itinere festinatione scribenti ignosce etc.

Londini d. 5. August. 1671.

VII.

Oldenburg an Leibniz.

Tardius aliquanto binis tuis novissimis, 10. Junii et 20. ejusdem ad me datis, respondeo, quod rusticari ad tempus, deinde complura negotia, nullam ferentia moram, expedire debuerim.

Gaudeo interim, quae antehac ad Schultzium Hamburgensem in usum tuum transmisi, rite Tibi dudum fuisse reddita. Ex eo tempore, Numero 74. Ephemeridum mearum Philosophicarum, Doctoris Wallisii de Hypothesi tua Physica judicium inserui, quem libellum ab eodem bibliopola Hamburgensi ad Te curatum quoque fuisse plane confido.

Ceterum quod artem illam attinet, quam Amicum tuum callere scribis, Chalybem scil. ex ferro in quantitate cum magno emolumento parandi, scire te velim, Serenissimum Principem Rupertum Palatinum hic Londini artificium illud perquam facili negotio in praxin deduxisse, et quoties lubet deducere. Quaevis enim Instrumenta ferrea, penitus jam confecta, integra etiam tormenta bellica grandia aeque ac parva, etc. novit ille in Chalybem perfectum, multo minori quam secus fit sumptu facili negotio convertere, ad eamque quam libuerit temperiem, citra ullum instrumenti damnum, reducere. Grandamici experimentum a Te recitatum, fidei adeo sublestae habetur a Nostratibus, ut neminem hactenus reperim, qui dignum judicet, cui peragendo tempus impendatur.

Certum est, quod Monconisius de pulvere Kusteriano*), ingentes naves duorum triumve minutorum spatio in fundum agente, commemorat; revera enim id praestitum fuit, imperante Cromwello, qui et in eo erat, ut cum Inventore de certo precio contraheret; morte tamen rei executionem praeoccupante.

Compos fieri non possum libri a te desiderati, cui titulus: Gabriel Plat de thesauris subterraneis. Interim edocuit me vir

---

*) Oder Küfferiano?

Philosophus est in Chymicis versatissimus, qui totam evolvit expenditque, nullam ea in re, quam Tu indigitas, transmutationem intercedere, sed totum negotium in eo consistere, quod aurum ex Antimonio parva quantitate, perinde atque ex Ferro, elici sive extrahi possit.

Experimentum Becheri impressum, de methodo scil. Ferrum ex limo lateritio et lini oleo parandi, in oras nostras pervenit, et jam modo sub examine versatur; cujus eventum suo tempore perscribam.

Vidisti sine dubio, quae Cassinus nuper de Maculis in Sole, Augusto novissimo (observata commentatus est) quaeque de eodem argumento Ephemeridibus meis Philosophicis No. 74. eodem mense evulgatis annotavimus. Non dubium, quin et Tu eas inspexeris; uti easdem et Amstelodami, Hamburgi et Londini observatae fuerunt.

Clarissimus Wallisius tertium et ultimum volumen edidit operis sui de Motu et Mechanice, ubi, inter complura alia, tractat de quinque Potentiis Mechanicis, ad motum facilitandum comparatis; de Vecte scilicet, Axi in Peritrochio, Trochlea, Cochlea, et Cuneo; deque aliis, quae ad has reduci possunt. Inserit nonnulla de Hydrostaticis; de Gravitate et Elatere Aëris, deque Atmosphaerae contrapondio; unde ea derivat effecta, quae Naturae a vacuo abhorrenti philosophorum vulgus attribuit; addita complurium Experimenti Torricelliani phaenomenûm Explicatione, multarumque Quaestionum Mechanicarum solutione etc. Exemplaria ejus quam primum sine dubio Hamburgum transvehentur; unde brevi poterunt Moguntiam curari.

Telescopia et Microscopia Anglica quod attinet, scire Te velim, Artificem hic esse unum alterumve, qui talia elaborent, quae hactenus Nostratium non modo, sed et Advenarum atque Extraneorum applausum meruerint. Arduum nonnihil est quid ea praestent, examussim designare. Dn. Hevelius non ita dudum Telescopium 50 pedum triginta libris sterling; nec non Microscopium eximiae magnitudinis et praestantiae, decem libris sterl. a nobis procuravit; mihique nuper scripsit, utroque sibi abunde satisfactum. Ni fallor, Telescopium 60 pedes longum probe elaboratum, statuit objectum 1000000 es: Et Microscopium, quale supra dixi, tantundem. Specula concava Usteria quod spectat, Artificum nostrorum unus offert, velle se, precio 10 librarum Anglicarum, tale speculum conficere, cujus diameter sit 16 pollicum, quodque ad duorum pedum distantiam, usu efficaciter. Nosti, in Gallia jam quid amplius fuisse praestitum. Forte et nostri homines majora praestarent, si consimili praemio stimularentur. Haec vale, neque virtutis ac doctrinae tuae Cultoribus accense.

Dab. Londini d. 28. Septbr. 1671.

VIII.

Oldenburg an Leibniz *).

Me voicy en votre logis, pour livrer à S. Exc. Mons. de Schoenborn une lettre, et à vous une autre, qui me sont venuës en main auiourdhuy sous mon couvert. Je plains mon malheur de n'avoir pas trouvè S. Excellence au logis, pour luy faire la reverence et pour rendre sa lettre en main propre. Vous me ferez la grace de le faire à ma place avec mes treshumbles baisemains.

Monsieur le Chevalier Moreland, dont vous parla hier Mons. le Chevalier Moray, et qui est l'inventeur d'une machine Arithmetique, m'ayant parlé de la vostre aujourdhuy, a dit, qu'il est prest de vous monstrer la sienne demain sur les onze heures du matin, désirant aussi de voir la vostre, afin de les conferer ensemble. C'est donc Mons., pour vous offrir mon service de vous accompagner sur cete heure là dans le jardin de Whitehal, où il a quelques chambres, et où son dit Instrument est logé, s'il vous plait de prendre la peine m'appeller chez moy, et faire porter vostre machine avec vous. Si non, vous m'obligerez de me le faire savoir demain matin à bonne heure, à fin que je regle mes affaires là dessus et face scavoir à Mons. Moreland, qu' il ne nous attende pas etc.

le 30. Janv. 1673

au soir.

*) Dies und das folgende Schreiben sind 2 Billets, die Oldenburg an Leibniz während seines Aufenthalts in London richtete.

IX.

Oldenburg an Leibniz.

Je vous supplie de vouloir faire mes treshumbles baisemains à S. Exc. Monsieur de Schoenborn, et de m'excuser aupres de luy, de ne pouvoir pas jouir de l'honneur qu'il m'a destinée cejourdhuy, ayant receu ce matin à la Cour des affaires, qui demandent une despesche sans aucun delay, desorte que je n'auray presque pas une minute de temps pour disner chez moy. Je me donneray pourtant l'honneur d'assurer son Exc. devant son depart de mes treshumbles obeissances, et de vous tesmoigner aussi, que je suis sincerement etc.

le 9. Fevr. 1673.

X.

Leibniz an Oldenburg*).

Cum heri apud illustrissimum Boylium incidissem in clarissimum Pellium, Mathematicum insignem, ac de numeris incidisset mentio, commemoravi ego, ductus occasione sermonum, esse mihi methodum, ex quodam differentiarum genere, quas voco Generatrices, colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis vel decrescentis. Differentias autem Generatrices voco: si datae seriei inveniantur differentiae, et differentiae differentiarum, et ipsarum ex differentiis differentiarum differentiae etc.; et series constituatur ex termino primo, et prima differentia, et prima differentia differentiarum, et prima differentia ex differentiis differentiarum etc. ea series erit differentiarum generatricium, ut si series continue crescens vel decrescens sit a . b . c . d, differentiae generatrices erunt $\underset{1}{a}$, $a \underset{2}{\pm} b$. $a \pm b, \underset{3}{\pm}, b \pm c$,
$a \pm b, \pm, b \pm c,, \underset{4}{\pm},, b \pm c, \pm, c \pm d$. (Fig. 4.)

---

*) Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's auf der Königl. Bibliothek zu Berlin.

Aut in numeris; si series sit numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, differentiae generatrices erunt numeri 1. 6. 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur. Talium Seriei usus tum maxime apparet, cum differentiae generatrices sunt finitae, termini autem seriei infiniti, ut in proposito exemplo numerorum cubicorum.

0	0	0				
6	6	6	6			
6	12	18	24	30		
1	7	19	37	61	91	
0	1	8	27	64	125	216

Hoc cum audisset Claris. Pellius, respondit, id jam fuisse in literis relatum a Domino Mouton, Canonico Lugdunensi, ex observatione Nobilissimi Viri Francisci Regnaldi Lugdunensis, dudum in literario orbe celebris, in libro laudati Domini Mouton de Diametris apparentibus Solis et Lunae. Ego, qui ex epistola quadam a Regnaldo ad Monconisium scripta et Diario itinerum Monconisiano inserta, nomen Domini Moutoni et designata ejus duo didiceram; Diametros luminarium apparentes et consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis; ignorabam tamen, librum ipsum prodiisse; quare apud Dominum Oldenburgium Soc. Reg. Secretarium sumtum mutuo tumultuarie percurri, et inveni verissima dixisse Pellium: sed et mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine, alienis meditationibus honorem mihi quaerere voluissem. Et spero appariturum esse, non adeo egenum me meditationum propriarum, ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo; primo si ipsas Schedas meas confusas, in quibus non tantum inventio mea, sed et inveniendi modus occasioque apparet, monstrem: deinde si quaedam momenti maximi Regnaldo Moutonoque indicta addam, quae ab hesterno vespere confinxisse me, non sit verisimile, quaeque non possunt facile expectari a Transcriptore.

Ex Schedis meis occasio inventi haec apparet; quaerebam modum inveniendi differentias omnis generis potestatum, quemadmodum constat differentias quadratorum esse numeros impares; inveneramque regulam generalem ejusmodi: Data potentia gradus dati praecedente invenire sequentem (vel contra), distantiae datae vel radicum datarum; seu invenire potentiarum gradus dati utcunque distantium differentias. Multiplicetur potentia gradus proxime praecedentis radicis majoris per differentiam radicum, et differentia potentiarum gradus proxime praecedentis multiplicetur per radicem minorem, productorum summa erit quaesita differentia potentiarum quarum radices sunt datae. Eandem regulam ita inflexeram, ut sufficeret praeter radices cujuslibet gradus etiamsi non proxime praecedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuscunque licet altioris gradus inveniendas. Et ostendi quod in quadratis observatur, numeros impares esse eorum differentias, id non nisi regulae propositae subsumtionem esse.

His meditationibus defixus, quemadmodum in quadratis differentiae sunt numeri impares, ita quoque quaesivi, quales essent differentiae cuborum; quae cum irregulares viderentur, quaesivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias esse numeros senarios. Haec observatio mihi aliam peperit; videbam enim ex differentiis praecedentibus generari terminos differentiasque sequentes, ac proinde ex primis, quas ideo voco generatrices; ut hoc loco: 0, 1, 6, 6. sequentes omnes. Hoc concluso, restabat invenire, quo additionis multiplicationisve aut horum complicationis genere termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita resolvendo exprimendoque deprehendi, primum terminum 0 componi ex prima differentia generatrice 0 sumta semel seu vice (1)ma, secundum 1 ex prima 0 semel (1) secunda 1 semel (1); tertium 8 ex prima 0 semel (1) secunda 1 bis (2) tertia 6 semel (1), nam 0 (1) + 1 (2) + 6 (1) = 8, quartum 27 ex prima 0 semel (1) secunda 1 ter (3) tertia 6 ter (3) quarta 6 semel (1), nam 0 (1) + 1 (3) + 6 (3) + 6 (1) = 27 etc. idque Analysis mihi universale esse comprobavit.

Haec fuit occasio observationis meae longe alia a Moutoniana, qui cum in tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum Regnaldo incidit; nec vel illi vel Regnaldo adimenda laus, quod et Briggius in Logarithmicis suis jam olim talia quaedam, observante Pellio, ex parte advertit. Mihi hoc superest, ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum transcriptoris nomen; neque enim interest Reipublicae, quis observaverit, interest quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud Moutonium non extat, et caput tamen rei est; quinam sint illi numeri, quorum tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis, termini serierum generentur. Vides enim ex ipso modo, quo tabula ab eo pag. 385 exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum; alioqui enim verisimile est, ita tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia appareret; nisi quis de industria texisse dicat: ita enim habet pars Tabulae.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus tabulae constructione, solam haberi rationem corresponsus numerorum generantium cum numero termini generati, ut cum terminus est quartus (4) producitur ex prima differentia semel 1, secunda ter 3, tertia ter 3, quarta semel 1; ideo in eadem cum (4) linea transversa locantur 1. 3. 3. 1.

Sed vel non observavit vel dissimulavit autor corresponsum numerorum, si a summo deorsum eundo per columnas disponantur hoc modo:

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim statim vera germanaque eorum natura ac generatio apparet; esse scilicet eos numeros quos combinatorios appellare soleo, de quibus multa dixi in dissertatiuncula de Arte Combinatoria quosque alii appellant ordines numericos, alii in specie primam columnam Unitatum; secundam, Numerorum naturalium; tertiam, Triangularium; quartam, Pyramidalium; quintam Triangulo-Triangularium etc. de quibus integer extat tractatus Pascalii sub titulo Trianguli Arithmetici, in quo tamen proprietatem numerorum ejusmodi tam illustrem, tamque naturalem non observatam, sum miratus. Sed est profecto casus quidam in inveniendo, qui non semper maximis ingeniis maxima, sed saepe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum istorum natura et tabulae constructio sive a Regnaldo sive a Moutonio dissimulata, intelligitur. Semper enim terminus datus columnae datae componitur ex termino praecedente columnae tam praecedentis quam datae: atque illud quoque apparet, non opus esse molesto calculo ad Tabulam a Moutonio propositam continuandam, ut ipse postulat, cum hae numerorum series passim jam tradantur calculenturque.

Caeterum Moutonius observatione ista ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipsos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis utendum censebam. Hinc ille nonnisi cum differentiae ultimae evanescunt (aut pene evanescunt) usum regulae invenit; ego detexi innumerabiles casus, regula quadam inobservata comprehendendos, ubi possum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum serierum in infinitum euntium, etsi differentiae earum non evanescant. Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima, ut in numeris singularibus, aut ut in rationibus vel fractionibus; possum enim progressiones addere subtrahereque, imo multiplicare quoque et dividere idque compendiose.

Multa alia circa hos numeros observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo summam inveniendi seriei fractionum in infinitum decrescentium, quarum numerator unitas, nominatores vero numeri isti Triangulares aut Pyramidales aut Triangulo-Triangulares etc.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{35}$$

$$\frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{70}$$

etc. etc. etc.

Londini d. 3. Febr. $16^{72}/_{73}$.

XI.

Illustrissimi Dni *).

Institutum vestrum, quod semper veneratus sum e longinquo, nunc propius admissus coepi etiam admirari: ubi intueri

*) Zuschrift an die Königl. Societät in London.

coram licuit, viros, quorum judicio ac doctrinae tantum Europa defert.

Jecistis certe fundamenta rerum magnarum, quibus inaedificare genus humanum potest. In ista aedificatione alii Architecti sunt, alii materiam subigunt, alii formant; nec illi rejiciuntur, qui obvia sed apta saxa, arrepta aggerunt ad augendam struem. Ea enim est bonitas vestra prudentiaque, ut mediocribus etiam ingeniis uti sciatis velitisque. Id vero eam mihi quam hic videtis audaciam fecit, offerendi operam meam destinatis tam praeclaris, quando ingenium industria ac bona voluntate suppleri potest. Si fas est recipi inter vestros hominem peregrinum, juvenem, nullis operibus vestro nomine dignis clarum, nec nisi conatu se commendantem, jam nunc (quanquam absenti, in necessaria itineris festinatione, signandi potestas futura non sit) nomen dabo.

Homini philosopho veritatisque amanti, nulla propemodum nova obligatione opus est, ut vester sit; ita enim arbitror, id quod generis humani, et quod Societatis Regiae pro generis humani augenda potentia laborantis, interest, idem esse nec aliquid in Vos conferri quod in publicum non redundet.

Hoc animo, hoc consilio, ego me Vobis totum offero. Vos ut visum erit, utemini

Illustrissimi Clarissimique Dni.

Londini, 10/20. Febr. 1673.

devoto Vobis

G. G. L.

XII.

Leibniz an Oldenburg*).

Paris 8. Mart. sty. nov. 1673.

Ubi primum Parisios feliciter appuli, illud inter primas meas curas fuit, ut ad TE literas grati animi indices et commercii exercitrices darem. Ante omnia non dubito, libros quos a TE

*) Nach einer Abschrift des Herrn Professor Guhrauer, die derselbe im British Museum vom Original genommen.

mutuos habebam, recte ad TE perlatas, eos enim itineri discessurus, quando perferendi spatium non superarat, Nobilissimo Schrodero commendavi, adjectis ad TE literis meis, quibus alias ad Illustrem Societatem Regiam incluseram, voti mei, coram TE expositi, et a TE approbati indicatrices. Illud certe tuto meo nomine spondere potes, daturum me operam, ne tantos viros poenitent, hominem quantuluncunque, optime tamen animatum, benigne suscepisse.

Illustriss. Boylio cum salute a me, obsequia et venerationem denunties ero. Ita enim illi pariter Tibique, imo amicis meis omnibus persuasum esse volo, testorque quoties occasio est, Virum esse maximis ab omni memoria hominibus connumerandum, et cui statuas, aliquando debere se agniturum sit humanum genus. Quaeso quae ille promisit mihi, Catalogum commutandorum, fac mature teneam favore Tuo, ac reciproca si a me promitte.

Sane afflixit nos non mediocriter infelix nuntius de Eminentissimi Electoris Moguntini morte, quem Caleti offendimus, in quo Principe certum est non Rempublicam tantum, sed et Philosophiam plurimum perdidisse. Solamur nos tum successore Episcopo Spirensi, principe non sapiente tantum, sed et ad mechanica usque curioso; eidemque familiae illigato, nam frater ejus Schonbornii qui apud Vos nunc fuit, sororem in matrimonio habet; tum quod literae chartaeque omnes, imprimis quae ad rem philosophicam spectare possint, in manu nostra erunt: sed hoc non nisi ad TE scriptum volvatumque *) illu. Boylium.

De caetero ill. Boylium quaeso roga, ut si placet, menstruum Stanni, ut spem facit, mecum communicet. A Te quoque, Domine, prout promisisti, expecto illam (mixturam ex duabus partibus Aquae fortis et una parte spiritus salis communis) formae in metallum impressionem, cujus mentio fit in historia Societatis. Quicquid vicissim imperabis, exequar sedulo.

In Instrumento meo Arithmetico laboratur strenue. Reperi certissimam rationem in exiguum spatium, ac, si placet, baculum includendi, idque sive Elateria sive tantum Rotas adhibeas: neque id ex iis quae jam habebam, difficile erat praestare. Quare pro certo habeo, Clarissimum Hookium se non mixturum inventioni alterius; ejus enim generositatis ac prudentiae

*) So steht in der Abschrift; vielleicht ist zu lesen: volutatumque.

esse arbitror, ut propria potius inventa, quibus abundaret, poliat, quam ab alio jam publice proposita involet. Sane ex relatione ejus quam mihi praesente Clarissimo Hookio fecit, constabat, fundamentum constructionis idem esse cum meo: tantum ab eo compendium promitti. Nec dicere potest, ipsum fundamentum qui sine mora in mentem venisse, cum duo constet (1) nemini, cum unquam de tali re locutum, antequam ego in Angliam cum machina mea venissem (2) machinam meam ab eo diligenter et curiose ex proximo fuisse inspectam. Cum enim eam in R. Societate exponerem, ipse sane proximus fuit, asserculum posticum, quo tegebatur, amovit, omnia, quae dicebam, excepit: ac proinde qua est sagacitate et rerum mechanicarum peritia, dicere non potest, mea a se non percepta. Equidem omnes rotas meas non assequutum distincte, facile concessero: at sufficit in talibus homini ingenioso et mechanico ideam instituti rudem, imo exteriorem operandi modum semel vidisse ut aliquid de suo postea comminiscatur, quod in Rotarum tantum complicatione consistit, quae a variis varie fieri potest. Scimus viros candidos et generosos, si quid deprehenderant, quod ad aliena inventa augenda pertineret, maluisse additamenta sua atque accessiones autoribus concedere, quam in suspicionem incurrere parum jejunae mentis et egeni verae gloriae animi, si falsam quandam inhonesta rapacitate aucuparentur. Ita post inventa a Galilaeo sidera Medicaea Peirescius in periodos eorum observandas summo studio incubuit, et ubi autorem intellexit ad eandem curam animum appulisse longitudinum causa, sua ei omnia ultro lubens concessit, idque justitiae esse ratus est. Ita Gassendus in Selenographiam quondam diligenter incubuerat, multasque jam figuras Telescopio admisso delineatas in aere sculpi curaverat, et ubi intellexit praeoccupatam esse ab Hevelio provinciam, propriusque eum a meta abesse, non destitit tantum, sed et suarum observationum participem fecit. Contra inventoris est, et quoque se obligatum publice profiteri, cujus monitis cogitata sua creverint. Quare breviter cum substantia inventi mea sit aut hausta ex meo, cum quicquid Kookius*) tantundem ego praestiturus sim, clarissimum virum, qua est virtute, rei meae cultum ac politiam mihi relicturum, utrum inventioni alterius; ejus enim generositatis ac prudentiae

*) So in der Abschrift; offenbar derselbe Name, der oben Hookius geschrieben ist.

imo, ut quas habet admonitiones, earum mihi copiam liberaliter facturum, interventu praesertim Tuo, spero; quod si fecerit, publice candorem laudabo; sin minus, rem faciet nec concepta de se opinione, neque natione sua, neque Regia Societate dignam. Caeterum, cum optima quaeque sperem, hoc non nisi TIBI, ac si placet, Ill. Boylio scriptum volui, ut si occasio ferat, a coepto eum deducat, imo communicationem ei persuadeatis. Quare hactenus nemini nisi Boylio TIBIque verbum de re dixi scripsive.

Locutus est mihi Dominus Boylius de quodam praedictore ventorum, qui et menstruas suas praedictiones mittere solebat, sic satis veraces. Interroga quaeso, an novissime miserit, et satisne veras.

A Domino Hookio sciscitare quaeso, quid de Blondelliana circa Trabium aequiresistentium figuram demonstratione sentiat, quando ipsum quoque de ea re meditatum ais. Diarium homunculi Gerickiani continuatur, cum successu. Oblitus sum a Domino Boylio quaerere, quid sentiat de experimento Hugeniano in Diario eruditorum, aliquando relato, de duabus laminis sive Tabulis politis, in vacuo aeque ac in pleno non divulsis, cum tamen meminerim contrarium experimentum a Boylio in novissimis de vi Elastica narratum esse. De Algebra pervelim nosse, an aliquid circa depressiones aequationum insignes viri apud vos, Illustriss. Brunkerus, tum viri item Wallisius, Pellius, Mercator, Gregorius aliique praestiterunt. Parisiis est Dominus Osanna, juvenis in Algebra versatissimus, qui nobis aliquid in eo genere, idem Diophantum promotum dabit, reperta ratione solvendi problemata, quae neque ex Diophanto, neque ex cognita hactenus Algebra poterant solvi. Ecce TIBI.

Quatuor problemata, quae (inquit) palam proposuit, et quorum hactenus nemo dedit solutionem.

(1) Invenire infinita Triangula rectangula diversae speciei in quorum singulis area detracta lateri minori circa rectum, et hypotenusae sigillatim relinquat quadratos.

(2) Invenire infinita Triangula rectangula diversae speciei in quorum, ut paulo ante, substituto latere majore.

(3) Invenire Triangulum rectangulum, in quo differentia quadratorum laterum circa rectum detracta alterutri eorum summae, et differentiae sigillatim relinquat quadratos.

(4) Invenire tres numeros, ut summa eorum quorumlibet sit quadratus et differentia duorum quorumlibet etiam quadratus.

Haec problemata quae difficillima, ac taediosissima, nec nisi post diuturni temporis impensas solubilia videri possent, ab illo tamen nova quadam methodo, paucis lineis, ut vidi, soluta sunt: ipse aliis solvenda considerandaque proponit, optatque de iis sententias intelligere egregiorum apud vos Algebristarum, ut appareat nova an trita sit methodus ejus, solvit autem per speciosas nulla numerorum consideratione.

Caeterum fac, quaeso, sciam, quid Clarissimus Pellius a Mengolo jam praestitum dixerit, cum schedulam ei meam monstravisses. R. P. Pardies dabit dissertationem de linea Logarithmica, ejusque usu in solvendis problematis graduum omnis generis: eam lineam attigit in suis Elementis Geometriae; sed ea linea describi non nisi per puncta, ni fallor, potest, id est Geometrica non est. R. P. Berthet circa motum a Pardiesii libello dissentit, et ut puto, aliquid de ea re edet. Prostat hic scientia Chinensium P. Intorcettae, sed non videtur magna adeo mysteria continere. Nosse distinctius velim quae circa Varinkenii(?) acum magneticam in Hudsonsbay, item Dantisci, mihi narrabas. Hookiani item Catadioptrici statum et successum, inprimis an circa materiam speculi singulare aliquid praestetur, tum ut politura sit puri aequalis aeratae, tum ut materia ab aëris injuriis praeservetur. Plura scribam ubi in civitatem me immersero, hactenus in componendis rebus versor. Potero tunc fortasse scribere nonnihil de iis, quae Dn. Mariottus de iride contra Cartesium, et de coloribus contra Newtonium, item de aquarum proprio pondere pressarum jaculationibus, quarum leges ab iis quae autores de aequilibrio liquorum scripsere plurimum differunt, molitur. Construxit fonticulum, qui ubi salire desiit, emortuus quidem, subito cursus incipit, simplicissimo artificio, et his ipsis quas affert legibus innixo.

De Newtonii sententia scribe quaeso quid vestri sentiant, aegre certe adducentur eruditi, ut ejus sententiam de differente radiorum refrangibilitate admittant. Si Oxonio responsum accepisti, circa Vectium Valentem, cujus copiam sibi fieri Nobiliss. Huetius desiderat, fac ut sciam. Sumtus describendi libens exsolvet, modo favore Tuo sit, qui rem in se suscipiat. Sed video me excedere Epistolae modum, tibi et moderationis, cum tot ac tanta Tibi imponere, a Te postulare audeo; quam vero rectius poenam luam, quam . . . Quare vicissim non patior tantum, sed et rogo, ut quaeras, jubeas, postules quidvis, quod in mea potestate est. Quod si vero proximis literis nihil aliud quam hoc unum mihi responderis, Illustrissimam Societatem precibus meis detulisse, abunde mihi satisfactum putabo. Responsoriis mihi in scriptis operculum tale quaeso circumda, ita inscriptum: à Monsieur Monsieur le Baron de Boinebourg, à Paris chez Monsieur Heis, rue Thibaut aux dez. Quod restat, vale faveque etc.

Auf dem Original hatte Oldenburg eigenhändig bemerkt: Resp. d. 6. Martii $16^{72}/_{73}$, misi impressionem formae in metallo, et responsa de Vectio Valente; promisi me curaturum ipsius admisionem, et significaturum, quod spectat Boylium, Algebram, Ozannae problemata, Pellium, spec. Catadioptricum.

Resp. iterum d. 10. April. et nuntiavi, ipsum 9. April. electum fuisse socium Societ. Regiae, inclusi prolixam epistolam de rebus Algebraicis quam plurimis, ex Collinii scripto in Latinum sermonem versis, ut et scriptum continens summam rerum quae destinantur secundo volumine Algebraico quod Anglice meditatus Kersaeus *).

XIII.

Oldenburg an Leibniz.

Londini die 6. April. 1673.

Promiseram, Vir Amplissime, in literis meis, 6to Martii novissimi ad Te datis, me ampliorem ad tuas responsionem adornaturum, quam primum edoctus forem de iis, quae porro ex me scire desideraveras. Datam itaque fidem liberaturus, hanc priori epistolam succenturiare tibi volui, ut intelligas eo luculentius, nolle me tibi in ulla re deesse, quae quidem a mea proficisci tenuitate poterit. Scias itaque primo, me scriptum illud tuum de In-

*) Offenbar ist dies Letztere ein Auszug aus dem folgenden Briefe, der vom 6. April datirt ist.

terpolationum doctrina, deque tuo cum clariss. Pellio circa id argumentum et Moutonum colloquio, impertiisse Doctiss. nostro Collinio, similiter e Societate Regia, qui in hac est sententia, dictam interpolationum doctrinam multo posse latius extendi, longeque reddi faciliorem, idque binae methodi adminiculo, Aequationem seriei propositae accommodando, quam numerorum figuratorum Tabulas adhibendo. Ut exemplis rem ostendat, duas omnium difficillimas in Moutoni libro series sub examen vocat, dicitque si respectu alterutrius earum sumas numerum terminorum esse radicem, sive t, atque ex Aequatione eruas Homogeneum, inventum iri quemlibet numerum vel numerum intermedium in alterutra harum serierum.

Prior series.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 18 \\ 45 \\ 105 \end{array}\right\}$$

Hujus prioris haec est Aequatio ipsi accommoda.

$$\frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{3}{4}t^3 - 3\frac{5}{12}t^2 + 7\frac{11}{15}t - 2 = N$$

Altera series.

$$\left.\begin{array}{r} N \\ 3 \\ 18 \\ 222 \\ 1317 \\ 4977 \end{array}\right\}$$

Aequatio haec est:

$$4\frac{1}{20}t^5 - 20\frac{1}{4}t^4 + 56\frac{1}{4}t^3 - 101\frac{1}{4}t^2 + 103\frac{2}{10}t - 39 = N$$

Ex. gr. sumo terminum quartum

$$\begin{array}{rcrcrr}
+4 & \times & 103\frac{2}{10} & = & +412,8 & \\
-16 & \times & 101\frac{1}{4} & = & & -1620 \\
+64 & \times & 56\frac{1}{4} & = & +3600 & \\
-256 & \times & 20\frac{1}{4} & = & & -5184 \\
+1024 & \times & 4\frac{1}{20} & = & +4147,2 & -39 \\
\hline
 & & & & +8160 & -6843 \\
 & & & & -6843 & \\
\hline
 & & & & +1317 &
\end{array}$$

Adjicit in quavis Aequatione quinti gradus (quod et extendit ad alios gradus) facile esse, per 4 Multiplicationes e Radicibus excitare Homogenea, ita ut non sit opus, radicis excitare Potestates.

Deinde, quod commemorabas, Methodum tibi suppetere, qua addere possis eas Series Fractionum, quarum Denominatores numeris constant Figuratis; putat idem Collinius, Mengolum in libro suo de Additione Fractionum sive Quadraturae Arithmeticae, Bononiae impresso A. 1658, docuisse nos modum summae harum serierum inveniendae. At quando idem Mengolus pergit ad Progressionem Musicam in Fractionibus, vel quod idem est, ad Reciproca Progressionis Arithmeticae, cum Quadratis et Cubis eorum, fatetur ille, non potuisse se harum serierum summam invenire, ditiorisque ingenii adhibendum in eo postulat. Methodus nostra, ait Collinius, ad harum quoque summam inveniendam se porrigit, atque si illa methodus idem praestat, eas coincidere arbitratur. Ad quod experiundum, utilem hanc quaestionem proponit;

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$

Quidam habet domum fundumve sibi locatum pro censu annuo 100 librarum, spatio 100 annorum: scire cupit praesentem ejus valorem, accisis 6 libris in 100 pro simplici faenore annuo, solutione annuatim facienda.

Valor ille est summa 100 terminorum, hac serie $\frac{10000}{106}$, $\frac{10000}{112}$, $\frac{10000}{118}$, $\frac{10000}{124}$ etc. quod juxta computum nostrum facit 3200 *l.* quam proxime. Quaeritur, quae sit summa cujusvis alterius vel majoris numeri Terminorum in dicta serie?

Si procurare nobis potes eum Mengoli librum, cui titulus, Via Regia ad Scientias Mathematicas, ejusdemque Musicam novissime editam; adhaec Griembergerum de Speculo Ustorio Elliptico, una cum ejusdem Nova Caeli Perspectiva, nec non Pinaci Sectionum Conicarum, et Consectariis Circulorum Contactus et Sectiones angulares concernentibus; rem omnino gratam nobis es praestiturus, quam, re ferente, demereri adnitemur.

Reverendi Patris Pardies institutum quod attinet de Inveniendis Aequationum radicibus, Curvae Logarithmicae beneficio, laudatus Collinius ait, methodum ejusmodi probe inter nos esse cognitam, eamque accommodam non esse nisi Aequationibus duarum potestatum, aequalium numero Resolvendo sive Homogeneo aequationis, quales sunt illae cubicae, quibus suas Cardanus regulas applicat, quae sunt vel saltem reddi possunt generales, obstante nequicquam difficultate ex negativae quantitatis radice orta; id quod omnibus huc usque Authoribus crucem fixit. Atque in hoc genus Aequationibus conficiendis, Tabulae equidem radicum quadraticarum, cubicarum etc. operationes sane tales apprime faciliores redderent.

Dn. Laurentius Gallus, in praefatione ad Specimina sua, methodum pollicebatur, omnes Potestates medias in quibusvis Aequationibus auferendi, proindeque relinquendi nullas nisi Potestatem supremam infimamque Homogeneo aequalem (qua de re doctissimus Freniclius haud dubie edocere harum rerum curiosos poterit). Hoc si fieri semper posset, fateremur profecto, Curvam Logarithmicam inservire omnium Aequationum constructioni posse. Atque si hanc obtinere poteris Notionem ullaeve alias a Dno Osanna, in nupertimis literis tuis a Te celebrato, circa aequationum in sua componentia divisionem etc; supplemento erunt institutis nostris tempestivo, quae in lucem edita doctissimum Authorem debita laude cumulabunt.

Vidimus non ita dudum Perspectivam Heureti, in qua perstringuntur rejiciunturque Dni. Des Argues Conica, Leçons de Tenebres, nuncupata; quorum nonnisi 50 Exemplaria fuisse impressa dicuntur, adeo ut perdifficile sit, vel unum ex tam paucis procurare. Sentit Dn. Collinius, siquidem mens et scopus Authoris probe attendatur, doctrinam illam applausum potius et augmentum mereri, quam vituperium; Consilium quippe ipsius fuisse, Agere de Sectionibus Conicis seu projectis e circulis minoribus, in Sphaerae superficie sitis: In cujus rei Explicationem, Suppone (cum dicto Collinio) Oculum in centro sphaerae, quam tangit Planum zenithi, eumque spectare Planum Segmenti Sphaerae; dictum Planum est Basis Coni, cujus vertex est in Oculo; si quidem supra Horizontem fuerit, eique Parallelus, dictus Circulus, Sectio in Plano tangente erit Circulus; si vero non fuerit Horizonti parallelus, erit Ellipsis; si Horizontem tangat, omnesque ejus partes reliquae fuerint supra Horizontem, erit Parabola; cumque complures ejusmodi circuli elevati tangere in eodem puncto Horizontem possint, Projectiones eorum omnes erunt congruentes Parabolae: At si unus pluresve circuli partim supra Horizontem fuerint, partim infra eum, Projectiones eorum Hyperbolae erunt; atque si eandem habuerint chordam communem in Horizonte, Projectiones eorum erunt congruentes Hyperbolae: si plane fuerint infra Horizontem, projici nullatenus possunt. Supposito, ex diversis Circulis Sectiones Conicas istum in modum projici, si supponatur consimiliter oculum transferri ad Nadir, eosdemque circulos denuo projici, sequetur quod prius fuit per Conicarum harum Sectionum intersectiones determinatum, id inveniri jam posse et determinari per Circulos projectos positos sub-contrarie ad istos in Sphaera circulos qui Conorum visualium Bases constituunt. Adeo ut exinde in eam deducantur considerationem, in quibusnam scilicet casibus Problemata per Sectiones Conicas determinata solvi Geometriae planae beneficio queant?

Sed pergo ad alia. Commemorat alicubi Mersennus de Paschali filio, Eum unica Propositione universalissima, 400 Corollariis armata, totum Apollonium fuisse complexum. Inaudivimus, hunc Tractatum hactenus esse ineditum; insistere autem methodo Des-Argueanae (quam forte ceu viri illius discipulus imbiberat) edoctique fuimus a Bibliopola Parisiensi de Prex, manuscriptum id esse penes fratrem quendam suum (Prexii) in Auvernia. Utinam id protrahi in lucem posset!

Videre est in Scripto hic sociato *), promissa nobis fuisse residua Fermati. Credimus interim, haec ipsa vel saltem nonnulla eorum, nec non Tractatum Dni. Des Argues, ut et Ms. Clarissi. Robervallii de Locis Planis, Solidis, Linearibus, et ad Superficiem, jam esse diuque fuisse in Anglia, penes virum quendam doctum, qui scripta illa hactenus premit, quique Tractatum molitur de Canone Mathematico, sive Tabulis Sinuum, qua ostendatur, quam difficilia Problemata et Aequationes solvi illius beneficio possint. Quoad Cartesianam problematis Pappi solutionem, ait idem, multum operae fuisse impensum ubi parum suffecisset. Atque ut verum fateantur, inquit Collinius, si 5 puncta in sectione conica, aut 4 in Parabola dentur, alia puncta innumerabilia describi possunt angulorum mobilium ope, absque ulla cognitione vel figurae vel ipsius Axium, Focorum, Asymptotorum, Ordinatarum unde supputationes Trigonometricae similiter consequuntur.

*) Enthält die Inhaltsanzeige des 2. Bandes von Kersey Algebra.

Interim si non fiat nobis horum copia aliunde, sperandumne saltem, eos nos inventuros esse in Claudii Milleti de Chales Cursu Mathematico, Lugduni Galliarum sub praelo nunc sudante?

Denique, accepit ab Erasmio Bartolino Picardus Dni. de Beaune tractatum de Angulo solido, ea scilicet lege ut Parisiis imprimendum curaret: Libenter sciremus, num praelo jam commissum sit opus, et quanto temporis spatio proditurum in lucem credatur?

Ob varia complurium Societatis Regiae membrorum negotia publica raro adeo fuerunt a discessu tuo conventus, ut Electio nulla fieri hactenus potuerit. Nec ipse professor Astronomiae Oxoniensis, Dn. Bernhardus, eandem ob causam cooptari potuit. Quam primum numerus debitus convenerit, vos ambo simul, ni fallor admodum, cooptabimini.

Polliceor mihi properam ad binas meas responsionem. Subeat, tuas ad me literas sic inscribi, siquidem per tabellarium expediantur: A Monsieur

Mons. Grubendol

Londres.

Nil praeterea. Vale. Sum Tui studiosissimus H. Oldenburg.

XIV.

Oldenburg an Leibniz.

Voti tui, quod relictis mecum litteris exposueras, compos jam es factus, dum Regia Societas hesterno die, conspirantibus omnium suffragiis, in sodalium suorum Album Te cooptavit, idque eodem tempore, quo Doctissimum Astronomiae in Oxoniensi Universitate Professorem Savilianum, Dn. Edwardum Bernhardum, unanimi similiter consensu elegit. Negotia publica, negotiosa hac rerum facie accumulata, aliquam Electioni huic moram injecere, eo quod complures Societatis nostrae consortes, gravibus occupationibus tum in Aula tum in Regni Comitiis involuti, Conventus nostros philosophicos infrequentiores reliquerunt; unde factum, ut requisitus Electioni numerus ad usque idem hesternum nobis defecerit. Exinde vero rebus tuis ex animi sententia transactis, tuum jam erit, genuinum Te Societatis hujus Philosophicae alumnum praestare, inque medium ea conferre, quae vel Tutemet in Physicis Mechanicisve meditando et experiendo fueris consecutus, vel alii per Germaniam in eadem re philosophica excogitaverint. Germana id fide Te praestiturum nulli dubitamus, ad similia vicissim officia Tibi exhibenda ex animo parati. —

Lubens haec addere iis volui, quae jam uberiori epistola die 6. Aprilis ad te data, conscripseram. Vale, deque litteris hisce bene traditis quantocius Tui studiosissimum Oldenburgium certiorem redde.

Dabam Londini die 10. April. 1673.

XV.

Leibniz an Oldenburg.

Obligatissimus favori tuo rescripsissem dudum, sed promissas a Dn. Huetio literas, in dies expectanti, quas fluxio quaedam oculi ejus incommoda distulerat, tempus elapsum est. Eas nunc ubi primum accepi, statim mitto. Sententiam ejus facile intelliges. Ea viri eruditio est, ut publici, ea humanitas, ut obligantis intersit, eum beneficio ejusmodi obligari. Ea vero promptitudo officiositatis tuae, ut alii ea quidvis sibi polliceantur eruditi. Huetium fortassis non ignoras Delphini studiis adscriptum; scis gubernatorem esse Montauserium Ducem, in quo cum aulica prudentia doctrinae profunditas certat, studiorum ejus rector primarius, Episcopus Condomensis, proximus ab hoc Huetius. Jussu Montauserii, auctore Huetio, coepta res est ad amoeniores literas, fugientemque antiquitatis eruditionem velut revocandum, perutilis. Certis enim hominibus doctis id negotii datum est, ut scriptores veteres latinos, quos classicos vocant, alio quam hactenus more tractent, adjecta quadam velut paraphrasi, ubi opus est, lucida ac brevi, ut facilis juventuti reddatur veterum lectio. Rejectis in notas, quae ad autoris intelligentiam ex historia scientiisve repeti debent. Inter caeteros, Vitruvius quoque et Celsus ea lege tractabuntur. Sed Huetius ipse alia agitat, utilia sane etiam ad scientias severiores, nec vobis ingrata. Nam praeter Vettium Valentem, hactenus ineditum, habet Heronis Spiritalia auctiora multo quam extant; Naumachicam item, non Leonis tantum, sed et Basilii cujusdam patricii: γυμναστικὸς item Philostrati cum scholiis hactenus ineditis, ut alia non memorem.

Celeberrimum Wallisium, cui ego jam bis obligatus sum, rogo, ut a me officiosissime salutes, eique promptitudinem meam denunties, si quid ille exquiri in Gallia, Germaniaque aut alibi etiam cupit, aut si qua alia illi occasio offertur utendi opera mea. Id fortasse libenter intelliges, mox proditurum esse tractatum Cl. Mariotti du Choc des Corps, in quo sententia, quam ille fovit dudum et quam Wallisius in tractatu de motu pulchre expressit, quamque ego, nulla horum conscientia in Hypothesi illa mea attigeram breviter (Reflexionem ab Elaterio esse) multis experimentis elegantibus praeclare admodum confirmatur: unde satis appariturum arbitror, phaenomena Hugenio-Wrenniana ex abstractis motus principiis explicari non posse. Ego supposito itidem Elaterio, modum reperi explicandi mechanica claritate cur lumen in densioribus refringatur ad perpendicularem, in rarioribus a perpendiculari; cum contrarium evenire debere videbatur. Scis explicationem ejus rei visam difficillimam et Cartesianam hypothesin pororum assumtione innixam, vix aliis nisi qui in verba Magistri jurarunt, satis fecisse. Cum ego praesertim tam rationibus, tam experimentis evinci posse putem, perspicuitatem a porositate non pendere. Solutio phaenomeni manifesta est in Hypothesi mea, si tanti putas, tibi mittam. Caeterum rem tibi haud dubie ingratam invitus nuntio, P. Pardies aliquot abhinc diebus obiisse, doleo jacturam viri docti et diligentis, et a quo non pauca utilia poterant expectari. Tria ab eo opuscula sub praelo sunt, sed quae sint, nondum explorata habeo; ubi intellexero, faxo ut scias. Credo, opticam ejus inter caetera fore, quod vellem sane. Scio enim id argumentum ab eo tractatum diligenter.

Memini te quaerere, cum apud vos essem, nossemne quid Dominus de St. Hilaire, circa magnetem novi haberet. Ego nunc ita accepi: Repertam ab eo rationem ope magnetis, in dato baculo ferreo, utrimque inaequali, abscindendi partem ponderis datam, ut sextam, quartam, tertiam; Magnete scilicet determinante punctum sectionis. Magnam id lucem utique philosophiae magneticae afferet.

Clarissimus Mariottus rem quandam perutilem agitat, sine ulla Aereometria, aut virgula Stereometrica determinare, quantum liquoris vas aliquod datum figurae cujuscunque contineat. Ubi experimentis satis multis, ut solet, stabiliverit artem suam, non dubito quin sit juris publici facturus.

Clarissimi Cassini observationes circa systema Saturnicum et maculas solares, haud dubie jam sunt in manibus vestris. Extimus Satelles jam inde ab anno 1671 ab eo observatus, octoginta diebus periodum absolvit, intimus hoc demum anno detectus 5 et dimidio, medius, Hugenianus, diebus sedecim. Accessere observationes macularum solarium quibus illud concluditur, revolutionem solis circa proprium axem absolvi circiter 26 diebus cum dimidio. Sed haec te dudum habere puto.

Hoc interea tuo favore nosse desidero: scis aestate praeterita publicatum illustris Hugenii experimentum de duabus tabulis vel laminis politis, in vacuo sive recipiente exhausto suspensis, ac ne pondere quidem inferiori appenso dissolutis. At ego me legere memini, in experimentorum elasticorum Boylianorum editione novissima, ubi sub finem, nisi fallor, in tabulis politis institutum experimentum recensetur, referri contrarium: Tabulas nimirum exhausto recipiente fuisse dilapsas. Librum hic non reperio ut eam dubitationem mihi eximere possim: quare rogo, ut librum, imo ipsum Ill. Boylium data occasione consulas; id enim nosse, interest philosophiae.

An, ut audio, Cl. vir Isaac Vossius musicos veteres aut musicam veterem aut aliquid simile editurus sit, Tu optime noveris. Audio Oxonii nescio quem Geometras veteres publicaturum. Optem Wilkinsii Characterem latinum prodire quam primum, visum enim est mihi opus utilissimum. Ill. Boylium quaeso data occasione meis verbis saluta, eique cultum a me perennem denuntia; nihil est quod malim, quam continuatam ejus erga me benevolentiam, cujus indicium habebo, si, quod coram pollicitus est, Catalogum commutandorum mihi miserit. Ego eo non aliter utar, nec apud alios quam ipse volet, satis enim in istis mihi cautelae est ac circumspectionis.

Desiderium meum, quod illustri Societati Regiae per literas exposueram, ubi occasio se obtulerit, exitum expectat.

Machina mea Arithmetica, efficiens eum plane factura uti absente me coepta erat, nunc ad finem decurrit, et magno, ut video applausu generatim excipitur. Spero alia, momenti non minoris, mox secutura.

Attuli mecum Barrowii Lectiones Opticas, sub libri calcem doctissimus autor phaenomenon exhibet, cujus rationem reddere posse negat, aliosque ut inquirant hortatur, aut ut, si possint causam sibi communicent, rogat; dubitat vero, an id facile praestari possit. Hugenius tamen et Mariottus ejus solutionem se habere dixere.

Cum hoc scripsissem, expectatissimas a te literas accepi, quibus Illustrem Societatem Regiam desiderio meo locum dedisse nuntias. Regiae Societati gratias rebus ipsis habebo, eique studia mea probare conabor.

Ad cetera literarum tuarum, profundae rei Algebraicae eruditione refertarum, justis literis respondere, et quae jubes, quae postulas, inquirere ac praestare conabor. Subtilissimo Collinio tam praeclara communicanti, obligatum me profiteor. Caeterum quod Mengolum ajunt praestitisse, quod ego promiseram, summam fractionum, quarum nominatores sunt numeri Triangulares et Pyramidales etc. id fortasse ex promisso meo non satis recte percepto profectum est; quanquam enim nondum mihi inquirendi in Mengolum otium fuerit, conjicio tamen ex illis ipsis quae in literis tuis repraesentas, Mengolum summas quidem iniisse serierum ejusmodi, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$ || $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$ || $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{70}$, sed finitarum seu ad aliquem terminum usque quantuscunque tamen ille sit, continuatarum; at ego totius seriei in infinitum continuatae summam invenio Methodo mea $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{21}$ $\frac{1}{28}$ etc. in infinitum, quod jam publice propositum esse, vel ideo non credidi, quia a Nobilissimo Hugenio mihi primum propositum est hoc problema in numeris Triangularibus, ego vero id non in Triangularibus tantum sed in Pyramidalibus etc. et in universum in omnibus ejus generis numeris solvi, ipso Hugenio mirante. Dominum Collinium autem de his infinitarum serierum summis non loqui vel inde conjicio, quia exemplum hujus seriei affert, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, quae si in infinitum continuetur summari non possit, cum summa ista, non ut numerorum Triangularium sit finita, sed infinita. Sed nunc literarum spatio excludor.

Dominus Agar hic de frigore experimenta multiplicia fecit figurasque in variis congelascentibus summa diligentia observavit miras et curiosas, si quid distinctius ab ipso, ut spero, impetravero, te participem reddam. Interea vale ac homini tui studiosissimo fave.

Paris. 15/25 April. 1673.

XVI.

Oldenburg an Leibniz.

Jeudy dernier ie vous envoyay un pacquet assez large, l'addressant selon vostre ordre à vous sous le couvert de Mons. Boineburg chez Mons. Heis. Ayant desia vous adressé une autre lettre de la mesme maniere, sans avoir receu aucune responce là dessus, i'ay voulu par celle-cy vous dire derechef, que vous fustez eleu le 9. de ce mois dans la Soc. royale nemine contradicente; et que ie vous ay respondu sur toutes les particularitez, si ie ne me trompe, que vous m'aviez proposees dans vostre lettre escrite de Paris; y ayant adjousté d'autres choses, que vous ne serez pas mury d'entendre. Je seray bien aise de recevoir promptement vostre responce, etc.

le 14. Avril. 1673.

XVII.

Oldenburg an Leibniz.

Hac ipsa hora gratissimas tuas, d. 16. April. datas, accepi, plurimorum argumentorum, mihi pergratorum, copia refertas. Noli ad singula hac vice responsum exspectare. Plane enim hoc tempore, ut fuse scribam, non vacat, remitto hoc ad alium diem, quo de omnibus rationem Tibi reddere, quantum potero, conabor, simul et Amplissimo Huetio ea qua par est observantia respondere. Duo duntaxat nunc seligo, de quibus amice te moneam. Prius est, ut Epistola, ad ipsam R. Societatem data, gratias ipsi agas pro Electione. Alterum, ut promissi tui, publice in Coetu R. Societatis dati, memor, organum tuum Arithmeticum, quam primum fieri id commode et tuto poterit, ad nos transmittas: qua ratione honori tuo imprimis consules, et majorem invento tuo plausum apud nos conciliabis. Paucula haec in rem tuam, Te raptim volui: de caeteris brevi tempore fusius agam. Vale, et has lineolas Tibi redditas esse quantocius rescribe. Dabam Londini d. 8. Maji 1673.

Jacturam feci notae, quae indicabat locum hospitii tui Parisiis; iterato mihi significare eundem ne graveris, rogo.

XVIII.

Leibniz an Oldenburg *).

Non satis mirari possum literas quas nuper ad te dedi satis grandes semiplagulam (?) qualis haec est presse scriptam, implentes, tibi non fuisse redditas. Scripseram earum partem, ut de Societatis Regiae voluntate denuo sciscitares; interea tuae advenere prolixae et multis rebus memorabilibus, ad Algebram imprimis et Geometriam pertinentibus, graves; quibus nonnihil statim respondi relinquamque partem earum, quas jam ante coeperam, literarum absolvi, easque altero ex quo tuas acceperam die Tabellario publico commisi.

Quod summas attinet fractionum, quarum nominatores sunt numeri triangulares, aliterve figurati, quas a Mengolo initas judicas, ita respondi: Cum Mengoli liber non sit ad manus, videri ex relatione vestra, Mengolum summam tantum iniisse seriei talium fractionum finitae, v. g. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, me vero summam invenire totius seriei infinitae $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ etc. Quod praestitum esse vel ideo non puto, quia Ill. Hugenius eam

*) Nach einer Abschrift, in der Sammlung des Herrn v. Murr.

quaestionem mihi proposuit in nominatoribus tantum triangularibus, a se occasione eorum quae de alea inquisiverat, determinatam. Ego vero solutionem reperi universalem qua summam non tantum infinitarum fractionum triangularium, sed et infinitarum pyramidalium, et triangulo-triangularium etc. ineo; ipso Hugenio mirante. Si tamen idem et Mengolus praestitit, non miror; saepe enim concurrere solent diversi.

Quod vero subtilissimus Collinius (cui salutem a me officiosam nunties rogo) non de summa serierum infinitarum, sed certo terminorum numero constantium loquatur, vel id me credere fecit, quod de summa fractionum hujusmodi $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (cujus termini sunt progressionis harmonicae) loquitur. Certum enim est seriem istam in infinitum productam, non esse (ut aliae plurimae frationum infinitarum series) finitam nec summabilem. At vero hujus seriei in infinitum productae $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ etc. summam nondum fateor reperi; sed et necdum inquirendi satis diligenter otium habui. Theorema aliquod reperi nuper alia quaerendo, satis memorabile, ni fallor; si sint series, quas vides, infinities infinitae, fractionum omnium quadratarum, cubicarum, quadrato-quadraticarum, simul summa omnium aequabitur unitati. Seu si a quantitate data auferas primum quartam partem, deinde nonam, postea decimam sextam: item octavam, 27am, 64am, rursus decimam sextam, 81am, 256tam etc. et ita porro in infinitum, quantitas data praecise exhaurietur.

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \text{etc.} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \text{etc.} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}\right\} = 1.$$

Obtulere se nuper mihi Geometrica nonnulla, quae ubi nonnihil expolivero perscribam. Ad prolixiores tuas sumto tempore ample respondebo, et quae jussisti praestare conabor. Scripseram tibi jam in praecedentibus literis, R. P. Pardies obiisse, magno dolore meo. En tibi quae ab eo expectabamus: La Statique (dont il nous a donné une petite partie seulement) L'Optique, l'Algebre, l'Arithmetique, le comput Ecclesiastique, l'horologe Thaumantique, des Eclypses, la Cosmographie, la Geographie, l'Hydrographie, Recueil de quelques experiences modernes remarquables du mouvement des corps pesants, des Liqueurs, de l'ondulation et libration, de arte militari militiaque Graecorum, Romanorum et hodierna. Claudius Millet de Chales, ejus cursus mathematicus, et tuae quaeque literae meminere, Lugduni prodiit, est ex societate Jesu. Accepi eum post introductionem generalem purae matheseos, elementa mathematice tractata, Terram, Aquam, Aërem, Ignem, nobis exhibiturum; quae sane methodus non videtur contemnenda, cum plerasque artes mechanicas comprehendat.

Est hic vir eruditus, et in experimentis egregie versatus, Mons. Agar, qui circa gemmas, rem vitrariam, colores, frigus, putredinem, multa magno studio annotavit; habet imprimis experimenta notabilia de Sympathia et Antipathia colorum qui scilicet in eadem tabula picta mixti se mutuo destruunt, deprimunt, attollunt: quod magni in artem pictoriam est momenti. Sed quae de variis figuris liquorum, frigore concrescentium, annotavit, plane insignia sunt. Sed vir est paulo modestior, ac lentior in producendis suis. Si placet fac quaeso, honorificam ejus mentionem in iis quas mihi rescribes literis; id eum excitabit fortasse ad colendum vobiscum commercium.

In machina mea arithmetica multa mutare coactus sum, ut (quod antea non poterat) additionem, multiplicationem eundo, subtractionem, divisionem redeundo, exhibere possit. Aliequin enim hoc inest incommodi, ut in catena operationum super eundem numerum aut productum ex eo, subinde mutanda sit machina; quod plurimum temporis perdit; idque mutari hic quoque non a viris tantum doctis, sed et aliis spectatoribus illustribus ad perfectionem machinae, valde est desideratum. Nunc tandem superata est ea difficultas, et machinam mox dabimus absolutam. Alias fusius, nunc ideo tantum scribo, ne aut de diligentia mea aut de literarum tuarum curatione sinistre suspiceris; interea vale faveque etc.

Paris. $\frac{14}{24}$ Maji 1673.

XIX.

Illustri Societati Regiae Britanniae

Gotofredus Guilielmus Leibnizius.

Quas sub discessum ex Anglia meum ad vos dederam literas, eo favore in consessu vestro exceptas, quem homo mei similis non ausit sibi sine temeritate polliceri, ex clarissimo viro Henrico Oldenburgio, Secretario vestro, intellexi, a quo nuntiatum mihi est, conspirantibus suffragiis in sociorum numerum me quoque fuisse cooptatum. Grave fateor munus mihi impositum est, accedere tot lectis viris in quos omnium oculi conversi sunt, quibus nemo gregarius misceri potest, quin nimia dissimilitudine prodatur: quando tamen ex vestra quoque sententia non ingenio tantum, sed ex labore litari potest philosophiae, nec tantum cogitationum subtilitas, sed et industriae specimina quaeruntur, resumo animum neque despero, posse me apud vos gratitudinem quoque meam, ultra verba testari; illud certe spondeo, memoriam beneficii me (non?) depositurum, neque commissurum, ut opera, quam philosophiae frugiferae, aut cultus, quem vobis ejus propagatoribus debemus, ab homine vobis deditissimo desideretur.

Dabam Parisiis 4 Junii 1673.

XX.

Leibniz an Oldenburg*).

Diu est quod nullas a me habuisti literas, sed ejus rei causam aliquando coram recte dicam. Nunc vero non potui quin amicum ad vos euntem, dum aliter nequeam, saltem Epistola comitarer. Ingenium ejus et eruditionem variam, nec vulgarem, primo congressu tute observabis: nisi forte eum nosti illudum; nam si bene memini, nunc tertia vice Angliam videt.

*) Bereits gedruckt.

De me illud habeto. Instrumentum Arithmeticum tandem aliquando post maximas difficultates sumptusque non parvos, feliciter absolutum esse. Effectum qui videre admirati sunt omnes. Dato enim v. g. Numero Multiplicando, Decem Notarum sive Ciphrarum; et alio Multiplicante, Notarum (si ita vis) Quatuor; Productum Multiplicationis, Rotae cujusdam Conversionibus quatuor (nullo animi labore, nulla additione interveniente) haberi posse. Breviter, Numerum Multiplicandum quantumcunque, aeque cito et facile multiplicari posse per Multiplicantem datum, ac Multiplicandum alium quantumcunque *), nemo facile credidisset; Id vero, machina jam perfecta, in exiguo quidem (cum quatuor notas nondum exeat) ostendit tamen.

Exemplum ejus non nisi unicum nunc quidem habeo; idque vix nuper absolutum. Antea enim, quamquam effectum dudum, nonnihil tamen claudicabat. Lassam aliquot opificum patientiam, atque aegre tandem hominem inveni, qui honorem lucro praeferret.

Respirat ille nunc nonnihil, aliisque laboribus vacat, ne caeteris notitiis excidat. Sed promisit opus mox iterum aggredi; pluresque eadem opera elaborare: ex quibus unam ego Illustri Societati Regiae servabo, ejusque ad vos ipse lator ero, ubi primum alia permittent, quae me multis modis distrahunt.

Incumbunt enim mihi labores quidem inter se plane diversi, quos partim Principes a me exigunt, partim Amici. Unde parum temporis restat, quod inquisitioni Naturae, et contemplationibus Mathematicis impendere possim. Suffuror tamen, quantum licet; et saepe animum ad ista propendentem explere, quam commodis meis velificare, malo.

In Geometria quaedam detexi, felicitate sigulari potius quam studio multo. Ex multis tibi unum memorabo Theorema perelegans; nec (quantum sciam) antea notum; saltem non illis quibus locutus sum Geometris, iisque maximis.

Semicirculo A B C in plano C D provoluto, Semicycloeides linea A E D descripta intelligatur. Ex E centro Semicirculi volvi incipientis, recta F B G, basi C D parallela, ducatur; Semicycloeidi occurens in G. Jungantur rectae A B, A G. Ajo

*) So nach der Ausgabe von Wallis; in der Abschrift v. Murr's steht quantuluncunque, offenbar das Richtige.

A G E A segmentum Semicycloeidis, aequari Triangulo A F B, seu semiquadrato a Radio Circuli genitoris. (Fig. 2.)

Hoc primum est segmentum Obliquum, cujus habetur Quadratura: Secundum autem Segmentorum ejus in universum, cognitae mensurae, ne Circuli quidem dimensione supposita. Primum enim quadravit Illust. Hugenius, diversae plane ab hoc naturae, spatium scilicet A I E A, quarta Radii *) parte A I, recta basi parallela I E, et portione Cycloeidis E A comprehensum.

Alia mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli, vel Sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed et Methodos quasdam Analyticas habeo, generales admodum et late fusas, quas majoris facio, quam Theoremata particularia et exquisita.

Illustri Boylio rogo me data occasione commendes. Nollem Virum Eximium, scriptis eorum quos nuperrime ejus Pneumatica Experimenta ad Ratiocinationes aggressos audio, diverti ab illis, quibus multo melius mereri de publico potest, Chymicis experimentis: Quae utinam ne diutius publicis precibus neget. Intactum est hoc doctrinae genus, saltem Philosophis. Primus est Boylius qui non dicam negari desiit, sed demonstrare coepit. A quo si corpus quoddam Chymicum impetrare poteris, obligabis profecto genus humanum. Dici enim non potest, quanti ad omnem vitam momenti sit Chymia. Ego certe saepe pro valetudine Viri vota facio. Nam vereor ne aliquando jacturam irreparabilem faciamus, culpa quorundam obtrectatorum; qui saepe viros, publico bono natos, a suis publicandis absterrent. Vale, ac nominis tui virtutumque Cultori fave.

Dabam, Lutetiae Parisiorum, 15 Julii 1674.

XXI.

Leibniz an Oldenburg **).

Non dubito quin literas a me Dno. Waltero ad vos eunti, datas acceperis; quamquam Dn. Vernon negaverit, ex relatu tuo,

---

*) lege Axis vel Diametri. Bemerkung von Wallis.

**) Bereits gedruckt.

literas a me tibi redditas. Sed hoc ita interpretor, Verumne ante adventum Walteri a vobis discessisse.

Utor commoditate euntis ad vos amici; potius ne non scribam, quam ut scripta digna habeam. Adjicio Tubae Stentoreae Explicationem, a Gallo quodam factam; sed quae vix quicquam satisfacit.

Edetur hic Algebra quaedam, cujus Author, Regulam Cartesii de Aequationibus Quadrato-quadraticis ad Cubicas revocandis, negat esse Universalem: sed quantum ex sermonibus quos ea de re mecum habuit, judicare possum, labitur ipse. Cartesii enim Regula, e Vieta transumpta, a Beaunio et Huddenio etiam demonstratione confirmata est; et mihi ipsi aliquando, alia quaerenti, ea ipsa Regula exiit.

Jacobus Osanna, de quo tibi aliquando locutus sum, et cujus P. Billy in scriptis cum elogio meminit, monstravit mihi nuper Diophantum suum, mox prelo committendum, ad Symbola revocatum. Adjicit passim Quaestiones a Diophanto et Bacheto praetermissas. Sed et librum septimum addet, refertum quaestionibus Paralipomenum.

Is Problema publice proposuerat, jam anno abhinc et altero: Invenire tres numeros, ita ut differentia duorum quorumlibet quadratorum sint Quadrati; et differentia duorum quorumlibet quadratorum ab ipsis sint etiam Quadrati. Ejus Problematis solutionem curaverat edi Petrus Mengolus, credens demonstratam a se ejus impossibilitatem. In quo eum lapsum esse ostendit Osanna, editis mox ipsis Numeris.

Ab eo tempore idem Osanna aliud proposuit Problema, schedula impressa et distributa, quod ita habebat. Mathematicis Problema unicum: Invenire tres numeros, quorum summa, Quadratus; et summa Quadratorum ab ipsis, sit Quadrato-quadratus. Forte cum colloqueremur, dixi ei, non videri haec Problemata tanti, et esse quodammodo in nostra potestate, siquis laborem subire velit. Hoc ille arripiens, provocavit me ad solutionem per amicos, quibus dixerat, me talium facilitatem jactare, nullo specimine edito. Ego ita coactus sum aggredi solutionem, quae successit mirifice. Nam, cum ipsius Osannae ingentes sint numeri; ego exiguos inveni admodum, proposito satisfacientes. Et, quod est amplius, solutionem reperi indefinitam, quam fassus est se non habere. Possum enim efficere, ut summa numerorum sit Quadratus datus; sed et possum efficere, ut summa quadratorum sit Quadrato-quadratus datus.

Haec tanti non putarem, ut Vobis scriberem, nisi inter Mathematicos nostros strepitum fecissent.

Certe alii quidam, bis eris insignes (ut ipsi se appellari amant) Analytici, etiam nunc solutionem ejus Problematis frustra quaerunt.

Diophantum ipsius Osannae, puto fore lectu dignum. Dat enim operam ut Lemmata omnia, ex numerorum natura petita expurget; et ut semper ostendat ipsum inveniendi modum Analyticum. Sed haec quidem vel ideo scriptu digna putavi, quia Diophantum Symbolicum, apud vos quoque edi, editumve esse intelligo. Majoris ad usum vitae momenti est Profectus Geometriae; et imprimis Dimensio Curvilineorum: unde saepe praeclara Problemata Mechanica pendent.

Porro, in ea Geometriae parte, rem memorabilem mihi evenisse nuncio. Scis D. Vicecomitem Brounkerum, et Cl. virum Nic. Mercatorem exhibuisse Infinitam Seriem numerorum rationalium spatio Hyperbolae aequalem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit nemo. Etsi enim Ill. Brounkerus et Wallisius dederint numeros rationales magis magisque appropinquantes, nemo tamen dedit progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatae summa sit exacte aequalis Circulo. Id vero mihi tandem feliciter successit: inveni enim seriem Numerorum valde simplicem, cujus summa exacte aequatur Circumferentiae Circuli, posito Diametrum esse Unitatem. Et habet ea series id quoque peculiare, quod miras quasdam Circuli et Hyperbolae exhibet harmonias. Itaque Tetragonismi Circularis Problema, jam a Geometria traductum est ad Arithmeticam Infinitorum, quod hactenus frustra quaerebatur. Restat ergo tantum, ut Doctrina de Serierum, seu Progressionum numericarum summis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quaesivere, ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire posse spes sit, quod nunc primum a me factum dicere ausim. Ratio Diametri ad Circumferentiam, exacte a me exhiberi potest per Rationem, non quidem Numeri ad Numerum, (id enim foret absolute invenisse); sed per rationem Numeri ad totam quandam Seriem numerorum rationalium valde simplicem et regularem. Eadem methodo, etiam Arcus cujuslibet, cujus Sinus datur, Geometrice exhiberi, per ejusmodi seriem, valor potest; nullo ad integrae Circumferentiae dimensionem recursu. Ut adeo necesse non sit, Arcus rationem ad Circumferentiam nosse.

Quid apud vos agatur, vicissim ubi vacaveris indicabis; inprimis de re Medica et Chymica. Illustrem Boylium, et Clarissimos Viros Wallisium et Hookium, a me quaeso saluta. Et hunc stimula, ut promissam nobis Microscopiorum et Telescopiorum perficiendorum rationem urgeat; quo nihilut ilius praestare potest. Vale, faveque etc.

Paris. 26. Octb. 1671.

XXII.

Oldenburg an Leibniz.

Idem qui tuas antehac rite mihi tradidit, meas hasce Tibi quoque citra omne dubium fideliter reddet. Machinulam tuam Arithmeticam, quam perfecisse Te antehac jam significasti, lubentes equidem lustraremus, si promissi tui, Soc. Regiae in publico congressu facti, memor, occasione commode transmittere eam velles. Gratias interim ago pro Diatriba, Tubae Stentorophonicae explicationem moliente; quae tamen vix magis nostratibus, quam Gallis satisfacit.

Ad ea, quae de Jacobi Osannae consilio memoras, Diophantum suum Symbolicum praelo committendi, scire te velim, Kerseyum nostrum, quicquid difficile in Authore illo occurrit, permultaque alia Problemata gemina, Analytice resoluta, sermone Anglico jam evulgasse, partemque Systematis sui Algebraici Tertiam soli isti argumento pertractando impendisse. Quod vero duplicatam Diophanti aequalitatem spectat (quae novum illud Fermati inventum constituit) eam jam a Jacobo Gregorio Scoto, e Soc. Regia, magnopere provectam esse intelligo. Quod de profectu memoras in Curvilineorum dimensione, bene se habet; sed ignorare te nolim, Curvarum dimetiendarum rationem et methodum a laudato Gregorio, nec non ab Isaaco Newtono, ad curvas quaslibet, tum Mechanicas, tum Geometricas, quin et circulum ipsum, se extendere; ita scilicet ut si in aliqua curva ordinatam dederis, istius methodi beneficio possis lineae curvae longitudinem, figurae aream, ejusdem centrum gravitatis, solidum rotundum, ejusque superficiem, sive erectam, sive inclinatam, solidique rotundi segmenta rotunda, horumque omnium conversa invenire; quin et, dato quolibet arcu in quadrato, Logarithmicum sinum, tangentem vel secantem, non cognito naturali, et conversim, computare.

Quod vero ais, neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatae summa sit exacte aequalis circulo, id vero Tibi tandem feliciter successisse; de eo quidem Tibi gratulor, sed adjungam oportet, quod nuper a viro de rebus his sollicito accepi: Supra dictum nempe Gregorium in eo jam esse, ut scripto probet, exactitudinem illam obtineri non posse. Quod tamen minime a me dictum velim, ut ingenium studiumque tuum sufflaminem, sed pro meo in Te affectu cautum reddam, ut talia scil. probe tecum volvas, revolvasque priusquam praelo divulges.

De caetero, cum scire aveas, quae apud nos agantur, paucis dicam. Doctor quidam Medicus, Danielis Coxi nomine, e Soc. Regia, modum edidit perfacilem, e quibusvis Vegetabilibus spiritus volatiles eliciendi; probavitque porro, nullum sal Alcali seu Fixum in ullo prae-existere subjecto, priusquam actioni ignis expositum id fuerit: Ad haec, evicisse se putat, omnes spiritus volatiles et vinosos, probe depuratos, ab oleisque suis penitus immunes redditos, plane homogeneos esse. Extant haec omnia in nuperis quibusdam Transactionibus philosophicis, quas, una cum caeteris omnibus, in gratiam amici, Dns. Walterus Parisios se transportare mihi affirmavit. Illustris Boylius nova quaedam, ni fallor, mox praelo exitura, composuit, de Latentibus quibusdam Qualitatibus Aëris, nec non de Corporum in Vacuo Boyliano Conservatione, deque Metallorum Accretione: Cui Dissertationem annectit geminam; quarum una suctionis indolem enucleatius explicat, altera Dni. Hobbii problemata de Vacuo sub examen vocat. Quae Dn. Hookius molitur circa novum quendam Quadrantem Astronomicum, insignissimi, ut ipse vult, usus, harum lator, vel etiam ipsum scriptum Authoris, sub praelo nunc sudans, fusius exponet. Omnia haec sermone Anglico, quae tamen brevi, putem, in Latinum vertentur. Vale, et, si vacat ocius rescribe.

Dabam Londini d. 8. Decebr. 1674.

XXIII.

Im Commercium epistolicum Joh. Collinsii aliorumque de Analysi promota findet sich unter Num. XXXV. folgendes Excerpt eines Briefes von Leibniz an Oldenburg, datirt 20. Mai 1675:

Scribis clarissimum Neutonum vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniumque curvarum Superficierum et Solidorum ex revolutione genitorum Dimensiones, et Centrorum Gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quae Methodus si est universalis et commoda, meretur aestimari; nec dubito fore ingeniosissimo Autore dignam. Addis tale quid Gregorio innotuisse.

XXIV *).

Leibniz an Oldenburg.

Distuli scribere de die in diem, quod rem novam, et mox hic quoque publicandam TIBI mittere vellem; idque nunc quoque facio, postquam de successu satis securus sum. Mitto igitur TIBI quam vides descriptionem principii aequalitatis in Horologio a me invento futurae, nihil cum isochronismo vibrationum pendulorum aut elateriorum commune habentis, quo tamen nos hactenus omnes usi sumus. Ipse Hugenius, qui nuper ut nosti elegantem illam oscillantis elateri ad horologia applicationem publicavit, plurimum approbavit meam, ut novam, et pure mechanicam, et a nullo experimento physico aut demonstratione Geometrica pendentem, ut mirum sit artifices in eam non incidisse dudum. Mihi certe jam a quadriennio nota fuit, cujus testes in Germania Galliaque habeo; sed in controversiam vocat nemo. Plerumque ita evenit, ut uno egregio invento publicato, quale

*) Diese Nummer ist offenbar nur das Bruchstück eines Briefes, den Leibniz um diese Zeit an Oldenburg sandte.

Horologii oscillatorii fuit, alterius meditationes velut sidentes et in certa quadam via defixas, habent aliquid imitationis non facile excutiendae: ergo animo hac velut praeoccupatione deposita, ad diversum quoddam inveniendi principium attollitur. Inventum ipsum quale sit, ex descriptione et figura judicabis; et si mereri videbitur Transactionibus tuis inseres. Alii atque alii hic in dies nascuntur, qui Horologia nova illis Hugenianis similia, certe ex eodem principio pendentia, proferunt.

Sed cum ipsa Hugenii methodus sit omnium quas viderim facillima simplicissima, credo non magnam rationem habitum iri tot variationum non difficilium. Sed ex alio item principio confici Reipublicae interest et Scientiarum, ut alterum alteri testimonium praebeat et aliorum inventionum locupletetur. Cum sit praeterea aliquid in meo peculiare, ut scilicet Materia spissa et solida (massiva) et quantumlibet fortis adhiberi liceat, qua ratione fieri potest ut ratio errorum atque impedimentorum ex medii et materiae imperfectione orientium ad vires quantumlibet exigua reddi possit: ut taceam esse qui in dubium revocent Isochronismum vibrationum Elasticarum, mihi tamen persuasum est, Hugenium hoc suae constructionis principium experimentis sufficientibus stabiliisse antequam publicaret et Isochronismum si non perfectum saltem usui suffecturum deprehendisse.

Ad literas tuas venio. Arithmeticam Machinam habebitis, cum mihi ad vos excurrere vacaverit: (neque credo repetita a Te toties promissa mea aliud exigunt) quod, spero, mature futurum est. Quod de quadratura Circuli Arithmetica, per infinitam seriem numerorum rationalium, valde simplicem, a me inventa mones, cavendum esse a Paralogismo, cum Jac. Gregorius vester minetur demonstrare talium impossibilitatem: id a me satis perceptum promissum adeo oriri credo. Gregorius enim non hujus quidem Quadraturae generis, quod Arithmeticum appellare soleo, per series numerorum rationalium infinitas, sed exacti penitus et Geometricae per unum quendam numerum, aut finitam numerorum seriem, sive illi rationales sive irrationales sint, impossibilitatem a se demonstratam putabit; quod meo invento nihil adversatur; tametsi quod Hugenio id mihi quoque etiam ob rationes Hugenio intactas videatur, in Gregoriana demonstratione vitium esse, quamquam alioqui viri ingenium magnifaciam.

Mittam TIBI inventum meum, satis certe memorabile, quod magnitudinem Circuli per seriem numerorum rationalium infinitam mire simplicem expressi: si mihi vicissim duo nostratium inventa Geometrica pollicearis, unum Collinii, de quo aliquando mentionem fecisti, de summis serierum numericarum finitarum, quarum termini sint primanorum, secundanorum, tertianorum etc. reciproci; alterum Gregorii circa methodum appropinquandi ad veram Circuli et Hyperbolae magnitudinem per series convergentes, cujus in Exercitationibus Geometricis exempla dedit. Et vero si Collinianum mihi consensu Clarissimi autoris, cui plurimam salutem a me dicas rogo, miseris quamprimum (nam etiam editum prostat, nisi fallor in libro quodam Anglico) statim transmittam meum et Gregorianum praestolabor, dum TIBI commoditas oblata fuerit obtinendi ab autore; neque enim credo Londini agit. Intellige autem non inventa tantum, sed et demonstrationes mitti debere. Meum exactissime demonstratum, sed et numeris comprobatum habeo, et visum est ita memorabile insignibus quibusdam Geometris, ut inventorum Cyclometricorum hactenus cognitorum apicem appellare non dubitaverint.

XXV.

Oldenburg an Leibniz.

Accepi litteras tuas, quae Machinam tuam novam describunt et Algebraica quaedam rariora indigitant. Prius quod attinet, Nostratium nonnulli augendis rebus mechanicis addictiores, in ea videntur esse sententia, objectionibus a temet ipso formatis, generali ista responsione remedioque a te assignato minus esse satisfactum. Optant interim, Experimento rem totam committi, idque navigatione quadam ad Tropicos et Aequinoctialem instituenda; eamque rationem dubiis quae supersunt omnibus eximendis quam maxime accommodatam esse censent. Ingenium interim tuum, in excogitanda machina tam artificiosa abunde elucere fassi, pro ejus communicatione debitas tibi gratias referunt.

Posterius quod attinet, Dn. Collinius, praemissa salute, quae sequuntur, remittit. Primo; Cl. Gregorius, in postrema sua ad Illustrem Hugenium responsione, seriem suppeditasse, ad semicircumferentiam circuli inveniendam, quae talis est: Pone radium = r, dimidium latus Quadrati inscripti circulo = d, et Differentiam inter radium et illud latus Quadrati = e; Semicircumferentia aequalis est =

$$2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23e^4}{113400d^3} - \frac{263e^5}{7484400d^4} \text{ etc. in infin.}$$

Quae series adeo produci potest, ut a semicircumferentia minus differat, quam illa quantitas assignabilis.

Editum hoc fuit a D. Gregorio, postquam Mercatoris Logarithmotechnia jam extabat; quae quamprimum videbat lucem, ad D. Barrovium a me fuit transmissa; qui observato in ea infinitae seriei usu ad Logarithmos construendos, rescribebat, methodum illam jam aliquamdiu ante excogitatam fuisse a successore suo, Newtono, omnibusque curvis, earumque portionibus, Geometricis aeque ac Mechanicis universim applicatam. Cujus rei specimina quaedam subjecit:

Posita pro radio unitate, datoque x pro sinu, ad inveniendum z Arcum series haec est:

$$z = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1452}x^9 \text{ etc. in infinit.}$$ (Fig. 3.) Et extracta hujus Aequationis radice, methodo symbolica, si dederis z pro arcu, ad inveniendum x sinum, series haec est:

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \text{ etc.}$$ Atque hae series facile continuantur in infinitum. Prioris beneficio ex sinu 30 graduum, Ceulenii numeri facile struuntur.

Consimiliter, si ponas radium R, et B sinum arcus, Zona inter diametrum et chordam illi parallelam est

$$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} \text{ etc.}$$ (Fig. 4.)

Atque eadem series, mutatis signis termini secundi, 4ti et 6ti, inservit assignandae areae Zonae Aequilaterae Hyperbolae;

$$AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} \text{ etc.}$$

Rursum, dato radio R et sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam aream segmenti resecti a chorda, pone b^2 pro 2 R a, et segmentum

$$= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^2}{5b} - \frac{a^3}{14b^3} - \frac{a^4}{36b^5} - \frac{5a^5}{332b^7} - \frac{7a^6}{832b^9} \text{ etc.}$$

Et arcus integer

$$= 2b + \frac{a}{3b} + \frac{3a^2}{20b^3} + \frac{5a^3}{56b^5} + \frac{35a^4}{576b^7} + \frac{63a^5}{1408b^9} \text{ etc.}$$

Duae hae series Dno. Gregorio debentur, quas exhibuit mihi eo tempore quo usus est hac methodo: quod aliquot post annos ab eo factum, postquam scil. intellexerat, Dn. Newtonum generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit series similes, ad Tangentes naturales ex earundem Arcu inveniendum, et conversim. E. g. pone radium = r, arcum = a, et Tangentem t; (Fig. 5) erit

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \text{ etc.}$$

Et conversim, ex Tangente invenire Arcum ejus,

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} \text{ etc.}$$

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, posse eadem methodo aeque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum, absque inventione Naturalis, et conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere, methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet Curvarum, particulatim vero ad lineam Quadratricem, adque inveniendam Aream illius figurae: id quod antehac, nulla demum cunque methodo, fuerat praestitum. Atque ulteriori calculationis labore extendi potest ad inveniendas Areas superficierum in rotundis solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas Soliditates Segmentorum secundorum in solidis rotundis, E. g. Si Conoides aliqua secetur a Plano transeunte per Basin ejus, poterit id vocari Segmentum primum; et si haec portio iterum secetur a Plano erecto ad prius Planum secans, Portio cum in modum secta hoc ipso intenditur ut sit Segmentum.

Porro, applicatur ea methodus inveniendis radicibus purarum potestatum Aequationumque valde affectarum, ita ut ex quolibet numero, absque Logarithmorum ope, quamlibet excitare possis potestatem per saltum, et ex quavis potestate, utut affecta, invenire radicem ejus, vel quodvis Medium, illud inter et unitatem assignatum.

Dn. Gregorius magno labore paravit seriem infinitam, generatim respectivis Potestatibus affectis cujuslibet aequationis propositae adaptandam; ita ut quivis Algebrae cultor, ipsius penu instructus, mox aptare valeat seriem aliquam ad inveniendam quamlibet radicem cujusvis aequationis propositae, postquam ipsi innotuit, ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos eum ad id sollicitaremus, imprimis cum ipse lubens permittat Dn. Newtono, ut ille primus novae hujus Methodi de infinita serie Inventionem orbi Mathematico patefaciat.

Et cum uterque animum hujusmodi doctrinae applicuerint hactenus, nunc eam applicent communi aequationum doctrinae perficiendae. Interim, quibus augmentis alii quoque Algebram locupletaverint, nunc commemorabo.

In ea summus sententia, postquam Cl. Pellius consecutus est limites alicujus Aequationis, in proclivi ipsi esse, Logarithmorum adminiculo directe assequendi Logarithmum cujuslibet radicis oblati (cujusvis Homogenei Comparationis), uti etiam facile eum tunc posse, dictorum limitum ope, Aequationem frangere quam propinquissime, quando aequatio est reapse solida, et Cartesii sensu infrangibilis. Verum nos possumus polliceri, nos praestare id posse magna facilitate in Cubicis et Biquadraticis, idque tum citra opem Limitum, tum Cartesii nullum Cubicum.

Praeterea in aequatione completa, puta 6ti gradus, ubi intra certos limites aequatio habet radices possibiles, nil novi est, si referam ex Laurentio, quemvis terminum (affectum) generatim posse tolli, sed intra certos limites aequatio illa habere potest quatuor tantum radices possibiles, quo casu duo termini tolli possunt. Interdum habere ea potest duas tantum radices possibiles, quo casu quatuor termini medii possunt revelli. Scio Huddenium multa loqui de frangendis, non vero tollendis, terminis mediis; at Laurentium aliquanto nimium esse hac de re promissorem. Spem nobis favet Dn. Malbranchium in libro suo Algebraico, quem sub praelo versari intelleximus, praestitisse quicquid praestari in eo genere potest; dum Pellius rem illam nimium procrastinat. Qui et multa pollicetur circa Aequationes in genere, amplissimi Canonis sui beneficio.

Dictus Dn. Malbranchius non ita dudum Nobilissimo Dno Vaughano *) rescripsit, quomodo superare obstaculum, unum posset in regulis Cardani, ubi trium radicum capax est aequatio Cubica, multo ulterius doctrinam a se propositam expectatum iri. De hoc obstaculo conjecturam meam in medium nunc afferam.

In qualibet aequatione assumere potes Radicem vel Radices, atque eas Homogeneo comparationis excitare. Duc basin OP,

*) Die Richtigkeit dieses Namens kann nicht verbürgt werden; er ist sehr undeutlich geschrieben.

ad eamque erige QON. Pone Homogenea comparationis affirmativa sursum, ab O ad DBN, et negativa deorsum; et super haec Homogenea excita radices DE, BC, NA; tanquam ordinatas; et mutatis omnium potestatum imparium signis, similiter operare circa partem alteram pro radicibus negativis; et supposito, Curvam transire per extremitates radicum sic inventarum, erit ille locus inventionis Aequationis ejusmodi, cujus Homogeneum Comparationis est variabile, sed omnes termini ejus reliqui sunt constantes. Curva hic ducta exhibet locum Aequationis, quae interdum nonnisi unicam habet radicem possibilem; puta quando Homogeneum Compar. majus est quam OD; tres vero, quando minus est; uti vera radix DE, et radices negativae DF, DG. Hujus Curvae limites Dioristici sunt VT, WX, et Basis limites OP, OS. Quando nonnisi unicam radicem habet Aequatio, puta NA, Cardani regulae eam invenient, vel exacte, si Binomia habuerint exactas radices Cubicas; vel si secus, quam propinquissime. At si tres habuerit radices aequatio, ut ante dictum, tum Cardani regulae nullam earum invenient (Fig. 6). In hoc statu negotium hoc reliquere Authores.

Cl. Wallisius illas regulas insigniter correxit, hoc modo: Si ad quamlibet radicem veram, puta DE, erigas Homogeneum comparationis OD, et id ipsum proponas ad radicem pro eo inveniendam, hoc casu ita auxit Cardani regulas Wallisius, ut radicem certo consequaris. At nequit regulas illas applicare Homogeneo Comparationis casu oblato; quamquam illae possint ad Homogeneum quoddam paulo majus vel paulo minus certo applicari.

Hic vero locus est de obstaculo illo verba faciendi. Dico itaque, in Cubicis illis, quae destituuntur termino secundo, Radicum Coefficientem reduci posse ad Unitatem, et Homogeneum Comparationis ad Fractionem communem vel decimalem in casu de quo quaeritur, divisionem scil. instituendo ope seriei continue proportionalium, cujus cum unitas sit terminus primus, radicum Coefficiens est tertius. At casu altero, ubi Cardani regulae locum tinent, novum Homogeneum Comparationis semper erit unitate majus, resque eo reducetur, ut consultis Guldini Tabulis Cuborum et Radicum, mox experiri possis, quaenam radix suo Cubo addita, vel ab eo subtracta, pro signorum aequationis ratione, redditura sit novum Homogeneum Comparationis; atque Radicem hunc in modum acquisita, eam multiplica tantum, quantam eam prius divisores, habebisque Aequationis primo propositae radicem.

Jam vero, illud quod in tergo hoc est: Quando Homogeneum comparationis novum majus est unitate, cubus radicis major est radice ipsa. At si Homogeneum illud fuerit fractio propria vel decimalis, radix excedit cubum. Utrumque sit, in utroque casu inveniri Radix potest, dictarum Tabularum beneficio. Atque hoc probe expenso, argui inde posse videtur, Cardani regulas reddi posse Universales. Et quando nobis suppetent Tabulae impressae radicum Quadraticarum Cubicarumque, quemadmodum nunc instructi sumus Tabulis Quadratorum Cuborumque in numeris, ab 1 ad 10000, illae Cardani regulae terriculamentum ejusmodi futurae non sunt, quale hactenus habitae fuerunt. Speramusque istius modi Tabulas brevi a Dno. Joh. Smith in lucem emissum iri.

Sed de his satis: Ad alia nunc pergamus. Dn. Newtonus et Dn. Gregorius Problema sequens considerarunt, a Dn. Collinio adeo propositum, quod reperisset, Intersectiones Sectionum Conicarum, in Sphaera projectarum, ad calculum revocari posse Trigonometriae Sphaericae beneficio, vel inveniri Constructionem Sphaericarum ope, citra alterutrius figurarum descriptionem, viz. Duabus quibuslibet Geometricis Curvis vel Sectionibus Conicis determinatae speciei ductis in quolibet positione casuali, puta Hyperbolae, cujus axis est B L K, atque Ellipsis, cujus longior Axis est H L G; invenire, quaenam aequatio solvatur ope ordinatarum cadentium a punctis Intersectionis D C F E ad alterutrum Axium, vel quamlibet ex diametris alterutrius datarum figurarum. (Fig. 7.)

Quae adeo generalis est Propositio, ut dubio procul octavum Apollonii librum, nec non magnam partem doctrinae de Locis in utero gerat: de qua posteriore parte nobis fama est, doctum quendam Tractatum ex Gallia oriundum esse, a Cl. scil. Fermato compositum, viz. de Locis planis, solidis, linearibus et ad superficiem. Cujus generis nonnulla habentur in Kinkhusii, Algebrae in Belgio doctoris, libro Geometriae postremo. Ad haec intelleximus, Celeberrimum Robervallium bene ea de re scripsisse, nec pauca illius scripti Apographa circumferri. Praeterquam quod credimus, Doctrinam hanc, et Huddenii annexa Geometriae Cartesianae elucidata, esse a Malbranchio in Opere suo Algebraico, quod avide expectamus.

Dubium non est, Newtonum et Gregorium Problema hoc diudum expendisse. Et quidem factum id esse a Newtono, ex chartis ipsius ad nos missis, eo tendentibus, colligi potest. Supponente scil. constanti Parabola cubica, omnes Aequationes a 5 ad 8 gradum solvi posse, illius et Sectionum Conicarum beneficio; aequationes vero noni gradus, duarum ejusmodi Parabolarum ope; omnes vero aequationes a 10 ad 15tum gradum, Paraboloidis Biquadratici et Sectionum Conicarum adminiculo; aequationes denique 16 graduum, duarum ejusmodi Paraboloidum ope. Et quoad Sectiones Conicas, opus fuerit, eas per puncta describere, cum puncta Intersectionis promte invenientur duorum mobilium angulorum propter applicatorum ope; qua de re audi Autorem ipsum:

Descriptio Sectionis Conicae,

per 5 puncta transeuntis.

In sequenti schemate (Fig. 8) puncta sint A, B, C, D, E. Junge horum tria quaelibet, v. g. A, B, C, ad Triangulum rectilineare ABC constituendum, cujus duobus quibuslibet angulis, puta A et B, duos sectores vel angulos mobiles applica, Polis ipsorum ad puncta angularia, eorundemque cruribus ad latera Trianguli positis, dictosque angulos sic dispone, uti libere circumagantur circa polos suos A et B, citra angulorum, quibus applicantur, variationem. Quo facto, reliquis duobus punctis D et E successive applica duo ipsorum crura PQ et RS, quae prius applicata fuerant ad C, (quae crura distinctionis ergo, vocari possunt crura describentia, uti reliqua duo mn et TV, quae applicabantur ad A, B, crura eorum dirigentia appellari queunt), quas intersectiones suppones esse F, facta ad D applicatione, et G, ea facta ad E. Duc lineam rectam FG, eamque produc sufficienter utrinque. Et tunc si ita moveris Angulos, ut crura ipsorum dirigentia continuo se invicem intersecent ad lineam GF, reliquorum crurum intersectio describet Sectionem illam Conicam, quae per omnia, quae dixi, data puncta transibit.

Si tria ex datis punctis in eadem sint recta linea, impossibile est, ullam Sectionem Conicam transire per omnia posse; eoque casu habebis illius loco duas lineas rectas.

Juxta eundem fere modum describi potest sectio Conica, quae per 4 data puncta transeat, tangatque lineam datam; vel quae transeat per 3 data puncta tangatque duas lineas datas, sive rectae illae fuerint sive curvae etc.

Existimat author, non injucundam fore speculationem Mathematum studiosis, hujus Theorematis demonstrationem invenire, nec non determinare Centra, Diametros, Axes, Vertices et Asymtotos Sectionum Conicarum ita descriptarum, vel describere parabolam per 4 data puncta transeuntem.

Caeterum, degit apud nos Veteranus quidam Algebrae doctor, cui Davenautii nomen, qui multa penes se habet MSS. Algebram spectantia. Is rure ad nos misit hoc Problema solvendum:

Sint A, B, C, D, quatuor continue Proportionalia: Summa quadratorum ex his terminis, data est aequalis N, et summa cuborum ex iisdem, aequalis O. Postulatur, ut invenias quatuor respective Proportionalia. Hujus problematis solutio, ait author, explorabit peritiam, et forte non parum augebit cognitionem solventis: id quod probabilitate non caret, qua, si recte memini, quidam Albertus Gerardus (in libro, cui titulus, Invention nouvelle) methodum habet ex Aequationum Coefficientibus et Homogeneo Comparationis summam dare Quadratorum, Cuborum et Biquadratorum Radicum incogitarum etc.

Quod spectat Additionem Progressionis Musicae, h. e. Arithmeticae Progressionis Reciprocae, scripserat Dn. Collinius Exercitationem de ea re diversimode praestanda, quae periit Amicis communicando. Una ex Methodis illis ab ipso adhibitis haec erat: Numerator semper sit Unitas, et pro medio termino in serie ponatur b; et pro crescente aut decrescente differentia in Denominatore ponatur + vel − c respective, et pro duabus differentiis ponatur 2c, pro tribus differentiis 3c. Tunc quotae unitatis per dicta binomia divisae, simul additae dant seriem inservientem additioni similis numeri Terminorum. Ex Paradigmate sequenti patebit Quotorum respectivorum genius, et in quanam progressione exurgant.

$\frac{1}{b-c} =$	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{c}{bb}$	$+\frac{cc}{b^3}$	$+\frac{c^3}{b^4}$	$+\frac{c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b-2c} =$	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{2c}{bb}$	$+\frac{4cc}{b^3}$	$+\frac{8c^3}{b^4}$	$+\frac{16c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b-3c} =$	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{3c}{bb}$	$+\frac{9cc}{b^3}$	$+\frac{27c^3}{b^4}$	$+\frac{81c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b} =$	$+\frac{1}{b}$				
$\frac{1}{b+c} =$	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{c}{bb}$	$+\frac{cc}{b^3}$	$-\frac{c^3}{b^4}$	$+\frac{c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b+2c} =$	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{2c}{bb}$	$+\frac{4cc}{b^3}$	$-\frac{8c^3}{b^4}$	$+\frac{16c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b+3c} =$	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{3c}{bb}$	$+\frac{9cc}{b^3}$	$-\frac{27c^3}{b^4}$	$+\frac{81c^4}{b^5}$
Summa horum 7 terminorum =	$+\frac{7}{b}$		$+\frac{28cc}{b^3}$		$+\frac{196c^4}{b^5}$

Coefficientes sunt summae duplae Quadratorum et Biquadratorum etc. progressionis Arithmeticae numerorum ab Unitate, possuntque illae excitari pro quolibet numero terminorum ex Aequationibus illi rei accommodatis, quae non difficulter obtinentur.

Verum hic missis, sciscitatus antehac fui, quando Dn. Picartus praelo daturus esset Dni. de Beaune Tractatum de Angulo solido; adjeceramque, Tractatus Dni. Paschalis et Dni. Desargues, penes bibliopolam de Prez adhuc ineditos delitescentes, de demonstranda derivandaque doctrina Conica ex minoribus circulis Sphaerae projectas in plano sphaeram tangente, oculo constituto in centro, eos, inquam, tractatus mereri ut in lucem emittantur, quippe qui sine dubio varias contineant speculationes novas, utilesque, Trigonometriam tum planam tum sphaericam in Doctrinam Cubicam introducendo. Unius solummodo Propositionis mentionem hic injiciam, inquit Collinius, quae sine illa scientifice solvi nequit, viz.

In Ellipsi vel Hyperbola datae cujusdam speciei proponitur, ut ei adaptetur data diameter, citra descriptionem figurae. Quem angulum faciet dicta diameter cum alterutro Axium, et quis est Angulus inter eos contentus, ejusdemque conjugatum.

Ignoscas, vir Clarissime, huic prolixitati, et sinas te rogem, ut per amicum mihi transmittas Elementa Geometriae planae Dni. de Gottignies, impressa Romae in 12. A. 1669 quae sex priores libros Euclidis explicantis. Simili officiorum genere hanc gratiam compensare nitar.

Si visum fuerit Dn. Thevenotii Libellum transmittere, conabor ipsi eum tribuere, quod studere per omnia, sine partium dubio, amplior.

Illustres illi viri, quos salutaveras, plurimum Te resalutant: Dominus Boylius prae ceteris amplissimam sui erga te affectus testificationem edebat. Toti nunc sumus in edendo insignissimo scripto Malpighiano de Anatomia Plantarum, cui succenturiabit tractatum geminum Doctissimus Grewius. Vidisti sine dubio, quae nuper edidit Boylius: brevi visuros, quae nunc edenda de Motuum languidorum effectis etc. Willisius molitur librum de Pulmonibus, eorumque affectibus, qui reliquis jam editis non cedet. Vale. Dabam Londini die 12 Aprilis 1675, et mox, si placet, rescribe.

XXVI.

Leibniz an Oldenburg.

Literas tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi et doctissimo Collinio gratias ago. Cum nunc praeter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare series quas misistis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari. Collinium ipsum magni facio, quoniam omnes puras Matheseos partes ab ipso egregie cultas video. Multa habeo destinata a quibus me deterrent calculi tantum, qui nec suscipi facile ab homine occupato, nec alteri nisi doctissimo ac sincerissimo tuto credi possunt. De modo quo tolli possint plerique termini intermedii ex aequationibus, item de ratione qua aequationes etiam affectae ope Logarithmorum solvi possint, fac quaeso ut Collinius si vacat, mihi scribat distinctius. Ego enim in hoc negotio, item circa ea quae spectant quadraturas vix ac ne vix quidem multa a Juvene illo expecto, qui sub Dn. Malbranchii auspiciis laborat. Huddeniana inventa ab eo in nucleum ac compendium non male contracta iri credo. In Geometria nondum laboravit, sed nec in numeris et Diophanto, calculo aequationum Cartesii methodo et Huddenii incubuit unice. Dicit, se errorem invenisse quendam in methodo qua Cartesius (aut potius Vieta, ab eo enim sumsit Cartesius) aequationes quadrato-quadraticas reducit ad cubicas. Ego vereor ne erret ipse, nam praeterquam quod Beaunius et alii eam demonstrare susceperе, mihi etiam aliquando alia quaerenti haec eadem methodus provenit, atque origo ejus (quae ad multa alia aditum praebere potest) patuit, quae nisi fallor eadem fuit cum Cartesiana nec spero minutias quasdam loquendi captaturum. In problematis seu geometricis sive numericis et multo minus mechanicis, nondum se exercuit. Hortatus sum, quoniam calculi labor ei nullus, ut saltem quintum et sextum gradum nobis absolutum dare velit, quemadmodum Vieta et Scipio Ferreus dedere quartum et tertium, exhibendo scilicet talium aequationum generaliter conceptarum radices irrationales. Ita enim dicerem uno gradu promotam esse hanc Algebrae partem, sed nondum id mihi liquido satis promittere visus est. Itaque duos adhuc tresve menses expectabimus donec prodeat liber. Si author nobis nihil aliud promitteret quam elegans atque utile Algebrae aequationum compendium, non dubitarem promisso satisfacturum. Dn. Osanna, qui in Huddeniana illa, ut sic dicam, Algebrae parte minus versatus est, contra in problematis Geometricis solvendis sic satis est versatus, in numericis autem et Diophanto omnino excellit: ubi non nisi Analytico calculo utitur. Cum contra Freniclius et Dn. Billius crebrius utantur numerorum proprietatibus. Quanquam sint fortasse problemata aliqua quae ex solo analytico calculo vix possint solvi: ex. gr. datum numerum dividere in duos quadratos. Problema est, quod qui analysi subjicere posset, et solvere semper, aut ostendere impossibilitatem, eum ego dicerem novam Algebrae numericae partem aperuisse. Quaeso vestrates ea de re consule; vellem enim nosse, quae eis de eo problemate spes. P. Gottignii Geometrica nondum apud librarios invenio; dabo operam, ut saltem librum reperiam, si forte est apud Jesuitas Claromontanos, ut judicem an mereatur ex Italia peti. De Pascalii reliquiis scripsi tibi dudum, ea esse apud Pererium, ex sorore nepotem, in Claromontana Arverniae subsidiorum curia consiliarium, amicum meum; sed vix nisi fragmenta sunt.

Additio numerorum qui sunt primatiorum etc. reciprocoi Colliniana etsi perutilis, alia est tamen quam expectabam; est enim non nisi per appropinquationes. Ego credebam summam numeri finiti horum terminorum $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ etc. exacte datum. Nam hanc quidem appropinquatoriam ex Mercatore sequi apparet. Sed quando non possumus quae volumus, velimus quae possumus.

De machina mea chronometrica Doctissimi Viri, Hugenius, Cassinus, aliique optime sentiunt. Scribis Vestrates doctissimos viros credere generali illa responsione mea non esse satisfactum difficultatibus a me ipso formatis. Beneficium in me conferes, si quid potissime objiciunt, perscribas distinctius, atque illud interim admoneas, si quas forment difficultates, a libramentorum moderando motui adhibitorum concusione frictioneque, eas ideo concidere, quia in machina ipsa maritimis usibus destinata, nulla erunt ejusmodi libramenta, sed major elateriolorum displodendorum numerus quae nec dentes agent, nec quicquam aliud quam alia liberabunt. Ut minore forma res exhibeatur pro horologiis gestabilibus, complura in machina aliter construenda sunt eodem principio servato. Duo hactenus principia aequalitatis habentur, oscillationes ab ipsa natura factae a Galilaeo et Hugenio observatae et adhibitae, et tensiones atque displosiones alternantes, quibus ego utor.

Aiunt ingeniosissimum Hookium nescio quid novum in hoc genere moliri, quod quale sit docebis, si vacat occasione data. Celeberrimi Thevenotii libella jam olim Diario Eruditorum Gallico inserta est nondum quod sciam Translationibus vestris.

Illustri Boylio, quaeso, ut officiosam a me salutem nunties; ego id unum opto imprimis, ut Philosophiam Chymicam, quod unus potest (quantum ab uno homine expectari licet) perficiat. Qui cum eo in eo genere comparari possit, scio neminem. Quaeso eum aliquando impensius hortare, ac saltem quae ejus super eo negotio consilia sint, scribas distincte atque aperte. Interest enim reipublicae, praeclara adeo experimenta ac destinata non interire.

Ego nuper (nam saepe Geometriam in re Mechanica exerceo) usum mirabilem reperi Logarithmorum in re Mechanica quem ordinate conscriptum etc monstratumque aliquando dabo. Quod superest vale et cultori virtutis tuae fave.

Dabam Paris. 20 Maji 1675.

XXVII.

Oldenburg an Leibniz.

Quamvis nuperrime litteris sat prolixis studia tua interrupi, cohibere me tamen non potui, etiam priusquam responsum a te acciperem, quin Tibi ea significarem, quae ante biduum a Dno. Collinio, me invisente, accepi, cum ea Tibi, gnavissimo Logistices cultori, grata fore existimem. Retulit ille mihi, Londinensem quendam, Michaelem Darium, hominem plebejum, invenisse, beneficio aequationis Quadraticae, radices Cubicas Binomiorum Cardani, quando ea accuratae radicis Cubicae non sunt capacia, proindeque frangere eum omnes aequationes Cubicas et Biquadraticas, adeoque omnia Problemata solida, Geometriae planae beneficio resolveret. Atque hoc ipsum non modo demonstrasse, sed et plurimis Exemplis jam actu illustrasse.

Res ingens, si certa. Certam autem esse, Dictus Collinius vehementer asseveravit*). Quid Tibi ea de re videantur, edocere me ne graveris, quando prioribus meis responsum paras.

Caetera, praelo nostro jam exiere Barrovii Archimedes et Apollonii 4 libri priores, nec non Theodosius, ad eandem scil. methodum reducti, qua Euclides Barrovianus prodiit.

Idem bibliopola, cujus impensis hi Authores typis mandati fuere, paratus est ad imprimendum Pappum, Serenum de Sectione Cylindri, et tres libros posteriores Apollonii, dummodo viri docti laborem suscipere vellent hos Authores ad eandem Methodum Barrovianam reducendi, Barrovio jam ad aliam provinciam . . . . **).

Haec sunt, quae paucis hac vice scire Te volui. Vale et salve etc.

---

*) Leibniz hat darüber bemerkt: nihil erat.

**) Hier ist ein Wort unleserlich.

XXVIII.

Leibniz an Oldenburg *).

Rem mihi scribis miram, invenisse apud vos Michaëlem quendam Parium **), methodum resolvendi problemata solida omnia per Geometriam planam. Equidem fateor nullam mihi notam esse demonstrationem, qua propositi impossibilitas evincatur, imo contra rem reduxi aliquando ad aliquam Aequationem Numericam, quam qui numeris rationalibus generaliter exhibere potuerit, is omnem aequationem solidam planam reddiderit. Eademque opera comperi usum admirabilem Arithmeticae Diophanteae, si quis enim proposito quocunque problemate Diophanteo possit invenire solutionem in numeris, quando id possibile est, poterit etiam eadem opera problemata solida, imo et sursolida, reddere plana, modo id sit possibile. Sed ab eo labore tum calculi me deterruit prolixitas, tum imprimis rem, quam impossibilem verebar inveniendi desperatio. Quam si Parius vester detexit, felicitati ejus atque ingenio gratulor. Doctissimus Collinius, harum rerum judex acer, si de veritate inventi persuasus est, ut scribis, ego vix putem relictum dubitandi locum.

Satisne ab eo tempore quo literas dedisti, discussa sint omnia, fac quaeso ut sciam. Et si per autorem licet, aut regulam ipsam, aut exemplum aliquod illustre, ut cubi duplicationem aut heptagoni regularis descriptionem, ejus methodo absolutam, aut analyticis saltem terminis expressam, mitte, ut incredulitas nostra ipsis rerum documentis convincatur.

Ego rem molior, et satis credo in numerato habeo, qua nescio an ad usum major possit sperari in Algebra, methodum scilicet, per quam omnium Aequationum radices instrumento quodam, sine ullo calculo (post aequationum praeparationem non difficilem) in numeris pro instrumenti magnitudine quantumlibet veritati propinquis, haberi possint. Si Collinius aut Parius in-

---

*) Nach einer Abschrift, die Hr. Prof. Guhrauer im British Museum vom Original genommen.

**) Oldenburg schreibt diesen Namen ganz deutlich so: Dary.

ventum supradictum communicare voluerint, ego meum inventum, nemini hactenus a me monstratum, vicissim ipsis patefaciam.

Clarissimus Perrerius, Pascalis ex sorore nepos, misit mihi ex Arvernia per suos homines illic quaedam fragmenta Pascaliana. Ex quibus nunc penes me habeo elementa Geometrica singulari quadam ratione ab eo tractata, quanquam non integra. Quae ubi reddidero, etiam Conica mihi legenda dabunt. Repertum est inter scripta ejus quoddam dedicationis genus, quo opera sua Geometrica et Numerica Academiae nescio cui Parisinae (id est conventui Geometrarum privato, illo tempore celebri) inscribit, et scripta sua in eo genere absoluta aut affecta memorat, quod credo non illubenter leges, inde enim destinata viri liquidius disces. Mittam descriptum, si Tibi non ingratum fore significabis. Mitterem statim si e vestigio describi posset. Finio per Parium a quo incepi, et rogo, ut quantum licet per autorem, ea de re mihi perscribas. Barrovium Geometrica missa fecisse doleo, nam multa ab eo praeclara adhuc expectabam. Collinium quaeso a me saluta. Perscribe item, si placet, quid sit illud, quod vestrates in machina mea chronometra potissimum desiderant. Hic enim plerique sunt persuasi, rem quousque sperare fas est, produci posse. Quod superest vale faveque.

Paris. 12. Jun. 1675.

XXIX.

Oldenburg an Leibniz.

Ad novissimas tuas, 12 junii mihi scriptas, Dn. Collinius, qui eas legit revolvitque, haec sum salute officiosissima Tibi rescribit.

1. Solutio aequationis cubicae (nisi in casibus quibusdam particularibus larvatisve) sua natura est Problema solidum, nec potest per Geometriam planam confici, quin et, nisi in paucis quibusdam casibus, ne quidem reduci potest ad simplicem cubum: Id quod magis liquebit considerando flexuras duplices,

quae fiunt in Loco dictae aequationis, ut in exemplo sequenti, (Fig. 9.)

$x^3 - 21xx + 120x = N$

Radices	N sive Resolvenda.
1	100
2	164
3	198
4	225
5	200
6	180
7	154
8	128
9	108
10	100
11	110

In annexa hic Curva intellige respectiva N sive Resolvenda posita esse sursum versus ab O ad R radicesque excitari ceu ordinatas ad ipsa, et curvam flexuosam per dictarum ordinatarum summitates transire. Atque hoc repraesentat Locum prioris aequationis.

2. Nihilominus tamen vir quidam doctus e nostratibus asserit, naturam Problematis ejusque Concomitantia suppeditare communiter adminicula ad id resolvendum per aequationem uno gradu inferiorem quam aequatio adhibita suggerit.

3. Haec assertio considerandum nobis praebet, Annon Concomitantia aequationis Cubicae, irrespective ad ullum Problema, similia auxilia sint suggestura? Atque hic jam explicandi locus est, quibus methodis probabilibus res illa vel suscepta fuerit, vel sit suscipienda. Et

Primo quidem Aequatio Cubica simplex vel affecta a Dario nostro considerata fuit ut Biquadratica sine Resolvendo, fractaque in suas componentes, i. e. in duas aequationes Quadraticas, sic ut pro Resolvendo relinquatur illud, quodcunque casus obtulerit. Atque hoc ipsum ille praestitit, nullo respectu habito ad Malleum Cubicum Cartesii, nulloque auxilio inde adscito. Hinc prodire ait methodum inveniendi omnia ejusmodi Resolvenda Biquadratica in numeris integris, quae rationabiliter in duo Quadratica frangantur, nec non talia inveniendi Resolvenda mixta, quae similiter se habeant. Me quod attinet (ait Collinius) necdum examinavi diversas Progressiones respectivas; probabile in termini existimat, si quidem radix vel radices aequationis cubicae non inveniantur absolute captivae factae per hanc methodum, eas tamen arctissimis detineri cippis per aequationes quadraticas, quae majus et minus tam praecise dabunt ac quis postulaverit. Estque haec doctrina insignis usus ad aequationis Locum describendum.

Secundo, quaevis aequatio cubica considerari potest ut relativa ad Biquadraticam, inde derivabilem, cujus limites inveniuntur propositae cubicae radicum adminiculo: Limites vero cujusvis aequationis Biquadraticae inveniuntur a Bartholino, in Tractatu Dioristices, aequationis Quadraticae beneficio; proindeque Huddenii aequatio Cubica evitatur.

Tertio, cum alius quidam vir praeclarus ex eo tempore affirmarit, omnium aequationum Limites (tum basis tum verticis) quae termino 2do carent, inveniri posse per aequationes, duobus minimum gradibus inferiores aequatione proposita; suspicionem id parit, ipsum juxta methodum Dni. de Beaune c. 14. de natura Aequationum, terminum penultimum in locum secundi transferre. Atque tunc sane mutatae hujus aequationis limites inveniri per aequationem Quadraticam possunt. At vero, num acquisiti fuerint limites Biquadraticae aequationis primo propositae, atque hac ratione evitata methodus Huddeniana, considerandum superest.

Quarto, Dni Darius, cum invenisset, unam ex Cardani radicibus Binomialibus radicem esse in aequatione Quadratica, alteram quoque talem esse censuit. At difficultatibus implexum se cernens, inpraesentiarum suspensus haeret. At in Cardani aequatione cubica tri-radicali reperit, sati multa exempla formari posse, in quibus Cardani regulae radicem aliquam recuperabunt; quin imo omnes tres radices ex iisdem regulis recuperabuntur sive invenientur; exiguo duntaxat labore accedente, viz.

Exemplum in hac aequatione $x^3 - 21x = 20$.

Radices cubicae Binomiorum sunt $+2\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$, $+2\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}$; radix $+5 = x$.

Muta signa partis rationalis, ut et partis radicalis, multiplicans eam per 3, et inferioris Quadraticae radices quaesitae sunt $x = -2\frac{1}{2} + \sqrt{+2\frac{1}{4}}$, $x = -2\frac{1}{2} - \sqrt{+2\frac{1}{4}}$.

Adeo ut, si illae Cardani radices excolerentur (ex considerationibus in priori epistola indicatis) similesque aptarentur quibusvis duabus potestatibus aliarum aequationum, insigne id augmentum foret Algebrae, eo quod Tabulae multum de labore minuunt. Quae hic ideo commemorantur, ut vestrates excitentur Algebristae ad eandem rem ex similibus vel etiam melioribus fundamentis expendendam; particulatim vero, ut vel fallacias harum probabilitatum detegant, vel eventum desideratum attingant.

Quinto, subindicatum fuit in literis praegressis, Tabulam Sinuum et Tangentium utilem futuram circa Aequationes; qua de re haec notio succurrit;

Si Polygonum aliquod inscribatur Circulo, et a quibusvis duobus pluribusve punctis in circumferentia, intra cujusvis lateris Polygoni extrema, lineae ducantur ad omnia Polygoni puncta angularia, lineae istae semper radices erunt ejusdem aequationis, Resolvendo duntaxat variante; prout asserit Cl. Wallisius in Tractatu suo de Sectionibus angularibus, typis destinato. Atque ita in aequatione pro Trisectione Anguli, Sinus $^1/_3$ partis Arcus, ad quem pertinebat Resolvendum, unam Tibi radicem suppeditat. Atque ex eadem Tabula Sinuum duae radices negativae sumi possunt, eo quod habitudines arcuum ad se invicem sint cognitae: Simile fieri potest pro aliis aequationibus ad Sinus spectantes. Tale quid cognitum esse asseritur viro cuidam docto nostrati, quoad Tangentes et Secantes. Hinc omnes aequationes, derivativae a primis, Tabularum illarum ope solvuntur; quin et doctrina tradita valde hoc nomine extenditur. Suppone duas Quadraticas generatrices ductas in se invicem; unam earum serva tibi constantem, alterius vero radices gradatim augeantur additione, multiplicatione etc. rursumque aequatio constans atque hae aequationes posteriores invicem multiplicentur; affirmatur ejusmodi Progressionum naturam probe esse cognitam; nec non simile fieri posse de data quavis aequatione Biquadratica, cujus incognitae sint radices; duas nempe ex radicibus illius posse augeri, multiplicari etc. reliquis remanentibus fixis et constantibus; posseque illius adminiculo plurimas aequationes reduci ad Tabulas, quae secus per eas resolvi non poterant. Et forte, si Locus aequationis ita aptetur, ut omnes radices ejus sint in circumferentia circuli, cujus Radius est Resolvendum (qui intelligi potest multas habere revolutiones) conferre id posset ad notionem illam excolendam, aequationes scilicet per Tabulas Sinuum etc. solvendi.

Sexto, Vir quidam eruditus in Anglia scribit, tollere se posse omnes potestates Intermediatas in quavis aequatione arbitraria, at non sine aequationis exaltatione, sine qua impossibile est tollere duos terminos in aequatione arbitraria; ac interdum unus aliquis terminorum non potest semper tolli, ex. g. terminus secundus in Biquadraticis, quando quadratica aequatio, quae conficere id debebat, est impossibilis.

Dn. Newtonus (ut hoc ex occasione literarum suarum addam) beneficio Logarithmorum graduatorum in scalis παραλλήλως locandis ad distantias aequales, vel Circulorum Concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit aequationum radices. Tres Regulae rem conficiunt pro Cubicis; quatuor, pro Biquadraticis. In harum dispositione, respectivae coefficientes omnes jacent in eadem linea recta, a cujus puncto, tam remoto a regula prima, ac graduatae scalae sunt ab invicem, linea recta iis super extenditur, una cum praescriptis consentaneis genio aequationis, qua in regularum una potestas pura datur radicis quaesitae. Lubentes equidem cognosceremus, num Tu, Vir Doctissime, et Newtonus noster in artificium idem incideritis.

Sed tempus monet, ut ad finem properem. Hoc solummodo adjicere fas fuerit, existimare nos operae pretium, ut Tractatus Conicus, derivandus a Projectionibus Sphaerae, concinnetur ex libro Dni. Des Argues, cui titulus, Leçons des Tenebres, nec non ex Reliquiis Pascalianis. Spesque nos fovet, Parisiis id confectum iri. Optamusque insuper, ut Paralipomena Fermati de Locis planis, Solidis, Linearibus et ad Superficiem, de Porismatibus et Contactibus Sphaerarum, nec non Paralipomena Laloverae imprimantur. De Manuscriptis Dni. Robervallii scire avemus, possimusne eorum consequi apographum, soluto pretio transcriptionis. Vale, et prolixitati meae ignosce.

Dab. Londini d. 24. Junii 1675.

XXX.

Leibniz an Oldenburg *).

Literae tuae, multiplici semper fruge refertae, non possunt non esse gratissimae.

Facile crediderim Problema Solidum non posse reddi planum. Id tamen demonstrare, quemadmodum Euclides demonstravit Incommensurabilitates, magni res momenti fuerit; nec video, quod a flexu curvae, aequationi propriae ad eam rem, duci possit.

Ais Parium vestratem observasse, quod unum ex Cardanicis, sit Radix aequationis Quadraticae. Hoc fateor non capio, et rogo explices.

Malleus (quem vocatis) Cubicus, quo aequationes Quadrato-quadraticae resolvantur, non est Cartesii inventum, ac ne Vietae quidem, sed jam repertum seculo superiore. Etiam extractio illa Radicis Cubicae ex Cardanicis fit ut quantitas Imaginaria evanescat, et inveniatur radix rationalis, Aequationis Cubicae regulas Cardani respuentis. Ejus exemplum a Pario datum, in literis tuis novissimis habetur. Superioris tamen seculi inventum est. Nimirum primus omnium Aequationem Quadrato-quadraticam ad Cubicam revocare docuit Ludovicus Ferrariensis. Primus Radices Rationales ex Binomiis Cardanicis, in speciem Imaginariis, extrahere docuit Raphael Bombelli.

Tollere terminos omnes intermedios, ex Aequatione Arbitraria cujuscunque gradus, non video, cur sit difficile. Nam cum sit Arbitraria, potest reddi Divisibilis. Si Divisibilis reddi potest per Aequationem Simplicem aut Quadraticam, reddi potest Pura.

Per Tabulas Sinuum Logarithmicorum explicare Aequationes, res foret utilissima, si modo non sit opus tot Praeparationibus, ut fructus compendii pereat.

*) Dieser Brief ist zuerst in den Werken von Wallis (Tom. III) gedruckt. Derselbe setzt ihn „anno circiter 1674 exeunte, vel ineunte 1675". In der Sammlung v. Murr's findet sich eine Abschrift, nach welcher das Original datirt ist: Paris. 12 Jul. 1675.

Methodum Celeberrimi Neutoni, radices Aequationum inveniendi per Instrumentum, credo differre a mea. Neque enim video in mea quid aut Logarithmi aut Circuli Concentrici conferant. Quoniam tamen rem vobis non ingratam video; conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii sat erit.

Incidi nuper in methodum perelegantem, qua superioribus Aequationibus omnium graduum (ad certam tamen formam reductis) accommodari possunt Radices Cardanicis similes. Idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter terminos intermedios relatio. Id cum novam quandam lucem dare videatur huic negotio, vobis mox communicabo.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium Curvarum dimensiones per Appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvae Ellipseos vel Hyperbolae ex data Circuli aut Hyperbolae quadratura.

Robervallius nunc sua, quae MS. circumferebatur, edit. Fragmentorum Pascalianorum spem mihi facit Doctissimus Pererius, Consiliarius Regius in Arvernica subsidiorum curia, Authoris ex Sorore Nepos. Quidquid ex illis comperero, vobis communicabo.

Scripseras alibi, Clarissimum Wallisium methodum habere, qua Radici datae accommodet Homogeneum Comparationis tale, ut Aequatione Cubica triradicali inde constructa, per ipsas Cardani Regulas correctas, inveniri vicissim possit haec radix. Quaero, an id possit etiam tum cum Aequatio illa non est Plana Palliata, sed reapse Cubica triradicalis; ita tamen ut Radix ejus sit pro arbitrio sumpta. Si methodus illa differat ab ea quam dixi, per quam extrahendo Radicem Cubicam ex singulis Binomiis Cardanicis evanescit quantitas imaginaria: rogo ut eam primis literis communicetis. Ego interim et mea de ulterioribus Aequationibus aliquando extrahendis parabo.

Unum praeterea dicere velim, quanam ratione per Logarithmos explicatis Aequationes, nonnisi simplices atque uno gradu incognitae, affectas.

Desideraveram aliquando ut indicares, de quo potissimum Vestrates circa Chronometrum meum dubitaverint.

XXXI.

Oldenburg an Leibniz.

Scriptum quoddam lingua Belgica concinnatum Belga quidam Georgius Moor vocatus, Algebrae et Mechanices probe peritus, et Parisios nuper profectus apud Collinium nostrum reliquit, cujus Apographum hic insertum Tibi communicare libuit; eam quidem ob causam, quod dictus Moor, Collinio teste, affirmaverit, scriptum hoc bene intellectum Cardani regulas, ubi illae deficiunt, perficere, et ejusmodi Aequationum radices, quae per surdos exprimuntur, quando sc. non mentiuntur quadraticas, supplere. Adjectam ibi quoque reperies illam Wallisii epistolam, quae eam continet methodum, de qua ultimae tuae litterae loquebantur.

Caeterum, quae de Darii nostri observato non capere te ais, ea brevi se elucidaturum, Collinio affirmante, pollicetur. Extractionem illam Radicis Cubicae ex binomiis Cardanicis (qua fit, ut quantitas imaginaria evanescat, inveniaturque radix rationalis Aequationis Cubicae, regulas Cardani respuentis) superioris jam seculi inventam esse; ad haec, Ludovicum Ferrariensem primum omnium revocare docuisse Aequationem quadrato-quadraticam ad Cubicam; Raphaelem Borelli *) insuper primum extrahere docuisse radices rationales ex binomiis Cardanicis in speciem imaginariis; nostrates, quibus scil. ea ostendi, non diffitentur.

Difficile Tibi non videri ais, tollere terminos omnes intermedios ex aequatione arbitraria cujuscunque gradus, idque propterea, quod Arbitraria cum sit, reddi possit divisibilis. Hanc in rem scire te cupit Collinius, per arbitrariam Dnum. Gregorium intelligere aequationem quamcunque, non talem, quam quis ad libitum suum peculiariter elegerit. Praeterea, quoad Aequationes in genere, binam pro solertia sua Gregorius noster methodum nactus est. Earum una omnes radices, dummodo possibiles, exprimit per surdos, Canone scil., qui reperit unam radicem, reliquis omnibus reperiendis, sola signorum quantitatibus illis additorum variatione, inserviente: Altera vero priorem perficit, dum omnia signa radicalia tollit, ad superiores purarum potestatum,

*) Muss offenbar Bombelli heissen.

dimensiones ascendendo. Canonum illorum perquam taediosa erit calculatio: Interim, si quem invenire possimus, qui laborem illum subire et devorare taedium non renuat, communicaturum se Gregorius pollicetur methodum illam demonstratione comitatam.

Quod Aequationum per sinuum et logarithmorum Tabulas explicationem spectat, Pellius noster, ut audio, se id praestiturum pollicitus est. Ut datam fidem liberet, quam maxime optamus.

Quando Methodum tuam absolveris, radices aequationum per instrumentum inveniendi, si eam mihi communicare tunc temporis volueris, rem pergratam praestabis.

Dicis incidisse Te nuper in elegantem methodum, qua superioribus aequationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari radices Cardanicis similes possint, idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter terminos intermedios relatio. Hoc quod attinet, putat Collinius, affine id quodam modo esse Gregorii, et Tschirnhausii (qui nuper Parisios hinc abiit, et Te sine dubio jam salutavit) methodo generali. Utrumque quippe hunc in eandem circa hoc methodum incidisse existimat speratque Collinius.

Scire cupis, an dare Nostrates Geometrice possint dimensionem Curvae Ellipseos aut Hyperbolae ex data Circuli aut Hyperbolae quadratura. Respondet Collinius, illos id praestare non posse Geometrica praecisione; sed dare eos posse ejusmodi approximationes, quae quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt. Et speciatim quod attinet alicujus arcus Circuli rectificationem, impertiri Tibi poterit laudatus Tschirnhausius methodum a Gregorio nostro inventam, quam, cum ille apud nos esset, Collinius ipsi communicavit.

Num Experientia ipsa omnes circa Chronometrum tuum dubitationes solverit, scire pervelim. Hookii nostri Chronometrum a Rege nostro hactenus valde laudatur; nec dubito, quin horologium Hugenii, quod indies ab ipso exspecto, pari sit passu ambulaturum.

Denique, ut pauca adjiciam de iis, quae apud nos nunc agitantur, paucos intra dies videbitis Malpighii de Plantarum Anatome Tractatum curiossissimum pereleganter hic editum, cujus Exemplar ad Justellum meum perferendum Dominico Italo tradidi;

quod ille reliquis meis amicis Parisiensibus pro humanitate sua lubenter ostendet. Illustrissimus Boylius, qui plurimum tibi salutem dicit, suas de Qualitatum sensibilium origine mechanica Diatribas, qua potest diligentia, typis mandari nunc curat. Accedit iis Grevii nostri de Argumento Malpighiano libellus; nec non Evelini nostri de Agricultura dissertatio, in Soc. Regiae consessu publico habita; ut et Willisii Pharmaceutices pars secunda, insignissimis, ni fallor, observationibus et iconismis Anatomicis locupletata. Hisce vale, et me Tuum ex asse crede.

Dab. Londini d. 30. Septembr. 1675.

XXXII.

Oldenburg an Leibniz.

Hae lineolae hoc tantum volunt, ut inquiram, num epistola mea 30. Sept. novissimi ad te data, reddita tibi fuerit, cui et Georgii Mori Belgae scriptum aliquod Algebraicum, et Wallisii nostri epistolam a Te desideratam inserueram. De redditione mearum addubito, cum nihil ex eo tempore litterarum a Te acceperim. Miror quoque, Dn. Tschirnhausium, nobilem Lusatum, quem Tibi commendaveram, adeo penitus silere, ut, num vivos inter an mortuos degat, ignoremus. Si vivit et valet, promissi sui plane est immemor. Vale, Vir clarissime, et me Tui cultorem porro ama.

Dabam Londini d. 20. Decembris 1675.

XXXIII.

Leibniz an Oldenburg*).

Duarum tibi Literarum debitor, rogo ne sequius interpreteris silentium meum. Soleo enim interrumpi nonnunquam, et haec studia per intervalla tractare.

*) Bereits gedruckt.

Quod Tshirnhausium ad nos misisti, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum, et magna promittens Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.

Jam diu est quod petiit, ut tibi scribens rogarem pro ipso veniam silentii: Adderemque, ejus nomine, Diligentiam ipsi in quaerendis Robervallianis, Pascalianis, et Fermatianis, non defuisse; defuisse ex parte Successum.

Elementa Robervalliana a me ipsi impetrata sunt Manuscripta. Legit, sed mihi assentit, qui tanti esse non puto ut debeant excudi. Sed nescio annon Mors Authoris operam sufflaminavit. Jactura certe fuerit non magna. Alia longe utiliora puto exstare ejus Manuscripta, quae ab ipso legata sunt Academiae Scientiarum Regiae. Et Executores ab eo nominati Blondellus, Picartus, Brotius.

Professionem Robervallii Regiam (quae et ipsa ejus morte vacat) obtinuit idem Picartus. Nescio an tibi notum sit institutum. Petrus Ramus hanc fundavit Cathedram; et, pecunia apud Urbanum Magistratum (à la maison de ville) deposita, Testamento cavit, ut dignissimo petentium conferretur; liceretque, velut praemio proposito, certare. Judices constituit Principem Senatus, Advocatum Regium, Praefectum rei Mercatoriae (cujus munus Consulari simile est) et nescio quos alios. Itaque schedis tota urbe affixis publicatum est, proximo mense Martio adjudicatum iri hoc munus merenti. Addidit Ramus, ne diligentia Professoris, semel recepti, frigesceret, quovis triennio cuivis cum eo certandi potestatem fore. Quod institutum mihi non illepidum videtur, ipsumque spectaculum hujus ingeniorum certaminis erit credo non injucundum. Haec de Robervallianis.

Pascalianorum quorundam Manuscriptorum facta mihi spes est.

Frenicli Triangulum Rectangulum Numericum, prelo paratur, cura Mariotti; qui non paucas proprias Observationes adjiciet.

Elementa Mathematica Johannis Prestet (qui apud Malebranchium agit egitve) prodiere tandem, magno satis volumine, in 4to. Intus vero nonnisi Arithmeticam et Algebram reperies. Probo Arithmeticam per literas expositam; id enim poterit Arithmeticis reddere Symbolicam familiariorem. Probo etiam Casus Aequationum Quadrato-quadraticarum particulares, secundum Cartesii Regulam ab eo calculatos. Caetera omnia pervulgata, et eorum quae Vos expectastis, nihil. Praeterea, nullum Problema difficile solutum videbis. At, quod miror, ne exemplum quidem Geometricum ullum allatum. Ita non est quod putes quicquam Vestratibus praereptum. Pellioque, et Neutono, et Gregorio, integra manebunt, quae de Resolutione Aequationum per sinus aut Logarithmos, aut Series numerorum Infinitas, pollicentur, quae aliquando videre valde velim.

Illustrissimo Boylio rogo me commendes, quandocunque occasio dabitur. Virum in tantum aestimo, in quantum Virtus et Doctrina in homine possunt. Legi nuper Diatribam ejus, de Studio Theologico non Contemnendo: Quae me mire affecit, et in illa voluntate confirmavit quae mihi, ut nosti, jamdudum fuit, Scientiam de Mente tractandi per Geometricas Demonstrationes. Multa in hoc genere mira a me sunt observata, quae aliquando, quo par est rigore, exposita dabo.

Cartesianis quibusdam in hoc argumento non acquiesco. Multa inaedificantur Ideis, quae mihi Sophismatis suspecta sunt. Sed et, in Corpore, necessarium aliud quiddam ab Extensione. Quare Discrimen Mentis a Materia nondum patet ex Discrimine Cogitationis et Extensionis. Aliud nobis dedit principium Natura rerum, ex quo patet Perennitas Mentis directa Demonstratione. Quaecunque a Scholasticis, a Valeriano Magno, a Cartesio, aliisque ex Entis illius notione ducuntur, cujus Essentia est Existere; ea tamdiu vacillant, quamdiu non constat an Tale Ens possibile sit, si intellegi possit. Pronunciare talia, facile est; intelligere, non aeque. Posito, tale Ens esse possibile, sive aliquam esse Ideam respondentem his Vocabulis, utique sequitur, Existere tale Ens. Multa videmur nobis Cogitare (confuse scilicet) quae tamen implicant. Exempli gratia, Numerus omnium numerorum. Valde suspectum esse debet nobis Notio Infiniti, et Minimi, et Maximi, et Perfectissimi, et ipsius Omnitatis. Neque fidendum his notionibus antequam ad illud Criterion exigantur, quod mihi agnoscere videor, et quod velut Mechanica ratione fixam et visibilem et (ut ita dicam) irresistibilem reddit veritatem. Quale nobis inexplicabili beneficio tributum est a Natura.

Haec Algebra, quam tanti facimus merito, generalis illius artificii non nisi pars est. Id tamen praestat, Errare ne possumus quidem si velimus. Et, ut Veritas quasi picta, velut Machinae ope in charta expressa, deprehendatur. Ego vero agnosco, quidquid in genere probet Algebra, non nisi superioris scientiae beneficium esse; quam nunc Combinatoriam Characteristicam appellare soleo: longe diversam ab illa, quae, auditis his vocabulis, statim alicui in mentem venire posset. Hujus mirabilem vim ac potestatem, praeceptis aliquando et speciminibus me explicaturum spero, si sanitas atque otium fuerit. Non possum, paucis verbis, rei naturam complecti. Illud tamen dicere ausim, Nihil facile ad humanae mentis perfectionem efficacius concipi posse, ac, recepta hac philosophandi ratione, fore tempus, et mox fore, quo de Deo ac Mente non minus certa, quam de Figuris Numerisque habeamus, et quo, Machinarum Inventio non difficilior, quam Constructio Problematum Geometricorum: Exhaustisque his studiis (nisi quod semper Infinitorum Theorematum elegantissimae supererunt harmoniae, indies observandae tunc magis quam eruendae) ad solam Homines redibunt naturae indagationem; quae nunquam in potestate futura est. Nam, in Experimentis, Ingenii et Industriae Fortuna miscetur.

Boyliano itaque more semper philosophabuntur homines, nostrum aliquando ad finem perducent; nisi quatenus ipsa quoque Natura rerum, in quantum cognita est, calculis subjici potest, et novis detectis et ad Mechanismum redactis qualitatibus, novam applicandi materiam Geometris dabit. Sed impetus scribendi effert me longius quam constitueram; facitque ut non satis cohaerentia dicam.

Superest ut ad tuarum literarum Algebraica respondeam. Plurimum tibi debeo, doctissimoque Collinio, quod communicare mihi voluistis non pauca, nec contemnenda; qualia Epistola Wallisii continet, et quae ei adjunxistis.

Sed, (ut tibi dicam quod res est) in illa (nescio cujus) de Regulis Cardani Diatriba, non invenio, quin Regulam Cardani ille longe alias quam nos sumit. Cartesius aliique, per Regulam Cardani, intelligunt, Methodum qua ille expressit quasdam Radices Cubicas per Irrationales. Author Diatribae intelligit per Regulam, Methodum qua ille ex illis Binomiis Irrationalibus, denique Rationales Radices extrahit.

Id vero Cardanus facit quibusdam tentamentis adhibitis, qualia plurima dari possunt, et mihi quoque non ignota sunt. Ergo nec Author Diatribae aliud quam ejusmodi determinationes loquitur quibus Radices facilius determinantur. Ego vero has determinationes non curo, quoniam Schotenius (vel quisquis est

Author Regulae circa Binomia a Schotenio adjectae) regulam dedit perfectam, et nulli tentamento obnoxiam, in numeris extrahendis. Binomiorum Cubicorum Radices tunc absunt imaginariae. Sed cum adhuc adsunt Imaginariae (ut $\sqrt{-1}$), cessat Regula Schoteniana, ut facile per ejus rationem instituti patebit. Fateor eas Regulas quae per Tentamenta et Determinationes procedunt, facile posse extendi ad Imaginarias continentia. Sed qui Regulam tentamentis carentem, qualis Schotenii est, etiam imaginariis commune dederit, mihi notus non est. Eam vero jamdudum est quod mihi videor recepisse, quam aliquando distincte expositam vobis communicabo. Adjiciamque alia, ut opinor, curiosa, de Imaginariis in speciem tractandis et dignoscendis, Geometrice pariter Analyticeque. Mittam et viam meam perveniendi ad Radices Irrationales altiorum graduum, cujus perelegans habeo specimen. Sed, quominus perficiam, deterret calculus; praesertim cum alii in ea re feliciter laborent: Sufficiat, aditum aperuisse.

Habebis et a me Instrumentum Aequationes omnes Geometrice construendi unicum; Et meam Quadraturam Circuli ejusque partium, per seriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties scripsi, et quam jam plusquam Biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Sed et ad aliud Problema Geometricum, hacterius pene desperatum, nuper aditum reperi felicem. De quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi.

Haec vero omnia ubi ita in ordinem redegero ut mitti possint, singulatim tibi spondeo. Ex quibus agnoscetis, credo, non tantum soluta a me Problemata, sed et nova methodo (hoc enim ego unice aestimo) detecta esse.

Nunc vero in [illegible] iter instituo aliquot septimanarum. Nam, ante exitum Januarii, rursus Parisiis ero. Quare non est ut rescribas, donec per secundas literas reditus te mei admonuero. Vale, et fave etc.

Paris. 28 Decemb. 1675.

XXXIV.

Folgendes Bruchstück eines Briefes von Leibniz an Oldenburg, datirt: Parisiis 12. Maii 1676, findet sich im Commercium epistolicum etc. unter Num. XLIV.

Cum Georgius Mohr Danus, in Geometria et Analysi versatissimus, nobis attulerit communicatam sibi a doctissimo Collinsio vestro expressionem Relationis inter Arcum et Sinum per infinitas Series sequentes:

Posito Sinu = x, Arcu = z, Radio = 1,

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ etc.}$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \text{ etc.}$$

Haec, inquam, cum nobis attulerit ille, quae mihi valde ingeniosa videntur, et posterior imprimis Series elegantiam quandam singularem habeat, ideo rem gratam feceris, Vir Clarissime, si Demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam nunc polio. Oro ut clarissimo Collinsio multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

XXXV.

Oldenburg an Leibniz.

Impense laetabar, amice plurimum colende, conspecta de novo docta tua quam diu subduxeras manu, maturiusque responsum parassem, ni id ab amicis, Newtono imprimis et Collinio (qui nec ipsi semper sui juris sunt) parte longe maxima dependisset. Dum prioris meditationes parantur, en tibi varia et accumulata Collinii nostri communicata, menti ad tempus satis forsan distinendae accommoda, donec scilicet alia a Dno. Newtono succenturientur.

Principia igitur ait Collinius: Quod attinet primam illam Seriem, cujus coefficientes sunt $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, illi hoc modo formantur, nempe:

$\frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$, et $\frac{1}{6} \frac{\times 3 \times 3}{\times 4 \times 5} = \frac{3}{40}$, et $\frac{3}{40} \frac{\times 5 \times 5}{\times 6 \times 7} = \frac{5}{112}$

et $\frac{5}{112} \frac{\times 7 \times 7}{\times 8 \times 9} = \frac{35}{1152}$, et $\frac{35}{1152} \frac{\times 9 \times 9}{\times 10 \times 11} = \frac{63}{2816}$, et sic in infinitum: unde intelligere est, Seriem illam elegantia sua inferiorem non esse conversa; quam tu potius commendas. Tuas de eodem argumento contemplationes, quas ab istis longe diversas innuis, pergratas nobis fore credideris, optantibus equidem, ut eae fidem nostram superent quoad methodi hujus praestantiam, quae tam late patet ut averruncare omnes difficultates videatur; adeo ut Collinius perceperit, Dn. Gregorium sensisse, quaecunque ante eam fuissent cognita, haud aliter se habere ac aurorám meridianae luci comparatam; quamvis Dn. Gregorius alia fuerit egregia methodo instructus pro circulo, priusquam haec ipsi perspecta erat, quam hic impertiri libet. In litteris igitur ipsius 15. Feb. 1669 datis, ita scribit: Approximationes meae ad perimetros p. 8. et 5. Exercitat. Geometricarum, Londini impressarum, nonnihil illustrantur nupera mea ad Dn. Hugenium responsione. Ut ut sit, in tui gratiam eas alia methodo explico; nempe:

Sit arcus quilibet Semicirculo minor HKL, cujus chorda HL, ducatur recta HA, tangens arcum in puncto H, sitque angulus ALH rectus; deinde recta HG dividat arcum HKL bifariam in K, sitque angulus HGF rectus, et ita de caeteris in infinitum: arcus HKL erit major quam HL, et minor quam HB, item major quam HF, et minor quam HC, item major quam HE et minor quam HD etc. (Fig. 10.) in infinitum

erit quoque arcus minor quam $\left\{ \frac{96\,HG - 22\,HL + HA}{75} \right.$

item minor quam $\frac{16\,HG - 3\,HL + 2\,HB}{15}$

Et major quam $\frac{320\,HG + 52\,HB - 56\,AL - AB}{345}$

Et major quam $\frac{64\,HF - 20\,HG + HL}{45}$

Et major quam $\frac{4096\,HE - 1344\,HF + 84\,HG - HL}{2835}$

Et major quam 1048576 HN — 349160 HE + 22848 HF — 340 HG + HL.

Non credimus, meliorem circuli quadraturam linearem, quam haec est, unquam datum iri. Et quod nos induxit ad eam vobis impertiendam, potissimum hoc est, quod Dominus Gregorius similem Methodum ad alias curvas rectificandas applicavit.

Impertiar tibi hac occasione Solutionem Problematis Kepleriani de Dividendo Semicirculo in ratione data per rectam pertranseuntem punctum in diametro datum, hoc pacto.

Sit semicirculus AHC *), cujus centrum B, dividendus e puncto D in ratione p ad q. Sint BD, BC, BE continue proportionales; Sitque BD ad BC, sicut Semiperipheria AHC ad m. Fiat $\frac{pm}{p+q} = a$, $AB = r$, $AE = b$,

et Sumatur $AF = \frac{ra^2}{2b^2} + \frac{r^2a^4}{6b^5} - \frac{ra^4}{24b^4} + \frac{ra^6}{720b^6} - \frac{13r^2a^6}{360b^7}$
$+ \frac{7r^3a^6}{72b^8} + \frac{19r^4a^8}{630b^{11}} + \frac{173r^3a^8}{107520b^9} - \frac{199r^3a^8}{13440b^{10}} - \frac{113ra^8}{1290240b^8} +$ etc.

Denique ex F erigatur, Diametro AC, perpendicularis FG, peripheriae occurrens in G, et ducatur recta DG; dico GDA : GHCD :: p : q. Hujus seriei prolixitas provenit duntaxat a puncto D indefinite sumpto; nam posita recta BD determinata, viz. $\frac{1}{3}$ 3 **) = DB, Series haec evanescit in simplicissimam, erit namque

$$AF = \frac{a^2}{200r} - \frac{a^4}{3000000r^3} - \frac{a^6}{600000000r^5} - \frac{799a^8}{1792000000000000r^7}.$$

Dn. Gregorius supponit, Seriem hanc in omnibus usibus Astronomicis qualibet Sinuum tabula exactiorem: verum tamen, puncto D cadente prope C, et ratione p ad q existente majoris inaequalitatis, Series quae sequitur, fuerit, ipso Judice, expeditior:

Reliquis manentibus ut supra,
$m^2 + r - a = e$, et $BE = d$

Erit $BF = \frac{re}{d} - \frac{r^2e^2}{2d^3} + \frac{r^3e^3}{2d^5} - \frac{re^3}{6d^3} + \frac{7r^2e^4}{24d^5} - \frac{5r^4e^4}{8d^7} + \frac{7r^5e^5}{8d^9}$
$- \frac{r^3e^5}{2d^7} + \frac{re^5}{120d^5} +$ etc.

---

*) Die hierher gehörige Figur fehlt im Manuscript. Sie kann leicht ergänzt werden.

**) Soll vielleicht heissen: $\frac{1}{3}$ r.

Si contingit e notari cum —, tum et BF eandem notam habebit; inque eo casu F capitur inter B et C. Infinitae hae series eodem gaudent successu in aequationum radicibus, quem sortiuntur in aliis problematibus; nisi quod, cum in aequationibus multae sunt quantitates indeterminatae, earum Series grave pariunt taedium. At vero, quando determinatae illae sunt, series perquam sunt simplices.

Hactenus Gregorius: cui subnectam, pro alia instantia seriem accommodatam inveniendae naturali tangenti ex arcu dato

Sit radius $= r$
Arcus $= a$
tangens $= t$

$$\text{Tunc } t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{3233a^9}{181440r^8} \text{ etc.}$$

Et ad inveniendam tangentem logarithmicam non cognita Naturali, pone q pro toto quadrante, et sit $2a - q = e$, et tunc voca t Tangentem artificialem; tunc erit

$$t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{5e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8} \text{ etc.}$$

Dn. Gregorius Collinio mediante in hanc methodum incidit, visa non nisi una ex seriebus Domini Newtoni; ejusque de ea haec est sententia, Rem omnem non nisi corollarium esse seriei generalis, accommodatae inveniendo cuilibet ex quotlibet mediis proportionalibus, ut libuerit, inter quosvis duos numeros extremos datos, vel inter alia quaelibet extrema, in eadem ratione licet remota, cum inveniendo ullo ejusmodi termino remoto.

Defuncto Gregorio, congessit Collinius amplum illud commercium litterarium, quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus historia: cui Dn. Newtonus pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis illius, prima quaque occasione commoda edendam; de qua interna temporis hoc scire praeter rem non fuerit, quod scilicet Dn. Newtonus cum in litteris suis Dcbr. 10. 1672 communicaret nobis methodum ducendi tangentes ad curvas geometricas ex aequatione exprimente relationem ordinatarum ad Basin, subjicit hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis, quae extendit se absque molesto calculo, non modo ad ducendas tangentes accomodatas omnibus curvis, sive Geometricas sive Mechanicas, vel quomodocunque spectantes lineas rectas, aliisve lineis curvis; sic etiam ad resolvenda alia abstrusiora problematum genera de curvarum flexu, areis, longitudinibus, centris gravitatis etc. Neque (sic pergit) ut Huddenii methodus de maximis et minimis, proindeque Slusii nova Methodus de tangentibus, (ut arbitror) restricta est ad aequationes, Surdarum quantitatum immunes. Hanc methodum se intertexuisse, ait Newtonus, alteri illi, quae aequationes expedit reducendo eas ad infinitas series; adjicitque, se recordari, aliquando data occasione, se significasse Doctori Barrovio lectiones suas jam jam edituro, instructum se esse tali methodo ducendi tangentes, sed avocamentis quibusdam se praepeditum, quominus eam ipsi describeret.

Quod spectat series infinitas pro aequationum radicibus, ait Collinius, putare se, Dn. Gregorium ei rei insudasse, mediante alia methodo, extrahendo eas symbolice; qua de re haec sunt ipsissima verba Gregorii, litteris ipsius 17. Maii 1671 ad Collinium datis, inserta: Inveni ejusmodi serierum continuationem, immane quantum! prolixam! Et in alia ejusdem epistola 17. Jan. 1672 scripta, haec habet: Dari posse unam seriem, accommodatam omnibus aequationibus cubicis; aliam omnibus biquadraticis; aliam omnibus Sursolidis; quin imo pro quavis radice dari posse numeros serierum infinitos; et industria quaedam requiritur, seriem ingrediendi, noscendique ad quam radicem referatur.

Quoad vero aequationum resolutionem ope logarithmorum, vel potestatum omnium intermediatarum amotione, dixit idem Gregorius epistola sua 17. Jan. 1672 ad Collinium data, praestare se id posse; Sed aequationem sursolidam (quam constat esse 5 dimensionum) priusquam reduci possit ad puram, ascendere oportere ad 20mam potestatem. Et litteris suis 26. Maji 1675 exaratis, ait, Facile esse ita constituere aequationes, ut vel 2, 3 etc. vel omnes intermedii termini sine difficultate tollantur, at vero tollere duos terminos intermedios in aequatione arbitraria, citra elevationem, penitus esse impossibile; neque ipsum posse, illam elevando, tollere omnes terminos intermedios; quod (quantum ipsi constaret) orbem eruditum hactenus latuerit.

Disquisitionis hujus occasionem suppeditatam fuisse ait a Dno du Laurens, in praeloquio suo asserente, se praestare id posse. Erat ille Dno. Freniclio familiaris: Scire avemus, num inter Frenicli et Du Laurentii Schediasmata aliquid ea de re inveniatur. Rev. Dnum. Pardies quod attinet, nescimus quomodo tale quid de eo exspectare licuerit.

Quod attinet radicum exhibitionem omnium aequationum in surdis, haec dicenda habet Collinius.

Laudato Gregorio significatum cum fuisset Dnum. Tschirnhausium in talem methodum incidisse, aliquotque instantias de ea exhibuisse in casibus quibusdam particularibus ad Dn. Gregorium missis, hunc in responsione sua 20. Aug. 1675 dixisse, se nullum videre nexum inter suam ipsius methodum generalem exhibendi omnium aequationum radices surdas, et regulas illas particulares nobilis illius Germani, ad se transmissas, quandoquidem in sua (Gregoriana) Methodo frequentius occurrunt casus impossibiles.

Atque in epistola sua Sept. 11. 1675 ex occasione regularum illarum, quas diximus, particularium, ait, In quavis aequatione habente ejusmodi relationem inter radices suas, ut data una reliquae omnes ope ejus possint inveniri, 1. Regulam constitui posse, qua ipsa reducatur ad simpliciem aequationem lateralem; 2. vel, si duarum Radicum adminiculo, ceterae omnes inveniri queant, earum beneficio reduci eam posse ad aequationem quadraticam, radicibus istis duabus inveniendis accomodam; 3. vel, si trium radicum ope reliquae omnes possint inveniri, reduci eam posse ad aequationem cubicam pro istis tribus radicibus inveniendis, atque ita de caeteris omnibus in infinitum; 4. datis aequationibus duabus tribusve, novam aequationem inveniri posse, cujus radix sit radicum aequationum datarum summa vel earum differentia, vel productum, vel (verbo dicam) quodlibet quod constitui potest ex radicibus vel per radices aequationum priorum.

In litteris suis, 20. Aug. 1675 datis porro addit de methodo sua, aequationum surdis radicibus accomodata; probabile scilicet esse, laudati Germani methodum universalem, quando vulgata fuerit, magis esse compendiosam sua: cum (ut verum fateatur) inventio particularium canonum (unus namque canon semper inservit omnibus aequationibus, eodem numero dimensionum constantibus) sit admodum laboriosa, quin et excedens quicquid hactenus in praxin abierit. Atque (sic pergit) si ipsius methodus non compendifaciat meam, dubito, num integri anni spatium suffecerit ineundo calculo canonum aequationum pro 10 prioribus dimensionibus. Attamen meae methodi ratio fere me persuasum tenet non dari aliam compendiosiorem; quin in aequationibus Cubicis et Biquadraticis majus habet compendium ulla mihi unquam visa: verum in immensum augetur labor auctis dimensionibus: et, si quis laborem subire vellet calculandi canones, lubens ipsi communicarem methodum meam demonstratione munitam: Cum, ut quod res est dicam in opere tam taedioso me destituat patientia.

Idem in epistola, Octbr. 2. 1675 scripta, ait, Variando signa quantitatum, radicem unam componentium (pro unaquaque dimensione respectiva) omnes alias radices componi; et Methodum canones hosce inveniendi in eo consistere ut deprimatur semper aequatio a gradu superiore ad gradum inferiorem.

Si de aliis Gregorii Scoti inventionibus scire aves, haec porro habet Collinius:

1. Illum ex Italia reducem factum Londini A. 1668 ostendisse manuscriptum quoddam de Astronomia, Planetarum Theorias ad Methodum Geometricam reducens, quod dicebat aliquando forte in lucem emissum iri: ostendisse eodem tempore aliud scriptum suum Dioptricum; Sed Doct. Barrovii lectiones, de eo argumento deinceps editas, in causa fuisse, quod illud supprimere statuerit, saltem donec videret, quid Hugenius et Newtonus ea de re commentati essent.

2. In litteris suis 5. Sept. 1670 sic scribet: Perlegi utrumque Barrovii librum, praelectionibus Opticis et Geometricis constantem, idque magna cum voluptate et attentione; deprehendique illum multis parasangis post se reliquisse omnes, qui ante ipsum de istis argumentis fuere commentati. Deteximus ex ipsius methodo ducendi tangentes, nonnullis meis meditamentis sociata, generalem methodum Geometricam, absque calculo tangentes ducendi ad quasvis curvas, comprehendentem non modo Dni. Barrovii Methodos particulares, sed et generalem ejus methodum analyticam, sub lectionis ipsius 10mae finem traditam. Mea Methodus non continet ultra propositiones 12.

Una mittebat exemplum praxeos ejus, ducendo tangentem ad spiralem arcuum rectificatricem, supposita Circuli quadratura: Cujus curvae haec est indoles. Describe circulum, et per centrum ejus duc aliquot radios secantes; intellige arcus interceptos inter radios illos et unum diametri terminum extendi in chordas, et adaptatos intra extremitatem Diametri et radios illos secantes; curva transiens per puncta sic inventa vocatur spiralis arcuum rectificatrix.

3. Idem in litteris scriptis 23. Novembr. 1670 haec habet)

Prope jam paratam habeo typis edendam, aliam editionem meae quadraturae circuli et hyperbolae, in qua, (ni fallor) multis et variis modis institutum meum demonstro.

Erat illud probare, utramque figuram incapacem esse exactae ullius quadraturae, sive in lineis, sive in numeris; nec aliquam inter ullas alterutrius portiones assignari posse aequalitatem.

4. Quoad duplicatas aequalitates Diophanti, et similia earum augmenta et explicationes, testatus est aliquot epistolis, posse ea plurimum excoli et provehi: quod idem et affirmatur a Pellio.

5. Quoad spectat constructiones, aequationibus idoneas, cum mentio fieret apud Gregorium, methodum deesse inveniendi, quaenam aequationes solvantur per ordinatas cadentes ab intersectionibus duarum quarumvis Sectionum Conicarum, aliarumve curvarum Geometricarum, in axes vel lineas ipsis parallelas alterutrius figurae, si figurae illae sint determinatae et ex suppositione in quovis positu ad libitum ductae: Respondit, cum hic ageret Londini A. 1673, se rem illam considerasse, et labore aliquo consectatum esse.

6. Difficile Problema cum ipsi proponeretur, viz. Summa quadratorum, et summa Cuborum, quatuor continue proportionalium datis, invenire proportionales; Ajebat coram, eodem anno 1673, se non dubitare quin resolvere id posset, tollendo omnes potestates inferiores in unaquaque aequatione proposita, atque ita tandem reductionum ope perveniendo ad duas potestates puras sublimiorum dimensionum, quarum unius radix daret primam Proportionalem quaesitam, alterius vero, rationem; proindeque problema solutum esse.

Sed ex eo tempore, in epistola data 28. Julii 1675, scripsit, se de hoc Problemate meditatum esse, et magnum sibi Apollinem fore, qui id solveret per aequationem 30 dimensionibus inferiorem. Adjicit, aequationes equidem illas, ad quas ipse rem deduxerit, adeo fuisse taediosas, ut patientia ipsi deficeret, reductionum regulas applicandi; verum tot tamque diversas aequationes se explorasse, ut, si capaces reductionis fuissent, reductionum illarum nonnullas fuisse obvias futuras crederet.

Propositi hujus Problematis ratio erat, quod, cum praesumatur jam cognitum, quoad progressionem quamvis Arithmeticam, quod datis duabus quibuslibet summis, viz. vel ipsius progressionis, vel ejus quadratorum, cuborum etc. una cum numero terminorum, progressio possit inveniri, disquisitione dignum foret, similiter respectu Progressionis geometricae. Res spinosa implexaque videtur. Interim Dn. Collinius de Methodo cogitavit quaestionem propositam solvendi, quae probabiliter (necdum enim vacavit ipsi calculos ea de re inire) non ascendet ad dimensiones adeo sublimes ut putatur: eaque hunc in modum se habet.

Pone quantitatem ignotam pro summa proportionalium, et juxta Doctrinam Billii, nactus summam 4 Proportionalium, summamque quadratorum ex iis emergentium, exinde 4 proportionales, quod fieri potest, vel omnimode per species, vel (brevitatis causa ad solvendum illud in particulari) partim per species, partim per numeros; eusque hoc modo consecutus, cuba omnes, easque simul additas, aequales redde datae summae cuborum. Hac ratione obtinetur aequatio, qua valor ignoti Symboli, primo positi, inveniri potest, quem postquam consecutus et interpretatus fueris, in Proportionalibus speciosis vel mixtis, per Billii Doctrinam inventis, 4 Proportionales quaesitae habentur.

Quod attinet binnium Aequationum per Sinuum tabulas solvendarum rationem, Dn. Pellius id fieri posse saepius asseruit, et nuper me praesente rogatus, possetne aequationes omnes sex vel octo dimensionum, Canonis Sinuum beneficio solvere, affirmavit sese subliniorum adhuc dimensionum aequationes ad dictum canonem reduxisse.

1. Ait laudatus Pellius, Sectionum angularium doctrinam posse in immensum ampliari; id quod verum esse videtur ex specimine, ad calcem Algebrae Germanicae, a discipulo ipsius Rhonio concinnatae, adjecto, ubi habentur 105 theoremata de Sinubus, Chordis, Tangentibus et Secantibus, quae in editione Anglica non habentur.

2. Praecipuus finis et usus hujus Doctrinae est, non tam confectio tabularum (quippe quae facilius peragi alia ratione potest) quam aequationum resolutio.

3. Circulus et Ellipsis una cum suis inscriptis adscriptisque, magis sunt hanc in rem idonea, quam ullae figurae aliae: e. g. in Dni. Gregorii Geometriae parte universali haec occurrit propositio p. 128.

„Si circuli circumferentia dividatur in partes quotcunque „aequales, et numero impares, et a quolibet peripheriae puncto „ad omnes ejusdem divisiones, rectae ducantur, si circulus di„vidatur in partes aequales, erit summa primarum aequalis ulti-

„mae; si in quinque, erit summa primarum et ultimae aequalis „summae secundarum; si in septem, erit summa primarum et tertiarum aequalis secundarum et ultimae; si in novem, erit summa „primarum, tertiarum et ultimae, aequalis summae secundarum et „quartarum; atque ita deinceps in infinitum. Diximus autem, rectas „primas esse illas, quae ducuntur ad divisiones, ex utraque parte „puncto assignato proximas; secundas, illas rectas, quae ducuntur „ad divisiones, primis ex utraque parte succedentes; tertias, quae „secundis succedunt etc.; rectam vero ultimam illam quae duci„tur ad divisionem a puncto assignato remotissimam."

4. Consimile quid Wallisius noster praestitit, quando Peripheria dividitur in quemlibet numerum partium aequalium; deditque aequationes divisionibus tam paribus quam imparibus idoneas, in tractatu de Sectionibus angularibus, qui nunc penes Collinium est, typis mandandus.

5. Hae chordae, repraesentantes aequationum radices, transferri possunt a circulo, tamquam ordinatae, propriis suis resolvendis insistentes, per quarum summitates ducta curva erit flexuosa, uti sunt omnium aequationum loca, prout saepius antehac innuimus, ac evidenter jam cognitum est in cubicis: atque hinc lucem faenerari possumus, Methodo transferendi vicissim a loco ad circulum.

6. Affirmat Pellius, constituere se posse problemata, abitura in aequationem ejusdem formae cum quavis proposita: ad haec, posse se in istiusmodi constitutionibus pertingere ad limites ascendendo: Porro Doctrinam limitum hactenus etiam a praestantissimis ejus scriptoribus perquam imperfecte esse traditam: insuper comparando et accommodando invicem limites aequationum, et problemata Cardani; regulas innumeras alias, ipsis consimiles inveniri posse, atque Regulam illam et Doctrinam Huddenii de aequationum omnium tum numeralium tum litteralium inveniendis Radicibus Surdis attingi et obtineri. Limitibus obtentis ad evitandam implexam illam surdorum complicationem, canone illo se uti ait idem Pellius, quod et fieri similiter potest in limitum ipsorum consecutione, quos postquam obtinuerimus, inveniuntur omnes ad quodvis Resolvendum propositum Radices, beneficio facilis methodi applicandi illud uni circulo, vel plura Resolvenda pluribus circulis, quorum quilibet intelligi potest diversas revolutiones habere. Denique affirmat Pellius, conscripsisse se dudum de hac doctrina exercitationes, quarum titulus: Tractatus de

habitudinibus repetitis, et usu Canonis mathematici; Sed. Schediasmata illa ruri, ubi antehac commoratus est, asservari.

Assertiones hae Pellianae parere in Philomathematici mente possent cogitationem, 1. Annon detur possibilitas augendi, minuendi, multiplicandi et dividendi quasdam ex aequationum radicibus, reliquis in eo quo sunt statu servatis; 2. Si duae aequationes habeant eosdem plane limites, sive paria radicum aequalium, excepto tantum uno par, in utrisque communia, quaenam habitudines variationesque dentur inter radices in singulis, et inter quot radices ex illis? 3. Probabile videri, quodlibet radicum par, in qualibet sublimiori aequatione habere posse diversos ad eas inveniendas canones. Ex. g. Regulae Cardani idoneae sunt inveniendae radici aequationis cubicae, quando nonnisi una radix est possibilis, et post novam aequationis efformationem diminuendo radices limitum alii possunt strui canones ad inveniendas radices, quando tres sunt possibiles.

7. Harum rerum notitia fretus Pellius dudum in Idea sua mathematica typis edita A. 1657 proposuit sive promisit p. 43: Juxta Methodum suam descriptam deducere non solum quicquid invenire est in praedecessorum nostrorum scriptis, et quicquid illis in mentem venisse videri potest, sed etiam omnia inventa, Theoremata, Problemata et praecepta Mathematica quae foecunda successorum nostrorum ingenia excogitare poterunt, idque uno certo et immutato ordine, inde a primis Mathematum principiis usque ad summas nobilissimasque eorum applicationes, aeque ac imas maximeque vulgares; non tradendo eas tumultuarie prout mentem subeunt, uti factitarunt majores nostri, qui in problemata sua eorumque solutiones casu, non vero una constante et invariata methodo scientifica incidisse videntur. Cui subjungit p. 45; quovis argumento proposito determinare numerum omnium Problematum, quae de eo concipi possunt; et quovis problemate proposito, ostendere demonstrative vel omnia media iis solvendis idonea vel solvendi impossibilitatem; et, si posterius, utrum necdum, vel plane non sit solutu possibile; qua de re exercitationem scripsit, Cribrum Erathostenis dictum, quam Dn. Boylius perlustravit.

Has assertiones Dn. Descartes censura sua aliquot litteris perstrinxit, quae si obtineri possent a Dno. Clerselier, si quidem penes ipsum sint, magni beneficii loco poneremus.

8. Ad majorem dictis fidem astruendam, in nonnullorum fide dignorum praesentia, chartam aliquoties deprompsit ex loculis, ulnae longitudine, diversis columnis notatam, in qua e regione 400 resolvendorum, Arithmetice crescentium, aequationis sex dimensionum (si rite memini) tradebantur, in diversis columnis, diversae series radicum ad ea pertinentes, quas e tabula sinuum desumptas afferebat, nec tamen aequatio illa Sectionibus angularibus erat accommoda. Adjiciebat ille, ad opus hoc melius conficiendum necessum esse, ampliorem strui canonem, dividentem quemlibet arcus gradum in 1000 partes. Cui respondebatur, utilitate hujus ei intellecta, forsan nòn defore viros, qui canonem illum struendum susciperent; cujus tabulae radicum ope ipse accurate descripserat locum aequationis una cum omnibus flexuris, ostendentem ubinam radices lucrabantur vel omittebant possibilitatem suam per paria; hanc radicum seriem aeque fere facile strui posse ac transscribi, velleque eam suscipere Methodo Vietae, esse laborem, quem humeri humani ferre recusent, nec nisi ut Warnerus dictitabat, ei possibilem, qui Alpibus Italia in Angliam transferendis locare operam suam vellet.

9. Ex sermone cum Pellio habito non patet, ipsum studio doctrinae infinitarum serierum adeo multum incubuisse; et quamvis agnoscat, posse eas esse usui in Theorematibus vel potius habitudinibus per eas inventis; attamen quoad partem calculativam vel applicativam, ait, posse eam vel plane amoveri, vel plurimum facilitari Methodorum suarum beneficio, quas evulgare recusat, nisi prius viderit, quid Gregorii vel Newtoni methodi praestare valeant, quorum posterior lectiones ea de re et de Algebra habuit, quas publicae Bibliothecae Cantabrigensi commisit.

Digna sane haec videntur Mathematicorum Parisiensium meditatione, et spes nos fovet, ipsos communicaturos esse suos hac in re labores et conatus. Vale, et cito, si placet, rescribe.

Dabam Londini d. 26 Julii 1676.

XXXVI.

Oldenburg an Leibniz *).

Quamquam Dni. Leibnitii modestia in excerptis, quae ex Epistola ejus ad me nuper misisti, nostratibus multum tribuat circa speculationem quandam infinitarum serierum, de qua jam coepit esse rumor: nullus dubito tamen, quin ille non tantum quod asserit methodum reducendi quantitates quascumque in ejusmodi series, sed et varia compendia, forte nostris similia, si non et meliora, adinvenerit. Quoniam tamen ea scire pervelit, quae ab Anglis ea in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in hanc speculationem inciderim: ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quae mihi occurrerunt, ad te transmisi.

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem, et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in decimalibus numeris. Haec sunt fundamenta harum reductionum; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema:

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ$$

$$+ \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{etc.}$$ **), ubi $P+PQ$ significat

---

*) Oldenburg hat bemerkt: Apographum literarum a Dno. Newtono scriptarum ad H. Oldenburgium, Cantabrigia d. 13. Junii 1676. — Diese sowie die folgende Nummer sind bereits gedruckt.

**) Leibniz hat über die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks die Buchstaben A, B, C, D, E geschrieben und am Rande des Briefes Folgendes bemerkt: Conferendum cum extractione mea radicis quad. cub.

$$\overset{A}{P^{\frac{m}{n}}} + \overset{B}{\frac{m}{n} Q P^{\frac{m}{n}}} + \overset{C}{\frac{m^2-mn}{1,2\,n^2} Q^2 P^{\frac{m}{n}}}$$

$$\overset{D}{+ \frac{m^3-3m^2n+1,2mn^2}{1,2,3\,n^3} Q^3 P^{\frac{m}{n}}} \text{ etc. } \sqcap \overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$$

Numerator in B est m, in C est m, m—n; in D est m, m—n, m—2n, et ita porro, arithmeticis continue in se ductis. Nominator fit ex arithmeticis crescentibus, numerator ex descrescentibus. Numerator per m divisus foret formula quantitatem, cujus radix vel etiam dimensio quaevis vel radix dimensionis investiganda est P, primum terminum quantitatis ejus, Q reliquos terminos divisos per primum, et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensionis ipsius $P + PQ$, sive dimensio illa integra sit, sive (ut ita loquar) fracta, sive affirmativa sive negativa. Nam sicut Analystae pro aa, aaa etc. scribere solent a^2, a^3, sic ego pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c:a^5}$ etc. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, et pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.

Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c:\overline{a^3 + bbx}}}$ scribo $aa \times \overline{a^3 + bbx}|^{-\frac{1}{3}}$

et pro $\frac{aab}{\sqrt{c:\overline{a^3 + bbx} \times \overline{a^3 + bbx}}}$ scribo $aab \times \overline{a^3 + bbx}|^{-\frac{2}{3}}$

in quo ultimo casu, si $\overline{a^3 + bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}}$

---

serviens pro aequatione cujus radices progressionis Arithmeticae; posito m pro incognita et n, 1n, 2n etc. pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hac serie in infinitum. $P^{\frac{m}{n}}$ potest esse rationalis vel irrationalis; divisa serie per $P^{\frac{m}{n}}$ reliquum rationale; imo prorsus evanescet $P^{\frac{m}{n}}$ vel ipsa P. Hinc semper fieri potest commode, ut P sit 1, erit $P^{\frac{m}{n}}$ etiam 1.

Si $m = n$, et tam m quam n integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet $= 0$ adeoque omnes quoque sequentes. Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti. Quin et potest esse litera. (Vicissim $\frac{m}{n}$ potest inveniri ex $P + PQ$, logarithmus ex numero, denique et numerus ex logarithmo, Methodis alibi a me traditis). Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest, faciendo m, n alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$.

Quaerenda et theoremata pro extractione radicum inaequalium, ut si sint progressionis arithmeticae, exemplum est, dato numero extrahere radicem quam vocant pronicam, ut $\frac{y^2 + y}{2} = b$ invenire y, aut $y^3 + by^2 + cy = d$ seu y in $y^2 + by + c = d$. Unde non tantum y, sed et $y^2 + by + c$ sunt divisores ipsius d. Si pro n ponatur $\frac{1}{2}$, fiet $\frac{m}{n} = mq$, et nulla erit litera in fractione; etiam pro Q potest poni $\frac{1}{S}$.

in Regula, erit $P = a^3$, $Q = \frac{bbx}{a^3}$, $m = -2$ et $n = 3$. Denique pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D etc. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n} AQ$, et sic deinceps. Ceterum usus Regulae patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{cc + xx}$ $\left(\text{seu } \overline{cc + xx}|^{\frac{1}{2}}\right) = c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} +$ etc.; nam in hoc casu est $P = cc$, $Q = \frac{xx}{cc}$, $m = 1$, $n = 2$, $A \left(= P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}|^{\frac{1}{2}}\right) = c$. $B \left(= \frac{m}{n} AQ\right) = \frac{xx}{2c}$, $C \left(= \frac{m-n}{2n} BQ\right) = \frac{-x^4}{2c^3}$ et sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt[(5)]{c^5 + c^4x - x^5}$ $\left(\text{i. e } \overline{c^5 + c^4x - x^5}|^{\frac{1}{5}}\right) = c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8xx + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^4} +$ etc. ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P*), et $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ pro Q et tunc evadet $\sqrt[(5)]{c^5 + c^4x - x^5} = -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} +$ etc. Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit, posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt[(3)]{y^3 - aay}}$ $\left(\text{hoc est } N \times \overline{y^3 - aay}|^{-\frac{1}{3}}\right) = N \times \overline{\frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} +}$ etc. Nam $P = y^3$, $Q =$

---

*) So heisst diese Stelle in der Abschrift, die L. zugeschickt wurde. Offenbar ist hier etwas ausgefallen; in den Opusc. Newt. ed. Castillon Tom. I. p. 109. folgt nach den Worten pro P: et $\frac{c^4x - x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, et $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ pro Q, et tunc etc.

$-\frac{aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$, $A\left(=P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times -\frac{1}{3}}\right)=y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$; $B\left(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy}\right)=\frac{aa}{3y^3}$ etc.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}\right)$ est $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+$ etc. nam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=4$, $n=3$, $A\left(=P^{\frac{m}{n}}\right)=d^{\frac{4}{3}}$ etc.

Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadratocubus ipsius $d+e$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{5} \text{ seu } \overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}\right)$ desideretur: erit juxta Regulam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$ et $n=1$; adeoque $A\left(=P^{\frac{m}{n}}\right)=d^5$, $B\left(=\frac{m}{n}AQ\right)=5d^4e$, et sic $C=10d^3ee$, $D=10dde^3$, $E=5de^4$, $F=e^5$, et $G\left(=\frac{m-5n}{6n}FQ\right)=0$. Hoc est $\overline{d+e}|^{5}=d^5+5d^4e+10d^3ee+10dde^3+5de^4+e^5$.

Quin etiam Divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{-1} \text{ sive } \overline{d+e}|^{\frac{-1}{1}}\right)$ in seriem simplicium terminorum resolvendum sit, erit juxta regulam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=-1$, $n=1$, et $A\left(=P^{\frac{m}{n}}=d^{-\frac{1}{1}}\right)=d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$; $B\left(=\frac{m}{n}AQ\right)$ $=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d}=\frac{-e}{dd}$, et sic $C=\frac{ee}{d^3}$, $D=\frac{-e^3}{d^4}$ etc. Hoc est $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+$ etc.

Sic et $\overline{d+e}|^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa per $d+e$ vel semel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6ee}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+$ etc. Et $N\times\overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$ hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$ evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}}$ etc. *)

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato cubicam ex cubo ipsius $d+e$ sive $\frac{N}{\sqrt{(5)\, d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$ evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}}$ etc.

Per eandem Regulam Geneses potestatum per Potestates aut per quantitates radicales, et extractiones radicum altiorum in numeris etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum aequationum affectarum in Speciebus imitantur earum extractiones in numeris, sed methodus Vietae et Oughtredi nostri huic negotio minus idonea est, quapropter aliam excogitare adactus sum, cujus specimen exhibent sequentia Diagrammata, ubi dextra columna prodit substituendo, in media columna valores ipsorum p, q, r etc. in sinistra columna expressos. Prius Diagramma exhibet resolutionem hujus numeralis aequationis $y^3 - 2y - 5 = 0$ et hic in supremis numeris pars negativa Radicis subducta de parte affirmativa, relinquit absolutam Radicem 2,09455148 et posterius Diagramma exhibet resolutionem hujus literariae aequationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

	$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+2{,}10000000$ $-0{,}00544852$ $2{,}09455148 = y$
$2 + p = y$	y^3 $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6pp + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p + 6pp + p^3$.
$+0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6pp$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3qq + q^3$ $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+1 + 10$ -1
	Summa	$0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3qq + q^3$.
$-0{,}0054 + r = q$	$+q^3$ $+6{,}3qq$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$-0{,}0000001 + 0{,}000r$ etc. $+0{,}0001837 - 0{,}068$ $-0{,}060642 + 11{,}23$ $+0{,}061$.
	Summa	$+0{,}0005416 + 11{,}162r$
$-0{,}00004852 + s = r$		

*) Leibniz hat hier bemerkt: Hoc pulchrum, et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta. Et pro aliis transformationibus.

$y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$		$\left(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$ etc.
$a + p = y$	y^3	$a^3 + 3aap + 3app + p^3$
	$+ axy$	$+ aax + axp$
	$+ aay$	$+ a^3 \quad + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	p^3	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}xxq$ etc
	$+ 3app$	$+\frac{3}{16}axx - \frac{3}{2}axq + 3aqq$
	$+ axp$	$-\frac{1}{4}axx + axq$
	$+ 4aap$	$- \quad axx + 4aaq$
	$+ aax$	$+ \quad aax$
	$- x^3$	$- x^3$
$+\frac{xx}{64a} + r = q$	$3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ etc.
	$+\frac{3}{16}xxq$	$+\frac{3x^4}{1024a}$ etc.
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+ 4aaq$	$+\frac{1}{16}axx + 4aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$\left. + 4aa - \frac{1}{2}ax \right)$	$+\frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$	$\left(+\frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$

In priori Diagrammate primus terminus valoris ipsorum p, q, r in prima columna invenitur dividendo primum terminum summae proxime superioris per coefficientem secundi termini ejusdem summae (ut -1 per 10, aut 0,061 per 11,23) et mutando signum quoti. Et idem terminus eodem fere modo invenitur in secundo Diagrammate. Sed hic praecipua difficultas est in inventione primi termini radicis; id quod methodo generali perficitur; sed hoc brevitatis gratia, jam praetereo; ut et alia quaedam, quae ad concinnandam operationem spectant: neque enim hic compendia tradere vacat. Sed dicam tantum in genere, quod radix cujusvis aequationis semel extracta pro regula resolvendi consimiles aequationes asservari possit, et quod ex pluribus ejusmodi regulis regulam generaliorem plerumque efformare liceat, quodque radices omnes sive simplices sint sive affectae, modis infinitis extrahi possint, de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex aequationibus sic ad infinitas series reductis, areae et longitudines curvarum, contenta et superficies solidorum vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis eorumque centra gravitatis determinantur, et quomodo etiam curvae omnes mechanicae ad ejusmodi aequationes infinitarum serierum reduci possint, indeque problemata circa illas resolvi perinde ac si geometricae essent, nimis longum foret describere. Sufficiat specimina quaedam talium Problematum recensuisse: inque iis brevitatis gratia literas A, B, C, D etc. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

1. Si ex dato sinu recto vel sinu verso arcus desideretur: sit radius r et sinus rectus x eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6\,rr} + \frac{3\,x^5}{40\,r^4} + \frac{5\,x^7}{112\,r^6} +$ etc. hoc est $= x^3 + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr} A + \frac{3 \times 3\,xx}{4 \times 5\,rr} B + \frac{5 \times 5\,xx}{6 \times 7\,rr} C + \frac{7 \times 7\,xx}{8 \times 9\,rr} D +$ etc. vel sit d diameter ac x sinus versus, et erit arcus $= d^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\,d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3\,x^{\frac{5}{2}}}{40\,d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5\,x^{\frac{7}{2}}}{112\,d^{\frac{5}{2}}} +$ etc. hoc est $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6\,d} + \frac{3\,xx}{40\,d} + \frac{5\,x^3}{112\,dd} +$ etc.

2. Si vicissim ex dato arcu desiderentur sinus: sit radius r et arcus z, eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6\,rr} + \frac{z^5}{120\,r^4} - \frac{z^7}{5040\,r^6} + \frac{z^9}{36288\,r^8}$ etc; hoc est $= z - \frac{zz}{2 \times 3\,rr} A - \frac{zz}{4 \times 5\,rr} B - \frac{zz}{6 \times 7\,rr} C -$ etc.; et sinus versus $= \frac{zz}{2\,r} - \frac{z^4}{24\,r^3} + \frac{z^6}{720\,r^5} - \frac{z^8}{40320\,r^7} +$ etc. hoc est $= \frac{zz}{1 \times 2\,r} - \frac{zz}{3 \times 4\,rr} A - \frac{zz}{5 \times 6\,rr} B - \frac{zz}{7 \times 8\,rr} C$ etc.

3. Si arcus capiendus sit in ratione data ad alium arcum: esto diameter d, chorda arcus dati $= x$, et arcus quaesitus ad arcum illum datum ut n ad 1; eritque arcus quaesiti chorda

$$= n x + \frac{1 - nn}{2 \times 3 dd} xx A + \frac{9 - nn}{4 \times 5 dd} xx B + \frac{25 - nn}{6 \times 7 dd} xx C$$

$$+ \frac{36 - nn}{8 \times 9 dd} xx D + \frac{49 - nn}{10 \times 11 dd} xx E + \text{etc.}$$ ubi nota, quod cum n est numerus impar, series desinet esse infinita, et evadet eadem, quae prodit per vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.

4. Si in axe alterutro A B Ellipseos A D B (cujus centrum C et axis alter D H) detur punctum aliquod E circa quod recta E G occurrens Ellipsi in G motu angulari feratur, et ex data area sectoris Ellipticae B E G quaeratur recta G F quae a puncto G ad axem A B normaliter demittitur: esto $B = q$, $D C = r$, $E B = t$, ac duplum areae $B E G = z$: et erit $G F = \frac{z}{t} - \frac{q z^3}{6 rr t^4}$

$$+ \frac{10 qq - 9qt}{120 r^4 t^7} z^5 - \frac{280 q^3 + 504 qqt - 225 qtt}{5040 r^6 t^{10}} z^7 {}^{*)} + \text{etc.}$$

Sic itaque Astronomicum illud Kepleri problema resolvi potest. (Fig. 11.)

5. In eadem Ellipsi, si statuatur $C D = r$, $\frac{C B^q}{C D} = c$, et $C F = x$, erit arcus ellipticus

$$
\begin{array}{llllll}
D G = x & + \frac{1}{6 cc} x^3 & + \frac{1}{10 r c^3} x^5 & + \frac{1}{14 rr c^4} x^7 & + \frac{1}{18 r^3 c^4} x^9 & + \frac{1}{22 r^4 c^6} x^{11} + \\
 & - \frac{1}{40 c^4} & - \frac{1}{28 r c^5} & - \frac{1}{24 rr c^6} & - \frac{1}{22 r^3 c^7} & \\
 & & + \frac{1}{112 c^6} & + \frac{1}{48 r c^7} & + \frac{3}{88 rr c^8} & \\
 & & & - \frac{5}{1152 c^8} & - \frac{5}{352 r c^9} & \\
 & & & & + \frac{7}{2816 c^{10}} &
\end{array}
$$

Hic numerales coefficientes supremorum terminorum $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14} \text{ etc.}\right)$ sunt in musica progressione, et numerales coefficien-

*) Nach Horsley (Newton. op. omn. Tom. I. p. 310.) muss dieses Glied heissen: $-\frac{280 q^3 + 225 t^2 q - 504 q^2 t}{5040 r^6 t^{10}}$

tes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeant multiplicando continuo numeralem coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}n-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$, $\frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$, $\frac{\frac{1}{2}n-9}{10}$ etc. ubi n significat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22\,r^4\,c^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22\,r^4\,c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc est in 1, et prodit $\frac{1}{22}$ (numeralis coefficiens termini proxime inferioris), dein duco hanc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{1}{2}n-3}{4}$ sive in $\frac{n-3}{4}$, hoc est in $\frac{3}{4}$, et prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in ista columna. Atque ita $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{1}{2}n-6}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ num. coeff. 4ti termini et $\frac{3}{352} \times \frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum columnis praestari potest, adeoque valor ipsius D G per hanc Regulam pro lubitu produci. Ad haec, si B F dicatur x, sitque r latus rectum Ellipseos et $c = \frac{r}{AB}$: erit arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } 1 + \left.\frac{\begin{array}{l}2\\-\frac{1}{2}e\end{array}}{3r}\right\} x \left.\frac{\begin{array}{l}-2\\+3e\\-\frac{1}{8}ee\end{array}}{5rr}\right\} xx \left.\frac{\begin{array}{l}+4\\+9e\\+\frac{23}{4}ee\\-\frac{7}{16}e^3\end{array}}{7r^3}\right\} x^3 \left.\frac{\begin{array}{l}-10\\+30e\\-\frac{123}{4}ee\\+\frac{21}{8}e^3\\-\frac{45}{128}e^4\end{array}}{9r^4}\right\} x^4 + \text{etc.}$$

Quare si ambitus totius Ellipseos desideretur: biseca C B in F, et quaere arcum D G per prius theorema, et arcum G B per posterius.

6. Si vice versa ex dato arcu Elliptico DG quaeratur sinus ejus CF, tum dicto CD = r, $\frac{CB^q}{CD} = c$ et arcu illo DG = z erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc} z^3 - \frac{1}{10rc^3} z^5 - \frac{1}{14rrc^4} z^7 - \text{etc.}$$
$$\qquad\qquad + \frac{13}{120c^4} \qquad + \frac{71}{420rc^5}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{493}{5040c^6}$$

Quae autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam: mutatis tantum signis ipsorum c et e ubi sunt imparium dimensionum.

7. Praeterea si sit CE Hyperbola (Fig. 12.), cujus Asymptoti AD, AF, rectum angulum FAD constituant, et ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE, occurrentia hyperbolae in C et E, et AB dicatur a; BC, b, et area BCED, z, erit $BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ etc. ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis, 1, 2, 3, 4, 5 etc. in se continuo; et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri.

8. Esto VDE quadratrix (Fig. 13), cujus vertex V, existente A centro et AE semidiametro circuli, ad quem aptatur, et angulo VAE recto, demissoque ad AE perpendiculo quovis DB et acta quadratricis tangente DT occurrente axi ejus in T: dic AV = a, et AB = x, eritque $BD = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$ — etc. et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{45a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} +$ etc. et area $AVDB = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5}$ — etc. Et arcus $VD = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$ etc. unde vicissim ex dato BD, vel VT, aut area AVDB arcuve VD per resolutionem affectarum aequationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB Sphaeroides (Fig. 14), revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, et secta planis quatuor, AB

per axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, et FG parallelo CE: sitque recta $CB = a$, $CE = c$, $CF = x$ et $FG = y$; et Sphaeroideos segmentum CDFG dictis quatuor planis comprehensum erit:

$$+\ 2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - \text{etc.}$$

$$-\ \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - \text{etc.}$$

$$-\ \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \text{etc.}$$

$$-\ \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \text{etc.}$$

$$-\ \frac{5cx^9}{576a^8} - \text{etc.}$$

$$-\ \text{etc.}$$

Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum $\left(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{15}, -\frac{5}{576} \text{ etc.}\right)$ in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem continuo per terminos hujus progressionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, etc. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna descendentium in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini in prima columna per eandem progressionem, in secunda autem per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, etc. in tertia per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$ etc. in quarta per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$ etc.: in quinta per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$ etc.; et sic in infinitum. Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, et valores eorum aliquando commode per series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est, quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas aequationes ampliantur: quippe quae earum beneficio, ad omnia, paene dixerim, problemata (si numeralia Diophanti et similia excipias) sese extendit. Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quaedam Problemata, in quibus non liceat ad series infinitas per divisionem vel extractionem radicum simplicium affectarumve, pervenire; Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere, ut neque alia quaedam tradere, quae circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hae speculationes diu mihi fastidio esse coeperint, adeo, ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim. Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad infinitam aequationem deducitur, possint inde variae approximationes in usum mechanicae nullo fere negotio formari: quae per alias methodos quaesitae, multo labore temporisque dispendio constare solent, cujus rei exemplo esse possunt tractatus Hugenii aliorumque de quadratura circuli. Nam ut ex data arcus chorda A et dimidii arcus chorda B arcum illum proxime assequaris, finge arcum illum esse z, et circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ etc. et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ etc. Duc jam B in numerum fictitium n et a producto aufer A, et residui secundum terminum $\left(\text{nempe } - \frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}\right)$ eo ut evanescat, pone $= 0$, indeque emerget $n = 8$, et erit $8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ etc.; hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$ errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ etc. in excessu. — Quod est theorema Hugenianum.

Insuper si in arcus Bb (Fig. 15.) sagitta AD indefinite producta quaeratur punctum G, a quo actae rectae GB, Gb abscindant tangentem Ee, quam proxime aequalem arcui isti: esto circuli centrum C, diameter $AK = d$ et sagitta $AD = x$ et erit DB $(= \sqrt{dx - xx}) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}$ etc.; et AE $(= \text{AB}) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ etc. Et AE — DB : AD :: AE : AG, quare $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d}$ — vel + etc. Finge ergo $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$, et vicissim erit DG $\left(\frac{3}{2}d + \frac{6}{5}x\right)$: DB : : DA : AE — DB. Quare AE — DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$ etc. Adde DB et prodit AE $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + etc. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito et restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel — etc. Quare in AG cape AH quintam partem AD et KG = HC, et actae GBE, Gbe abscindent tangentem Ee, quam proxime aequalem arcui BAb errore tantum existente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel — etc., multo minore scilicet quam in Theoremate Hugenii. Quod si fiat 7AK : 3AH : : DH : n, et capiatur KG = CH — n, erit error adhuc multo minor.

Atque ita si circuli segmentum aliquod BAb per mechanicam designandum esset: primo reducerem aream istam in infinitam seriem, puta hanc BbA $= \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ — etc.; dein quaererem constructiones mechanicas, quibus hanc seriem proxime assequerer: cujus modi sunt haec. Age rectam AB, et erit segm. BbA $= \overline{\frac{2}{3}AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime, existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70dd}\sqrt{dx}$ + etc. in defectu: vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F et acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$, existente errore solummodo $\frac{x^3}{560dd}\sqrt{dx}$ + etc.: qui semper minor est quam $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

Sic et in Ellipsi BAb cujus vertex A, axis alteruter AK et latus rectum AP, cape PG $= \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times AP$;

in Hyperbola vero cape $Pg = \frac{1}{2} AP + \frac{19\,AK + 21\,AP}{10\,AK} \times AP$, et acta recta GBE abscindet tangentem AE, quam proxime aequalem arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo arcus ille non sit nimis magnus; et pro area segmenti hyperbolici BbA (Fig. 16): in DP cape $Dm = \frac{3\,AD^q}{4\,AK}$, et ad D et m erige perpendicula $D\beta$, mn occurrentia semicirculo super diametro AP descripto, eritque $\frac{4\,An + A\beta}{15} \times 4\,AD = BbA$ proxime; vel proximius, erit $\frac{21\,An + 4\,A\beta}{75} \times 4\,AD = BbA$, si modo capiatur $Dm = \frac{5\,AD^q}{7\,AK}$ *).

Hactenus Dn. Newtonus, quae ipsi mihi non vacabat transcribere. Vereor autem, ne Amanuensis meus saepicule fuerit hallucinatus, cum nonnisi perfunctorie et valde cursim relegere mihi licuerit. Tua ipsius sagacitas errores emendabit. Quando visum tibi fuerit respondere (quod ut otius fiat, precor) more solito literas mihi destinatas inscribi velim, nempe etc. Devincies me, si Nobilissimum Dn. Tschirnhause meo et Dn. Collinii nomine officiosissime salutes, ipsique dicas, has duas epistolas vos ambos spectare, et ab utroque vestrum responsionem expetere. Valete, et rem Mathematicam Philosophicamque augere pergite. Dabam Londini d. 26. Julii 1676.

P. S.

Ut Germanum hunc, Vratislaviensem, consiliis tuis juvare velis, impense oro. Nomen ipsius est Samuel Regius; vir videtur ob doctrinam et modestiam amore et omni officiorum genere dignus.

Sinas, Te moneam tui, quo Sc. Regiae obstrictus es, promissi, de Machina tua Arithmetica ipsi mittenda. Velim profecto, Te, Germanum, et dictae Societatis membrum, fidem datam liberare, et me istac sollicitudine, quae, concivis nomine, non parum me augit, quantocius levare. Iterum vale, et huic libertati meae ignosce.

---

*) Soweit ist der Brief von einem Abschreiber geschrieben; das Folgende hat Oldenburg eigenhändig hinzugefügt.

XXXVIII.

Leibniz an Oldenburg.

27 Aug. 1676.

Literae tuae, die 26 Julii datae, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare Tibi pariter ac Clarissimis Viris, Newtono ac Collinio, gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa Newtoni ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis et Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Aequationum, et Areas Figurarum per Series Infinitas, prorsus differt a mea: Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quae eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest (ut scilicet Indeterminata Quantitas in vinculum non ingreditur) quadravit, et ad Infinitas Series reducere docuit per Divisiones: Newtonus autem per Radicum Extractiones. Mea Methodus, Corollarium est tantum doctrinae generalis de Transformationibus, cujus ope Figura proposita quaelibet, quacunque Aequatione explicabilis, transmutatur in aliam analyticam aequipollentem, talem ut in ejus Aequatione ordinatae dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam simplicem Dignitatem, seu infimum gradum. Ita fiet ut quaelibet Figura, vel per Extractionem radicis Cubicae vel Quadraticae, Newtoni more; vel etiam, methodo Mercatoris, per simplicem Divisionem, ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero, ex his Transmutationibus, simplicissimam ad rem praesentem delegi. Per quam scilicet unaquaeque Figura transformatur in aliam aequipollentem rationalem, in cujus aequatione Ordinata in nullam prorsus ascendit Potestatem. Ac proinde sola Mercatoris Divisione per Infinitam Seriem exprimi potest.

Ipsa porro generalis Transmutationum methodus, mihi inter potissima Analyseos censenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas et ad Approximationes, sed et ad solutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia inservit. Ejus vero Fundamentum vobis candide libereque scribo; persuasus quae apud vos habentur praeclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est: Ut figura proposita rectis innumeris utcunque, modo secundum aliquam regulam sive legem ductis, resolvatur in partes; quae partes, aut aliae ipsis aequales, alio situ, aliave forma reconjunctae, aliam componant figuram priori aequipollentem, seu ejusdem areae; etsi alia longe figura constantem. Unde ad Quadraturas absolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel serie infinita expressas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.

Ut intelligatur, sit (Fig. 17) $AQCDA$. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in Trapezia $_1B\,_2D$; $_2B\,_3D$, etc. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in Triangula $E_1D\,_2D$, $E\,_2D\,_3D$ etc. Si jam alia sit curva $A\,_1F\,_2F\,_3F$, cujus Trapezia $_1B\,_2F$, $_2B\,_3F$, sint Triangulis $E\,_1D\,_2D$, $E\,_2D\,_3D$, ordine respondentibus aequalia, tota figura $AE\,_3D\,_2D\,_1DA$, toti figurae $A\,_1F\,_2F\,_3F\,_3BA$ erit aequalis.

Quinetiam Trapezia Trapeziis conferendo, fieri potest ut $_1N\,_2P$; vel quod eodem redit, Rectangulum $_1N\,_2N\,_2P$, sit aequale Trapezio respondenti $_1B\,_2D$, sive Rectangulo $_1B\,_2B\,_2D$, tametsi recta $_1N\,_1P$ non sit aequalis rectae $_1B\,_1D$, modo sit $_1N\,_2N$ ad $_1B\,_2B$ ut $_1B\,_1D$ ad $_1N\,_1P$; quod infinitis modis fieri potest.

Quae omnia talia sunt ut cuivis statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant; contineantque Indivisibilium Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelae et Convergentes, sed et aliae quaecunque certa lege ductae, rectae vel curvae, adhiberi possunt ad resolutionem. Quanta autem et quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse.

Sed nunc quidem sufficerit applicationem ostendere ad id de quo agitur; Series scilicet Infinitas, et modum Transformandi figuram datam in aliam aequipollentem rationalem, Mercatoris methodo tractandam.

$AQCA$ sit Quadrans Circuli, Radius $AQ = r$, Abscissa $A\,_1B = x$, Ordinata $_1B\,_1D = y$, Aequatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta $A\,_1D$: producaturque donec ipsi QC etiam productae occurrat in $_1N$. Et $Q\,_1N$ vocetur z. Et erit A_1B seu $x = \frac{2r^3}{r^2 + x^2}$, et $_1B\,_1D$ sive $y = \frac{2zr^2}{r^2 + z^2}$. Eodem modo, ducta $A\,_2D\,_2N$; si $Q\,_2N = z - \beta$ (posita scilicet $_1N\,_2N$

$= \beta)$ erit $A\,{}_2B = \dfrac{2r^3}{r^2+x^2-2z\beta+\beta^2}$; et $A\,{}_2B - A\,{}_1B$ sive recta ${}_1B\,{}_2B$, erit $\dfrac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \dfrac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive, posita β infinite parva, (post destructiones et divisiones) erit ${}_1B\,{}_2B = \dfrac{4r^3z\beta}{\overline{\lfloor 2 \rfloor\, r^2+z^2}}$. Habita ergo recta ${}_1B\,{}_1D$, et recta ${}_1B\,{}_2B$, habebitur valor Rectanguli ${}_1D\,{}_1B\,{}_2B$, multiplicatis eorum valoribus in se invicem; habebitur inquam $\dfrac{8r^5zz\beta}{\overline{\lfloor 3 \rfloor\, r^2+z^2}}$, pro valore Rectanguli ${}_1D\,{}_1B\,{}_2B$.

Sit jam Curvae ${}_1P\,{}_2P\,{}_3P$ etc. natura pro arbitrio assumpta talis, ut Ordinata ejus ${}_1N\,{}_1P$ (ex data abscissa $Q\,{}_1N$ sive z) sit $\dfrac{8r^5z^2}{\overline{\lfloor 3 \rfloor\, r^2+z^2}}$. Ideo, quoniam ${}_1N\,{}_2N = \beta$, erit rectangulum ${}_1P\,{}_1N\,{}_2N$, etiam $\dfrac{8r^5z^2\beta}{\overline{\lfloor 3 \rfloor\, r^2+z^2}}$. Ac proinde aequale Rectangulo ${}_1D\,{}_1B\,{}_2B$, et spatium ${}_1P\,{}_1N\,{}_3N\,{}_3P\,{}_2P\,{}_1P$ aequale spatio Circulari respondenti ${}_1D\,{}_1B\,{}_3B\,{}_3D\,{}_2D\,{}_1D$. Est autem quaelibet Ordinata NP rationalis, ex data abscissa QN; quia, posita

$QN = z$, Ordinata NP est $\dfrac{8r^5z^2}{\overline{\lfloor 3 \rfloor\, r^2+z^2}}$, sive

$\dfrac{8r^5z^2}{r^6+3r^4z^2+3r^2z^4+z^6}$. Ergo ipsa per infinitam Seriem Integrorum exprimi potest, dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehensum, aequipollens Circulari, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo Mercatoris quadrari potest. Quod cum facillimum sit, facere hic omitto. Neque enim elegantiae suae, sed Methodi generalis explicandae causa, hoc exemplum assumpsi.

Ita siquis loco Circuli mihi dedisset Curvam, in qua Ordinata ascendisset ad gradum Cubicum, potuissem eam reducere ad Curvam, in qua Ordinata non assurrexisset ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Itaque semper, sive Extractionibus Radicum Newtonianis (gradus cujuslibet dati) vel Divisionibus Mercatoris, poterit cujuslibet Figurae spatium inveniri, interventu alterius Aequipollentis. Multum autem ad simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli, et Sectoris Conici Centrum habentis cujuslibet, per Series Infinitas quadraturarum simplicissimam hanc esse dicere ausim, quam nunc subjicio.

Sit QA_1F (Fig 17) Sector, duabus rectis in Centro Q concurrentibus, et Curva Conica A_1F_1 ad Verticem A sive Axis extremum perveniente, comprehensus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens $_1FT$. Ipsam AT vocemus t; et Rectangulum sub Semilatere Recto in Semilatus Transversum sit Unitas. Erit Sector Hyperbolae, Circuli, vel Ellipseos, per Semilatus Transversum divisus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ etc. signo ambiguo $\pm$, valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde, posito Quadrato Circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. Quae expressio, jam Triennio abhinc et ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima est maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam sequentem;

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{24}\quad\frac{1}{35}\quad\frac{1}{48}\quad\frac{1}{63}\quad\frac{1}{80}\quad\frac{1}{99}\quad\frac{1}{120}\ \text{etc.} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{35}\quad\frac{1}{63}\quad\frac{1}{99}\ \text{etc.} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{8}\quad\frac{1}{24}\quad\frac{1}{48}\quad\frac{1}{80}\quad\frac{1}{120}\ \text{etc.} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{99}$ etc.	Exprimit	Circuli A B C D, Fig. 18.	Cujus Quadratum
$\frac{1}{8}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{120}$ etc.	arcum	Hyperbola aequilaterae CBEFC, Fig. 18.	inscriptum est $\frac{1}{4}$.

Numeri 3, 8, 15, 24, etc. sunt Quadrati Unitate minuti.

Vicissim, ex Seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Si sit numerus aliquis Unitate minor $1 - m$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l, erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Si numerus sit major Unitate, ut $1 + n$, tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula, quae in Newtoni Epistola expressa est; scilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque efficio ut ea possim uti, etiam cum major est Unitate numerus $1 + n$. Nam idem est Logarithmus pro $1 + n$ et pro $\frac{1}{1 + n}$.

Unde, si $1+n$ major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1-m=\frac{1}{1+n}$, ac inventa m, habebitur et $1+n$, numerus quaesitus.

Quod regressum ex Arcubus attinet, incideram ego directe in Regulam quae ex dato Arcu, Sinum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Complementi $=1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. Sed postea quoque deprehendi, ex ea illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto, qui est $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ etc. posse demonstrari. Quod tribus Verbis sic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, seu omnium $1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. est $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ etc. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (seu Arcui in locis debitis insistentium) aequatur Sinui Recto, ducto in Radium; ut notum est Geometris. Id est, aequatur ipsi Sinui Recto, quia Radius hic est Unitas. Ergo Sinus Rectus $=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1\times2\times3}+\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ etc. Hinc etiam ex dato Arcu et Radio, sine ulla prorsus aliorum notitia, haberi potest Area Segmenti Circularis duplicati: quae est $\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ etc. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus et Minuta etc. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur haec expressio: Ut Sinus Complementi c ponatur $=1-\frac{a^2}{1\times2}+\frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$; quoniam, sola memoria retenta, omnibus casibus et operationibus, directis scilicet simul et reciprocis, sufficit; Quod ideo fit, quoniam Aequatio $c=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$ est Plana. Unde si vicissim quaeras Arcum, ex Sinu Complementi radix extrahi potest; adeoque fiet Arcus $a=\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$ exacte satis ad usum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error aequationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quae his fortasse elegantia et exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerumque, Methodis Generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere aestimanda sunt, nisi quod artem inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quae obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac methodo Aequationum quoque, utcunque affectarum, Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet: Ut, Originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates p, q, r, in suis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat; ut, cum ex Logarithmo quaerit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: Quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quae suppressit, ex sola earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere Newtonum: Quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper praeclari nos doceat Vir (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio, quae Doctissimus Collinius communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis Gregorianae linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem; quae fiat sine ulla Bisectione Anguli; imo, sine supposita Circuli Constructione; solo Rectarum ductu.

Vellem Gregoriana omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus. Caeterum ejus Demonstrationi editae, de Impossibilitate Quadraturae Absolutae Circuli et Hyperbolae, multa haud dubie desunt.

De Aequationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis, sive, quod idem est, tollendis Aequationum potestatibus intermediis, multa et ego meditatus sum, et jam Vere anni superioris Specimina Hugenio communicaveram Regularum Cardanicis similium. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus et Cardanica continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales Perspexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo Tschirnhausio relinquo, qui hic ad eadem quae ego habebam Specimina, imo et alia praeterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quae Collinius ait de Gregoriana Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo consistat ejus substantia.

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem, frustra putem sperari, imo quaeri. Neque enim illae ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et Verae Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, radix extrahetur; nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$; supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tunc cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest; mente tamen intelligitur. Quare frustra Cartesius aliique expressiones Cardanicas pro particularibus habuere. Siquis posset invenire Quadraturam Circuli, et ejus Partium, ex data Hyperbola et ejus Partium quadratura; is posset eas tollere; modo in ipsam Quadraturam Imaginariae illae non rursus ingrediantur.

Caeterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices aequationum Irrationales, necessario sequitur res satis paradoxa: Scilicet omnes Aequationes gradus Octavi, Noni, Decimi, posse ad gradum Septimum reduci. Itaque et omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia, possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi, qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi, qui ante meditabitur: cum, ut praevideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quaedam, per quae spes est Calculi magnam partem abscindi, remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed siquis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Aequationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda, qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quae non minoris futurae essent usus in Analysi, quam Tabulae Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulae pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analysi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possent inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore; Arte scilicet Combinatoria generali ac vera, cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consequutus. Ea vero nihil differt ab Analysi illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, Cartesius non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus est Analysi Axiomatum. Sed non miror ista nemini satis considerata: Quia plerumque facilia negligimus; et multa, quae clara videntur, assumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum; nec genus Calculi, etiam non-Mathematicis accommodati, obtinebimus.

Optarim Cl. Pellium generalia sua Meditata, et illud speciatim quod memoras Cribrum Eratosthenis, non supprimere. Nam etsi omnia forte, quae destinarat, non absolverit; Meditata tamen ipsa, et consilia egregiorum Virorum non perire, publici interest. Utilia quoque futura sunt, quae de Sinuum Tabula ad Aequationes accommodanda habet. Item de Limitibus et Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus Diophanteis) ad Series Infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab Aequationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata methodi Tangentium inversae; quae etiam Cartesius in potestate non esse fassus est.

In tomo 3. Epistolarum, una habetur ad Beaunium; in qua, ad propositas a Beaunio, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est Ludus Naturae, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam, et ordinatim applicatam, ex Curva ad directricem, sit semper idem; recta scilicet constans. Hanc Curvam nec Cartesius nec Beaunius nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim certa Analysi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum: quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; Problemataque circa Elateria, et Aquas et Pendula, et Projecta, et Solidorum Resistentiam, et Frictiones, etc. definiam. Quae hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo; quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, Totum esse majus parte, circa Magnitudinem.

De Centro barices quoque singularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diversas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica, magno usui futuras. Haec ubi (Deo volente) absolvero; reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturae indagationi debeo.

Tschirnhausius proximo Tabellione scribet.

XXXVIII.

Newton an Leibniz*).

Cantabr. Octob. 24. 1676.

Quanta cum voluptate legi Epistolas clarissimorum virorum D. Leibnitii et D. Tschirnhausii, vix dixerim. Perelegans sane est Leibnitii methodus perveniendi ad series convergentes, et satis ostendisset ingenium Authoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quae alibi per Epistolam sparguntur suo nomine dignissima, efficiunt etiam, ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum, quibus eodem tenditur, eo magis placuit, quod mihi tres methodi perveniendi ad ejusmodi series innotuerant, adeo ut novam nobis communicandam vix expectarem. Unam e meis prius descripsi; jam addo aliam, illam scilicet qua primum incidi in has series: nam incidi in eas antequam scirem divisiones et

*) Oldenburg hat bemerkt: Copied Nov. 4. 1676. — Dieses Schreiben ist bereits gedruckt.

extractiones radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolae prioris positi, quod D. Leibnitius a me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in opera celeberrimi Wallisii nostri, considerando series, quarum intercalatione exhibet aream circuli et hyperbolae, utpote quod in serie curvarum, quarum basis sive axis communis sit x, et ordinatim applicatae

$\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$; $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$, etc. si areae alternarum, quae sunt x, $x - \frac{1}{3}x^3$, $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$, $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ etc. interpolari possent, haberemus areas intermediarum, quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ est circulus: ad has interpolandas notabam quod in omnibus primus terminus esset x, quodque secundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$ etc. essent in arithmetica progressione; et proinde quod duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$ etc.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quod denominatores 1, 3, 5, 7 etc. erant in arithmetica progressione adeoque solae numeratorum coefficientes numerales restabant investigandae. Hae autem in alternis datis areis erant figurae potestatum numeri 11, nempe harum $\overline{11}|^0$, $\overline{11}|^1$, $\overline{11}|^2$, $\overline{11}|^3$, $\overline{11}|^4$, hoc est, primo 1, dein 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1 etc.

Quaerebam itaque, quomodo in his seriebus ex datis duabus primis figuris reliquae derivari possent, et inveni, quod posita secunda figura m, reliquae producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ etc.

E. gr. sit $m = 4$, et erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus; et $6 \times \frac{m-2}{3}$ hoc est 4, quartus; et $4 \times \frac{m-3}{4}$

hoc est 1, quintus; et $1 \times \frac{m-4}{5}$ hoc est 0, sextus, quo series in hoc casu terminatur. Hanc regulam itaque applicui ad series interserendas, et cum pro circulo secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, posui $m = \frac{1}{2}$ et prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ sive $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$, et sic in infinitum. Unde cognovi, desideratam aream segmenti circularis esse: $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ etc. Et eadem ratione prodierunt etiam interserendae areae reliquarum curvarum, ut et area hyperbolae et ceterarum alternarum in hac serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$ etc. Et eadem est ratio intercalandi alias series idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium. Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes; qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quaedam ante paucas septimanas retulissem.

Ubi vero haec didiceram, mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{1}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{1}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{1}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{1}}$ etc., hoc est 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$ etc., eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7 etc. in terminis exprimentibus areas; hoc est coefficientes terminorum quantitatis intercalandae $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ etc. Adeo ut e. gr. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ valeret $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}xx + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc. Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas series per regulam illam, quam posui initio epistolae prioris, antequam scirem extractionem radicum. Sed hac cognita non potuit altera me diu latere: nam, ut probarem has operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}x^2$

$-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. in se, et factum est $1 - xx$; terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc. bis in se ductum produxit etiam $1 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hae series, quas sic constitit esse radices quantitatis $1 - xx$, non possent inde extrahi more arithmetico. Et res bene successit. Operationis forma in quadraticis radicibus haec erat,

$$1 - xx\ \Big(1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{1} \\
0 - xx \\
\underline{-xx + \frac{1}{4}x^4} \\
\quad 0 - \frac{1}{4}x^4 \\
\quad \underline{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8} \\
\qquad\qquad 0 - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
\end{array}$$

His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior. Sed et resolutionem affectarum aequationum mox aggressus sum, eamque obtinui: Unde simul ordinatim applicatae, segmenta axium, aliaeque quaelibet rectae ex areis curvarum vel arcubus datis innotuere. Nam regressio ad haec nihil indigebat praeter resolutionem aequationum, quibus areae vel arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere, et alia cogitare; addidi tamen subinde condituram quandam Logarithmorum ex area Hyperbolae, quam hic subjungo. Sit dFD hyperbola (Fig. 19), cujus centrum C, vertex F, et quadratum interjectum CAFE = 1. In CA cape AB, Ab, hinc inde $= \frac{1}{10}$ sive 0.1; et erectis perpendiculis BD, bd ad hyperbolam terminatis, erit semisumma spatiorum AD et Ad = 0.1 $+ \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ etc. et semidifferentia = $\frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ etc. quae reductae sic se habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum summa 0.1053605156577 est Ad, et differentia 0.0953101798043 est A D. Et eadem ratione positis A B, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur Ad = 0.2231435513142, et A D = 0.1823215567939.

Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, 1.2; cum sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, et 0.8 et 0.9 sint minores unitate: adde logarithmos illorum ad duplum logarithmi 1.2 et habebis 0.6931471805597, logarithmum hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde log. 0.8, siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$, et habebis 2.3025850929933 logarithmum numeri 10, indeque per additionem simul prodeunt logarithmi numerorum 9 et 11; adeoque omnium primorum 2, 3, 5, 11, logarithmi in promtu sunt. Insuper ex sola depressione numerorum superioris computi per loca decimalia, et additione, obtinentur Logarithmi decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02, ut et horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002, et inde per additionem et subtractionem prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37 etc. qui una cum superioribus per log. num. 10 divisi evadunt veri Logarithmi, in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosus eo tempore perduxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodiit ingeniosa illa N. Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) coepi ea minus curare, suspicatus vel eum nosse extractionem radicum aeque ac divisionem fractionum, vel alios saltem, divisione patefacta, inventuros reliqua, priusquam ego aetatis essem maturae ad scribendum. Eo ipso tamen tempore, quo liber iste prodiit, communicatum est ab amico ad D. Collinsium, Compendium *) quod

*) Es ist dies die Abhandlung: De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, die erst nach Newton's Tode durch den Druck veröffentlicht wurde. Sie findet sich in Newton. opusc. ed. Castillon. Tom. I. p. 1. sqq.

dam methodi harum serierum, in quo significaveram, areas et longitudines curvarum omnium et solidorum superficies et contenta ex datis rectis, vice versa ex his datis rectas determinari posse, et methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus. Suborta deinceps inter nos Epistolari consuetudine, D. Collinsius, vir in rem mathematicam provehendam natus, non destitit suggerere, ut haec publici juris facerem. Et ante annos quinque cum, suadentibus amicis, consilium coeperam edendi Tractatum de refractione Lucis et Coloribus, quem tunc in promtu habebam, coepi de his seriebus iterum cogitare, et tractatum de iis etiam conscripsi ut utrumque simul ederem. Sed ex occasione Telescopii catadioptrici, Epistola ad te missa, qua breviter explicui conceptus meos de natura Lucis, inopinatum quiddam effecit, ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de impressione istius Epistolae. Et subortae statim per diversorum Epistolas, objectionibus aliisque refertas, crebrae interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, et effecerunt, ut me arguerem imprudentiae quod umbram captando eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore Gregorius ex unica tantum serie quadam e meis quam D. Collinsius ad eum transmiserat, post multam considerationem, ut ad Collinsium rescripsit, pervenit ad eandem methodum, et tractatum de ea reliquit, quem speramus ab amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio, quo pollebat, non potuit non adjicere de suo nova multa, quae rei mathematicae interest ut non pereant. Ipse autem tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc usque diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars illa, qua decreveram explicare modum solvendi Problemata, quae ad quadraturas reduci nequeunt, licet aliquid de fundamento ejus posuissem.

Ceterum in tractatu isto series infinitae non magnam partem obtinebant. Alia haud pauca congessi, inter quae erat methodus ducendi tangentes, quam solertissimus Slusius ante annos duos tresve tibi communicavit; de qua tu, suggerente Collinsio, rescripsisti, eandem mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonstratione, prout ego operor. Habito meo fundamento nemo potuit tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviaret. Quin etiam non hic haeretur ad aequationes radicalibus, unam vel utramque indefinitam quantitatem involventibus, utcunque affectas; sed absque aliqua talium aequationum reductione (quae opus plerumque redderet immensum) tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quaestionibus de Maximis et Minimis, aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor. Fundamentum harum operationum, satis obvium quidem; quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi, sic potius celavi, 6accdae13eff7i319n4o4qrr4s8t12vx. *) Hoc fundamento conatus sum etiam reddere speculationes de Quadratura curvarum simpliciores, pervenique ad Theoremata quaedam generalia. Et ut candide agam, ecce primum Theorema.

Ad**) curvam aliquam sit $dz^{\theta} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda}$ ordinatim applicata, termino diametri seu basis z normaliter insistens: ubi

---

*) Dies bedeutet: Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa.

**) Leibniz hat hier am Rande des Briefes bemerkt:

$$\int \overline{dz\, z^m \boxed{n} e + fz^{\frac{h}{\cdot}}}, \quad \int \overline{dz\, z^m \omega^n} = \theta,\ \omega = e + fz^{\frac{h}{\cdot}}, \quad d\omega = fh . z^{\frac{h-1}{\cdot}} dz,$$

$$z = \overline{\omega - e : f} \boxed{1:h} \text{ et } dz = \overline{d\omega : fh \frac{\omega - e}{f}} \boxed{\frac{1-h}{h}} \text{ et}$$

$$\theta = \int \overline{\frac{\omega - e}{f}} \boxed{\frac{1-h+m}{h}} \omega^n d\omega.$$

Ita res reducta ad terminos simpliciores, itaque si sit $1-h+m, : h = g$, fiet $\theta = \int \overline{\frac{\omega - e}{f}} \boxed{g} . \omega^n . d\omega$, unde si g sit integer habetur solutio absoluta, quae videtur esse theorematis hic scripti origo. Si loco $z^{\frac{m}{\cdot}}$ affuisset $z^m \overline{\boxed{r} b + dz^c}$ prodiisset $\theta = \int, \overline{\frac{\omega - e}{f}} \boxed{g} . \omega^n,\ \overline{\boxed{r} b + d . \overline{\frac{\omega - e}{f}} \boxed{c:h}}$.

Ergo si $g =$ rationali, tunc $\int dz\, z^m . \overline{b + d . z^{\frac{c}{\cdot}}}^{r} . \overline{e + f . z^h}^{r}$ reducitur ad aliquot finitas $x\omega^n,\ \overline{b + d . \overline{\frac{\omega - e}{f}} \boxed{e:h}}^{r}$.

Haec maximi momenti. Si $h = 1$, fit g integer, posito m integro Sed hinc nihil lucramur. Si faciamus $v = \boxed{n} \overline{e + f . z^h}$, fiet $v^{1:n} - e = f . z^h$ et $v^{\frac{1:n-1}{\cdot}} dv : nf = h . z^{\frac{h-1}{\cdot}} dz$ et $z = \overline{v^{\frac{1:n}{\cdot}} - e, : f} \boxed{1:h}$ et $dz = \frac{dv}{hnf} . v^{\frac{1:n-1}{\cdot}}$ in $\overline{v^{\frac{1:n}{\cdot}} - e, : f} \boxed{\frac{1-n}{n}}$ et fit $\int dz . z^m . \overline{e + fz^{\frac{h}{\cdot}}}^{n} \overline{b + dz^c}$, et $dz . z^m e + fz^h$ etc literae d, e, f denotant quaelibet quantitates datas, et ϑ, η, λ, indices potestatum sive dignitatum quantitatum, quibus affixae sunt. Fac $\frac{\vartheta+1}{\eta}=r$, $\lambda\times r=s$, $\frac{d}{\eta f}+\overline{e+fz^{\eta}}\big|^{\lambda+1}=Q$, et $r\eta-\eta=\pi$, et area curvae erit Q in $\frac{z^{\pi}}{s}-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}+\frac{r-2}{s-2}\times\frac{eB}{z^{\eta}}-\frac{r-3}{s-3}\times\frac{eC}{fz^{\eta}}+\frac{r-4}{s-4}\times\frac{eD}{fz^{\eta}}$ etc. literis A, B, C, D etc. denotantibus terminos proxime antecedentes, nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}$ etc. Haec series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum: ubi viro r integer est et affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt unitates in eodem r, et sic exhibet geometricam quadraturam curvae. Rem exemplis illustro.

Ex. 1. Proponatur Parabola, cujus ordinatim applicata sit $\sqrt{az}$; haec in formam Regulae reducta, fit $z^{0}\times\overline{0+az^{1}}\big|^{\frac{1}{2}}$: quare est $d=1$, $\vartheta=0$, $e=0$, $f=a$, $\eta=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeoque $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $Q=\frac{1}{a}\times\overline{az}\big|^{\frac{3}{2}}$, $\pi=0$. Et area quaesita $\frac{1}{a}+\overline{az}\big|^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$, hoc est $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$; et sic in genere, si cz^{η} ponatur ordinatim applicata, prodibit area $\frac{c}{\eta+1}\,z^{\eta+1}$.

Ex. 2. Sit ordinatim applicata $\frac{a^{4}z}{c^{4}-2cczz+z^{4}}$. Haec per reductionem fit $a^{4}z\times\overline{cc-zz}\big|^{-2}$ vel etiam $a^{4}z^{-3}\times\overline{-1+ccz^{-2}}\big|^{-2}$. In priori casu est $d=a^{4}$, $\vartheta=1$, $e=cc$, $f=-1$, $\eta=2$, $\lambda=-2$, adeoque $r=1$, $s=-1$, $Q=\frac{a^{4}}{-2}-\times\overline{cc-zz}\big|^{-1}$, hoc est $=\frac{-a^{4}}{2cc-2zz}$, $\pi=0$. Et

---

$=\frac{dv}{hnf}v^{\frac{1:n}{\cdot}}$ in $\overline{v^{1:n}-e, : f}\big|^{\frac{1-h+m}{h}}$ in $\overline{b+d\frac{v^{\frac{1:n}{\cdot}}-e}{f}}\big|^{c}$, ita revera, posito $\frac{1-h+m}{h}$ esse integrum, obtenda est depressio. Si h sit 1, quantitate sub irrationali contenta resoluta in plures divisores, et unum ex his irrationalem ponendo v, habetur depressio.

area curvae $= Q$ in $\frac{z^0}{-1}$ id est $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu est $d = a^4$, $\vartheta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^4}{-2cc} \times \overline{-1 + cc z^{-2}}|^{-1}$ id est $= \frac{-a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = o$. Et area $= Q$ in $\frac{z^0}{1}$, hoc est $= \frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores arearum facilis est.

Exempl. 3. Sit ordinatim applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz + zz}$, hoc est, per reductionem ad debitam formam, vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$ vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1 - b z^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit in priori casu $d = a^5$, $\vartheta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = -\frac{7}{2}$ etc. quare cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum: hic est $d = a^5$, $\vartheta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = \frac{a^5}{-b} \times \overline{1 + b z^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$ seu $= -\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et area $= Q$ in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est $= \frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105 bbzz} \times \frac{a^5 z + a^5 b}{bzz}\sqrt{zz - bz}$.

Exempl. 4. Sit denique ordinatim applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[(5)]{c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3ac z^{\frac{4}{3}} - a^3 zz}}$. Haec ad formam Regulae reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - a z^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$; indeque est $d = b$, $\vartheta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = \frac{3b}{-2a} \times \overline{c - a z^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{5}$ et area $= Q \times \frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times \frac{5c}{-7a}$ id est $= \frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - a z^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$. Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo, tunc tentassem alterum casum purgando terminum $-az^{\frac{3}{8}}$ in ordinatim applicata a coefficiente $z^{\frac{3}{8}}$, hoc est, reducendo ordinatim applicatam ad hanc formam $bz^{-\frac{13}{8}} \times \overline{-a+cz^{-\frac{3}{8}}}|^{-\frac{1}{2}}$, et si r in neutro casu fuisset numerus integer et affirmativus, conclusissem curvam ex earum numero esse, quae non possunt geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, haec Regula exhibet in finitis aequationibus areas omnium, geometricam quadraturam admittentium curvarum, quarum ordinatim applicatae constant ex potestatibus, radicibus, vel quibuslibet dignitatibus binomii cujuscunque*).

At quando hujusmodi curva aliqua non potest geometrice quadrari, sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum conicis sectionibus, vel saltem cum aliis figuris simplicissimis quibuscum potest comparari: Ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debite concinnetur. Pro trinomiis etiam et aliis quibusdam, Regulas quasdam concinnavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evasit aliorum conatus, nisi forte longitudo Cissoidis ejusmodi censeatur. Ea sic construitur (Fig. 20).

Sit VD Cissois, AV diameter circuli, ad quem aptatur, V vertex, AF asymptotos ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semiaxe AF $=$ AV et semiparametro AG $= \frac{1}{3}$ AV, describatur Hyperbola FK, et inter AB et AV sumta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendicula Ck et VK Hyperbolae occurentia in k et K, et agantur rectae KT et kt tangentes hyperbolam in iisdem K et k, et occurrentes AV in T ac t, et ad AV constituatur rectangulum AVNM aequale spatio TKkt; et cissoidis VD logitudo erit sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est; sed ad infinitas series redeo.

---

*) So lautet diese Stelle in der Copie, die Leibniz von Oldenburg zugesandt würde; in Leib. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. sowohl, als in Newton opusc. ed. Castillon Tom. I. folgen nach „cujuscunque" die Worte: licet non directe, ubi index dignitatis est numerus integer.

Quamvis multa restent investiganda circa modos approximandi et diversa serierum genera, quae possunt ad id conducere; tamen vix cum Dn. Tschirnhausio speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi quantitates ad hoc genus serierum, de quo agimus, quam sunt divisiones et extractiones radicum, quibus Leibnitius et ego utimur. Saltem non generaliora, quia pro Quadratura et εὐθύνσει curvarum ac similibus, nullae possunt dari series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis, unicam tantum indefinitam quantitatem involventibus, constantes, quas non licet hac methodo colligere. Nam non possunt esse plures hujusmodi convergentes series ad idem determinandum, quam sunt indefinitae quantitates, ex quarum potestatibus series conflentur; et ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate seriem novi colligere. Et idem credo Leibnitio in potestate esse. Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere pro conflanda serie quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quaesitum dependeat, et methodus, quam ipse nobis communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad fractiones, quae per solam divisionem evadant series infinitae; tamen aliae quaecunque indefinitae quantitates pro seriebus conflandis adhiberi possunt per methodum istam, qua affectae aequationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis, hoc est conficiendo seriem ex solis terminis, quos aequatio involvit.

Praeterea non video, cur dicatur his divisionibus et extractionibus problemata resolvi per accidens, siquidem hae operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebrae, ac vulgares operationes Arithmeticae ad Algebram vulgo notam. Quod autem ad simplicitatem methodi attinet, nolim fractiones et radicales absque praevia reductione semper resolvi in series infinitas. Sed ubi perplexae quantitates occurrunt, tentandae sunt omnimodae reductiones, sive id fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas, sive per methodum transmutatoriam Leibnitii, aut alio quocunque modo, qui occurrat. Et tunc resolutio in series per divisionem et extractionem optime adhibebitur. Hic autem praecipue nitendum est, ut Denominatores fractionum et quantitates in vinculo radicum reducantur ad quam paucissimas et minime compositas, et ad tales etiam, quae in seriem abeant citissime convergentem, etsi radices neque convertantur in fractiones, neque deprimantur. Nam per Regulam initio alterius epistolae, extractio altissimarum radicum aeque simplex et facilis est ac extractio radicis quadraticae, vel divisio, et series, quae per divisionem eliciuntur, solent minime omnium convergere. Hactenus de seriebus unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus sum: Sed possunt etiam perspecta methodo series ex duabus vel pluribus assignatis indefinitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quin etiam beneficio ejusdem methodi possunt series ad omnes figuras efformari, Gregorianis ad circulum et hyperbolam editis affines, hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quaesitam aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire. Possunt denique series ex terminis compositis eadem methodo constitui: quemadmodum si sit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ ordinatim applicata curvae alicujus, pono $aa - ax = zz$ et ex binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ etc. cujus seriei omnes termini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hoc minoris facio, quod ubi series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quaesitum. Ejus fundamentum est commoda, expedita, et generalis solutio hujus problematis: Curvam Geometricam describere quae per data quotcunque puncta transibit. Docuit Euclides descriptionem circuli per tria data puncta; potest etiam conica sectio describi per quinque data puncta, et curva trium dimensionum per septem data puncta, adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium curvarum istius ordinis, quae per septem tantum puncta determinantur. Haec statim geometrice fiunt nullo calculo interposito: Sed superius Problema est alterius generis. Et quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis, quae solvere desiderem.

Seriei a D. Leibnitio pro quadratura conicarum sectionum propositae affinia sunt theoremata quaedam, quae pro comparatione curvarum cum conicis sectionibus in catalogum dudum retuli. Possum utique cum conicis sectionibus geometrice comparare curvas omnes numero infinities infinitas, quarum ordinatim applicatae sunt

$$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ vel } dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} \text{ vel } dz^{\eta-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} \text{ etc.}$$

Hic d, e, f, g, significant quasvis datas quantitates cum suis signis $+$ et $-$ affectas, z axem vel basim curvae, et η, 2η $\frac{1}{2}\eta-1$, $\frac{3}{2}\eta-1$, $\eta-1$, $2\eta-1$, indices potestatum vel dignitatum z, sive sint affirmativi vel negativi, sive integri vel fracti; et singula bina Theoremata sunt duo primi termini seriei in infinitum progredientis. In tertio et quarto $4eg$ debet esse non majus quam ff, nisi e et g sint contrarii signi: in ceteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe secundum, tertium, quartum, quintum et decimum tertium) ex areis duarum conicarum sectionum conjunctis constant. Alia quaedam (ut nonum, decimum, et duodecimum) sunt aliter satis composita. Et omnia quidem in continuatione progressionum evadunt compositissima; adeo ut vix per transmutationes figurarum, quibus Gregorius et alii usi sunt, absque ulteriori fundamento inveniri posse putem. Ego equidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abstraherem a contemplatione figurarum, et rem totam ad simplicem considerationem solarum ordinatim applicatarum reducerem. Sed cum haec et his generaliora sint in potestate, non dubitabitur, credo, de binomialibus longe facilioribus, quae in his continentur, et prodeunt ponendo tantum litteram aliquam e vel f vel g $=0$, et $\eta=1$ vel 2; etsi series, in quas ista resolvantur non posuerim in epistola priori, intentus non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam methodum per unam et alteram in singulis rerum generibus instantiam; quae ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

Caeterum haec Theoremata dant series plusquam uno modo. Nam primum si ponatur $f = 0$ et $\eta = 1$, evadit $\frac{d}{e + gzz}$, unde prodit series nobis communicata. Sed si ponatur $2eg = ff$, et $\eta = 1$, inde tandem obtinemus hanc seriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. pro longitudine quadrantalis arcus, cujus chorda est unitas, vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143}$ etc. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia aeque simplices sunt ac alterae et magis convergunt, non repudiabitis. Sed ego rem aliter aestimo. Illud enim melius, quod utilius est, et Problema minori labore solvit. Sic quamvis haec aequatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$, tamen in confesso est, posteriorem revera simpliciorem esse, propterea quod radicem ejus y Geometra facilius eruit. Et ob hanc rationem series pro obtinendis arcubus circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis sectoribus conicarum sectionum pro optimis habeo, quae componuntur ex potestatibus sinuum.

Nam si quis vellet per simplex computum hujus seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} +$ etc. colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5000000000 terminis seriei circiter, ad quorum calculum milleni anni requirerentur; et res tardius obtineretur per tangentem 45 grad. Sed adhibito sinu recto 45 grad. quinquaginta quinque vel sexaginta termini hujus seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}$ etc. sufficerent, quorum computatio tribus ut opinor vel quatuor diebus absolvi posset. Et tamen hic non est optimus modus computandi totam peripheriam: nam series ex sinu recto triginta graduum vel ex sinu verso sexaginta graduum conflata, multo citius dabit arcum suum, cujus sextuplum vel duodecuplum est tota peripheria. Neque minori labore eruitur area totius circuli ex segmento, cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; et una adjungere aream Hyperbolae, quae eodem calculo prodit.

Posito axe transverso aequali 1 et sinu verso seu segmenti sagitta $= x$, erit semisegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperpolae}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in $\overline{\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}}$ etc. Haec autem series sic in infinitum producitur; sit $2x^{\frac{3}{2}} = a$, $\frac{ax}{2} = b$, $\frac{bx}{4} = c$, $\frac{3cx}{6} = d$, $\frac{5dx}{8} = e$, $\frac{7ex}{10} = f$ etc. et erit semisegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolae}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ etc. eorumque semisumma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11}$ etc. et semidifferentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13}$ etc. His ita praeparatis suppono x esse $\frac{1}{4}$, quadrantem nempe axis, et prodit $a \left(= \frac{1}{4}\right) = 0.25$; $b \left(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1 \times 8}\right) = 0.03125$; $c \left(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2 \times 8}\right) = 0.001953125$; $d \left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}\right) = 0.000244140625$. Et sic procedo usque dum venero ad terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11 etc. respective divisos dispono in duas tabulas; ambiguos cum primo in unam, et negativos in aliam et addo ut hic vides:

0.0833333333333333	0.0002790178571429
6250000000000	3467906051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
46	0.0002825719389575.
1	
0.0896109885646618.	

Tunc a priori summa aufero posteriorem et restat 0.0893284166257043 area semisegmenti Hyperbolici. Addo etiam easdem summas et aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666 et restat 0.0767731061630473 area semisegmenti circularis. Huic addo triangulum istud quo completur in sectorem, hoc est, triangulum $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0.0541265877365274 et habeo sectorem sexaginta graduum 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est area totius circuli, quae divisa per $\frac{1}{4}$ sive quadrantem diametri dat totam peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum seriei pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta viginti quinque aut amplius; sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex seriei computum praestari posset: Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11 et nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitii etiam, si ultimo loco dimidium termini adjiciatur et alia quaedam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras: ut et ponendo summam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ etc. esse ad totam seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus et citissime convergentibus seriebus, vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 grad. posita tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim series illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ etc., quae cito convergit; vel si conjunges cum aliis seriebus, pone circuli diametrum $= 1$ et $a = \frac{1}{2}$ et area totius circuli erit $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3}$ $+ \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} +$ etc. $+ \frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7}$ $+ \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11} -$ etc. $+ \frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7}$ $+ \frac{a^{28}}{9}$ etc.

Hic consideravimus series, quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandae sunt partes ejus, tunc quaelibet series habet proprium usum et in suo genere optima est. Si datur tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad sinum aliquem, ut inde computetur arcus, neque vice versa. Series data congruens est aequatio pro solvendo proprio problemate.

Credo Cl. Leibnitium, dum posuit seriem pro determinatione cosinus ex arcu dato, vix animo advertisse seriem meam pro determinatione sinus versi ex eodem arcu, siquidem haec idem sunt. Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi litteras pro quantitatibus cum signis suis $+$ et $-$ affectis, dum dividit hanc seriem $\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+$ etc. Nam cum area Hyperbolica BE (Fig. 21) hic significata per z sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte ordinatim applicatae B C, si area illa in numeris data sit l, et l substituatur in serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}-\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc. vel $-\frac{l}{b}+\frac{ll}{2abb}-\frac{l^3}{6aab^3}+\frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc. prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est, posito $a = 1 = b$ et l logarithmo Hyperbolico, numerus ei correspondens erit $1+\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}+\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ etc. si l sit affirmativus, et $1-\frac{l}{1}+\frac{ll}{2}-\frac{l^3}{6}+\frac{l^4}{24}$ etc. si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum quae alias in nimiam molem crescerent. Tam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro quadratura curvarum, revolvendum esset in triginta duo Theoremata, si pro signorum varietate multiplicaretur.

Praeterea, quae habentur de inventione numeri unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum ope seriei $\frac{l}{1}-\frac{ll}{1\times2}$ $\frac{l^3}{1\times2\times3}-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+$ etc. potius quam ope seriei $\frac{l}{1}+\frac{ll}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}+$ etc. mihi quidem haud ita clara sunt. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere unitatem per prodeuntem Logarithmum Hyperbolicum ad multas figurarum loca extensum, ut inde obtineatur Logarithmus Hyperbolicus quaesitus. Utraque series igitur (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{1}{1}+\frac{1^3}{1\times2\times3}+\frac{1^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ etc. series ex dimidia parte terminorum constans optime adhiberi, siquidem haec dabit differentiam duorum numerorum, ex qua et rectangulo dato uterque datur; sic et ex serie $1+\frac{11}{1\times2}+\frac{1^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. datur semisumma numerorum indeque etiam numeri. Unde prodit relatio serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de inventione arcus ex dato cosinu, ponendo radium 1, cosinum c, et arcum $\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^3}{90}+\frac{v^4}{194}+$ etc. Potest fieri ut $120-17v$ ad $120-17v$, ita chorda $(\sqrt{2v})$ ad arcum, et error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter, qui semper minor ut quam $5\frac{1}{4}$ minuta secunda, dum arcus non sit major quam 45 gr. et singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series
$\frac{a^3}{1\times2\times3}-\frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$
etc. applicari posset ad computationem Tabulae segmentorum, ut observat vir clarissimus. Sed res optime absolvitur per Canonem sinuum. Utpote cognita quadrantis area per continuam additionem nonae partis ejus habebis sectores ad singulos decem gradus in semicirculo; dein per continuam additionem decimae partis partis hujus habebis sectores ad gradus; et sic ad decimas partes graduum et ultra procedi potest. Tunc radio existente 1 ab unoquoque sectore et ejus complemento ad 180 gr. aufer dimidium communis sinus recti et relinquentur segmenta in Tabulam referenda. Caeterum quamvis series hic non prosint, in aliis tamen locum obtinent; et quoniam hoc ad earum usum spectat non gravabor in aliquibus attingere.

Constructionem Logarithmorum non aliunde peti debere, credetis forte ex hoc simplici processu, qui ab istis pendet. Per methodum supra traditam quaerantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; id quod fit spatio unius et alterius horae. Dein divisis Logarithmis quatuor posteriorum per Logarithmum numeri 10, et addito indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102 in Tabulam inserendi. Hi per dena intervalla interpolandi sunt, et exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 et 1020, et omnibus inter 980 et 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus constructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum numerorum et eorum multiplicium minorum quam 100: ad quod nihil requiritur praeter additionem et subtractionem, siquidem sit $\sqrt[10]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$,

$$\sqrt[4]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3,\ \frac{10}{2} = 5,\ \sqrt{\frac{98}{2}} = 7,\ \frac{99}{9} = 11,$$

$$\frac{1001}{7 \times 11} = 13,\ \frac{102}{6} = 17,\ \frac{998}{4 \times 13} = 19,\ \frac{9936}{16 \times 27} = 23,$$

$$\frac{968}{2 \times 17} = 29,\ \frac{992}{32} = 31,\ \frac{999}{27} = 37,\ \frac{984}{24} = 41,$$

$$\frac{989}{23} = 43,\ \frac{987}{21} = 47,\ \frac{9911}{11 \times 17} = 53,\ \frac{9971}{13 \times 13} = 59,$$

$$\frac{9882}{2 \times 81} = 61,\ \frac{9849}{3 \times 49} = 67,\ \frac{994}{14} = 71,\ \frac{9928}{8 \times 17} = 73,$$

$$\frac{9954}{7 \times 18} = 79,\ \frac{996}{12} = 83,\ \frac{9968}{7 \times 16} = 89,\ \frac{9894}{6 \times 17} = 97.$$

Et habitis sic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, restat tantum hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Constructionis Tabulae sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua additio dati anguli ad se ipsum vel ad alium datum. Utpote in angulo addendo BAE inscribantur (Fig. 22) HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP etc. aequales radio AB, et ad opposita latera demittantur perpendicula BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY etc. Et angulorum HIQ, IKH, HLI, LMK, etc. differentiae erunt angulus A; sinus HQ, IR, KS etc. et cosinus IQ, KR, LS etc. Detur jam aliquis eorum LMK et ceteri sic eruentur. Ad SV, et MV, demitte perpendicula Ta et Kb, et propter sim. tri. ABE, TLa, KMb, ALT, AMV etc. erit AB, BE : : TL. La $\left(= \frac{SL - LV}{2}\right)$,

$:: KT \left(\frac{1}{2} KM\right) . \frac{1}{2} Mb \left(= \frac{MV - KS}{2}\right)$. Et AB . AE :: KT . Sa $\left(= \frac{SL + LV}{2}\right)$ :: TL . Tb$\left(= \frac{KS + MV}{2}\right)$. Unde dantur sinus et cosinus KS, MV, SL, LV; et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe AB . 2 AE :: LV . TM + MX :: MX . VN + NY etc. :: MV . TL + XN :: XN . MV + OY etc. vel AB . 2BE :: LV . XN — TL :: MV . TM — MX :: MX . OY — MV :: XN . VN — NY etc. Et retro AB . 2 AE :: LS . KT + RK etc. Pone ergo AB = 1, et fac BE $\times$ TL = La, AE $\times$ KT = Sa, Sa — La = LV, 2AE $\times$ LV — TM = MX etc.

Sed nodus est inventio sinus aut cosinus anguli A. Et hic subveniunt series nostrae: Utpote cognito ex superioribus quadrantalis arcus longitudine 1.57079 etc, et simul quadrato ejus 2.4694 etc, divide quadratum hoc per quadratum numeri experimentis rationem 90 gr. ad ang. A: Et quoto dicto z, tres vel quatuor primi termini hujus seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} - \frac{z^4}{40320}$ etc. dabunt cosinum istius anguli. A: Sic primo quaeri potest angulus 5 gr. et inde Tabula computari ad quinos gradus, ac deinde interpolari ad gradus vel dimidios gradus per eandem methodum: nam non convenit progredi per nimios saltus. Duae tertiae partes Tabulae sic computatae dant reliquam tertiam partem per additionem vel substractionem more noto, siquidem posito KT cosinu 60 gr., sit AE = SV et BE = Mb. Tunc ad decimas et centesimas partes graduum pergendum est per aliam methodum, substitutis tamen prius Logarithmis sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum Astronomicarum Kepleri posui fundamentum quoddam in altera Epistola. Ejus seriei tres primi termini et aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversae ejusmodi series aptari debent: vel potius tales series computandae sunt, quae ex data area sectoris Ellipticae BGE, immediate exhibeant aream sectoris circuli, cujus angulus est BEG, radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, vel forte quatuor terminos beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita resolutio tot triangulorum in aliis Hypothesibus: imo forte minus grave, si series prius debite concinnentur, siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos, addendo ipsum et ejus multiplices ad Logarithmos datorum coefficientium in promptu habitos. Quae de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt, ubi ratiocinia geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has series computare triginta vel viginti aut forte pauciores terminos Tabulae in debitis distantiis, siquidem termini intermedii facile interseruntur per methodum quandam, quam in usum calculatorum fere hic descripsissem; sed pergo ad alia.

Quae Cl. Leibnitius a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad inventionem terminorum p, q, r in extractione radicis affectae, primum p sic eruo. Descripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC divido in partes aequales et inde normales erigo distribuentes angulare spatium in aequalia parallelogramma vel quadrata, quae concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x et y, regulariter ascendentium a termino A, prout vides in Fig. 23. inscriptas: ubi y denotat radicem extrahendam et x alteram indefinitam quantitatem ex cujus potestatibus series constituenda est, deinde cum aequatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata, quorum unum sit humillimum in columma sinistra juxta AB, et alia ad Regulam dextrorsum sita, ceteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; seligo terminos aequationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos et inde quaero quantitatem quotienti addendam. Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a} y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua * ut vides in Fig 24. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna, eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec aliam similiter vel forte plura e reliquis signatis locis coeperit attingere, videoque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$ et y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tamquam nihilo aequalibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$ ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quaero valorem y et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est. Sic aequatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$ et inde $y = a$ proxime. Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro caeteris omnibus in infinitum, et substituo $a + p$ pro y. Obvenient hic aliquando difficultates nonnullae, sed ex iis credo D. Leibnitius se proprio Marte extricabit. Subsequentes vero termini q, r, s etc. eodem modo ex aequationibus secundis, tertiis, ceterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori, quia ceteri termini valoris y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitae quantitatis x per coefficientem radicis p, q, r aut s.

Intellexisti, credo, ex superioribus regressionem ab areis curvarum ad lineas rectas fieri per hanc extractionem radicis affectae.

Sed duo alii sunt modi, quibus idem perficio. Eorum unus affinis est computationibus quibus colligebam approximationes, sub finem alterius Epistolae, et intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur aequatio ad aream Hyperbolae $z = x + \frac{xx}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ etc. Et partibus ejus multiplicatis in se emerget $zz = xx + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ etc. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ etc. $z^4 = x^4 + 2x^5$ etc. $z^5 = x^5$ etc. Jam de z aufer $\frac{1}{2}zz$ et restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{16}{60}x^5$ etc., in qua tollitur $\frac{x^2}{2}$. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ etc. in qua tollitur etiam $\frac{x^3}{3}$. Aufero $\frac{1}{24}z^4$ et restat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ etc. Addo $\frac{1}{120}z^5$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quam proxime sive $x = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ etc.

Eodem modo series de una indefinita quantitate in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z et $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ etc. longitudine arcus istius atque hanc seriem e sinu recto ad Tangentem vellem transferre: quaero longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$ et reduco in infinitam seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ etc. Qua dicta t, colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ etc., $t^5 = x^5 +$ etc. Aufero jam t de z et restat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{40}$ etc. addo $\frac{1}{3}t^3$ et fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ etc. Aufero $\frac{1}{5}x^5$ et restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = o$ quam proxime. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ etc. Sed si quis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem arcus per Tangentem, eam non hoc circuitu, sed directa methodo quaesivissem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes: et radices affectarum aequationum magna ex parte extrahuntur; sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in altera epistola descriptam tanquam generaliorem etc. (Regulis pro elisione superfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam. Pro regressione vero ab areis ad lineas rectas et similibus possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

Theorem. 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ etc. et vicissim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bzz}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3a^2c^2 - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$ etc. Ex. gr. proponatur aequatio ad aream Hyperbolae $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d et $\frac{1}{5}$ pro e, vicissim exurget $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ etc.

Theorem. 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ etc., et vicissisim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aac - a^3e}{a^{13}}$

z^n + etc. Ex. gr. proponatur aequatio ad arcum circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d etc. orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6}$ + etc. Alterum modum regrediendi ab areis ad lineas rectas celare statui.

Ubi dixi omnia pene Problemata solubilia existere, volui de iis praesertim intelligi circa quae Mathematici se hactenus occuparunt vel saltem in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem obtinere possunt: Nam alia sane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat ut non satis comprehendere valeamus et multo minus tantarum computationum onus sustinere quod ista requirerent, ne nimium dixisse videar, inversa de tangentibus Problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora: ad quae solvenda usus sum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori: utramque visum est in praesentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, constitutum in aliquibus mutare cogerer. 5accd ae10effh11i4l3m qn60qqr8s11 t9v3x: 11ab3cdd10eaeg10ill4m7n603p3q6r5s11t8vx, 3 acae4egh5i4l4msn8o94r3s6t4vaaddaeeeeeeiiimmnnoop rrrssssstuu.*)

Inversum hoc Problema de tangentibus quando tangens inter punctum contactus et axem figurae est datae longitudinis, non indiget his methodis; est tamen curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab area Hyperbolae. Ejusdem generis est etiam Problema, quando pars axis inter Tangentem et ordinatim applicatam datur longitudine. Sed hos casus vix numeraverim inter Ludos naturae: nam quando in triangulo**) rectangulo quod

---

*) So findet sich diese Stelle in der Abschrift geschrieben, die Leibniz erhielt. In Leib. op. omn. ed. Dutens, Tom. III. p. 76. ist sie zum Theil anders. Nach Wallis bedeuten diese Zeichen: Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus; Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei.

**) Leibniz hat hier dazwischen geschrieben: TBC, (Fig. 28) und folgendes am Rande bemerkt:

ab illa axis parte et tangente ac ordinatim applicata constituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per aequationem quamlibet definitur, Problema solvi potest absque mea methodo generali, sed ubi pars axis ad punctum aliquod positione datum terminata ingreditur vinculum, tunc res aliter se habere solet*).

Communicatio Resolutionis affectarum aequationum per Methodum Leibnitii pergrata erit, juxta et explicatio quomodo se gerat ubi indices potestatum sunt fractiones, ut in hac aequatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut surdae quantitates, ut in hac

$$\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\Big|^{\sqrt{(3)\frac{2}{3}}} = y,$$

ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius x, sed indices potestatum seu dignitatum ejus, et $\sqrt{(3)\frac{2}{3}}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet, aliter descripsissem.

Sed meta tandem prolixae huic Epistolae ponenda est. Literae sane exellentissimi Leibnitii valde dignae erant, quibus fusius hocce responsum darem, et volui hac vice copiosior esse, quia credidi amoeniora tua negotia severiori hocce scribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui studiosissimus

Is. Newton.

Dieses Schreiben Newton's erhielt Leibniz sehr spät zugesandt, nachdem er bereits Paris verlassen und seinen Wohnsitz in Hannover genommen hatte (siehe den Brief Oldenburg's vom 2. Mai 1677). Bekanntlich nahm er seinen Weg über London, wo er eine Woche verweilte und die persönliche Bekanntschaft

---

TB, t
BC, y
AB, x

TB aequ. $\frac{d\overline{x}}{d\overline{y}}$ y. Sit t aequ. $y^{(v)}$ fiet $d\overline{x}$ aequ. $\frac{y^{(v)}\, d\overline{y}}{y}$ seu x aequ. $\int \frac{y^{(v)}\, d\overline{y}}{y}$, $\frac{TC}{y}$ aequ. $\frac{\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}}{dy}$. Pone TC aequ. y, succedet ex Quadraturis.

*) Leibniz hat hier bemerkt: Imo tunc etiam succedit, quod si TB detur ad x seu sit $x^{(v)}$ fiet $x^{(v)} : y :: d\overline{x} : d\overline{y}$, Ergo $\frac{d\overline{x}}{x^{(v)}}$ aequ. $\frac{d\overline{y}}{y}$.

von Collins machte. Von London begab er sich nach Amsterdam, von wo er einen Brief an Oldenburg schrieb, der uns in dem folgenden Schreiben Collins an Newton erhalten ist.

XXXIX.

Collins an Newton*).

Aderat hic D. Leibnitius per unam septimanam in mense Octobris, in reditu suo ad Ducem Hannoverae, cujus literis revocatus erat in ordine ad quandam Promotionem.

Dum aderat, impertivit mihi scripta quorum spero me tibi apographa propediem missurum. Allocutus sum eum de duobus assertis D. Jacobi Gregorii, quorum prius est in literis suis, 15 Febr. 1671 viz. „Quod attinet ad methodum meam pro inve„niendis radicibus omnium aequationum: una series exhibet non„nisi unam radicem. Sed pro quaque radice possunt esse se„ries numero infinitae. Est autem industriae opus pro inchoanda „serie, et judicando, quam illa respicit radicem.“ Posterius est in literis suis, 17 Jan. 1672. „Unica (saltem optima) Methodus „universalis, quam hactenus novi, pro inveniendis radicibus „aequationum, est series infinita. Potest exhiberi una, quae in„serviat cubicis aequationibus omnibus. Alia pro omnibus bi„quadraticis. Alia pro omnibus supersolidis. Et credo, Tabulas „hujusmodi serierum fore methodum omnium optimam, pro sub„levando taedio, in exquirendo quaesitas radices.“

Dixit Leibnitius, se posse et velle consilia impertire, pro obtinendis ejusmodi seriebus, absque speciosa extractione radicum aequationum affectarum, modo quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc (postquam ego D. Bakerum ipsi nominaveram) literis ejus ad D. Oldenburgium, datis Amstelodami $\frac{18}{28}$ Novemb. 1676 haec scribit:

„Rogo a me officiosissime Cl. Newtonum salutes, atque ei „significes, Hugenium mihi asseverasse, captum a se aliquoties „experimentum duorum speculorum planorum metallicorum, quae

---

*) Siehe Leib. op. omn. ed. Dutens Tom. III. p. 77 sqq.

„rite juncta, etiam exhausto aëre in Recipiente non sunt dilapsa, „nèc proinde ea de re dubitari debere.

„D. Collinio haec quaeso communica. Dixit ille mihi D. „Bakerum, doctum admodum et industrium apud vos Analyticum, „utilibus consiliis exequendis parem esse. Elegi ego unum prae „reliquis utile et facile. Nimirum, Methodus Tangentium a Slu- „sio publicata nondum rei fastigium tenet. Potest aliquid am- „plius praestari in eo genere, quod maximi foret usus ad om- „nis generis Problemata: etiam ad meam (sine extractionibus „aequationum) ad series reductionem. Nimirum, posset brevis „quaedam calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda, „donec progressio Tabulae apparet, ut eam scilicet quisque, quous- „que libuerit, sine calculo continuare possit.

„Fundamentum calculi hic exponam, ejusque simul exem- „plum dabo.

„In Figura 26. sit AB vel $A\,{}_2B$ aequ. x, BC vel ${}_2B\,{}_2C$ sit y, „quae duae quantitates indeterminatae. Sint aliae determinatae a, b, „c, d, e, f, et sit aequatio exprimens relationem inter x et y talis:

$$ax^2 + by^2 + cyx + dx + ey + f \text{ aequ. } 0$$

„quae aequatio in suo gradu (quadratico scilicet) generalissima „est, omnibusque exemplis applicari potest pro varia literarum „determinatarum explicatione, cum etiam ipsi 0 (sive nihilo) vel „terminis ipso nihilo minoribus (seu negativis) quoque applicari „possit.

„Jam $\frac{BC}{TB}$ vocetur z. Posito TC esse Tangentem, erit (per „methodum tangentium vel Huddenii vel Slusii) $-$ z aeq. „$\frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}$, ut exponenti statim patebit.

„Verum id nondum est ultimum quod in eo genere fieri „potest aut debet. Nam ex hoc valore ipsius z invento potest „tolli alterutra indeterminatarum x vel y et inveniri relatio ip- „sius z ad solam remanentem. Tollamus y et quaeramus rela- „tionem z ad x.

„Tollemus autem y ex inventa aequatione ope datae aequa- „tionis. Non ex data aequatione fiet y aeq. $\frac{-ax^2 - dx - f}{by + cx + e}$. „Ponendo (compendii causa) $- ax^2 - dx - f$ aeq. p, et cx $+$ e aeq. q, et $2ax + d - cxz - ez$ aeq. r, et 2bz „$-$ c aeq. s, habebimus duos ipsius y valores, unum y aeq.

„ $\frac{p}{by + q}$, alterum y aeq. $\frac{r}{s}$. Quos duos valores inter se aequando, „fiet ps aeq. bry + qr, et ex hac aequatione novum habebi- „mus valorem y aeq. $\frac{ps - qr}{br}$, quem aequando praecedenti y „ aeq. $\frac{r}{s}$, habebitur aequatio in qua sublata est litera y, nempe „ ps^2 aeq. $br^2 + qrs$. Et in locum literarum p, q, r, s, substi- „tuendo valores assumptos aequationemque ordinando, prodibit

$$\begin{array}{llllllllll}
3bc^2 & x^2z^2 & +6bce & xz^2 & -12abc & x^2z & +4a^2b & x^2 & +3be^2 & z^2 \\
4ab^2 & & +4b^2d & & -c^3 & & +3ac^2 & & +4b^2f & \\
 & & -8abe & & +4abd & & -4bde & & +bd^2 & \\
 & & -4bcd & xz & +2ace & x & -ce^2 & z & +cde & \text{aeq. } 0\ ^{*)} \\
 & & -3c^2e & & +2c^2d & & -4bcf & & +fc^2 &
\end{array}$$

„Quae est aequatio quaesita, exprimens relationem z ad so- „ lam x. Quae novissima est, neque ab ulla litera amplius pur- „gari potest.

„Idem optarim fieri in sequente gradu, assumpta aequatione $gx^3 + hy^3 + lx^2y + mxy^2 + ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ aequ. 0 „eodemque modo quaerendo ipsius z ad x relationem.

„Quodsi in aliquot gradibus, quosque commodum, continua- „retur, haberemus Tabulam Tangentium analyticam usus maximi, „tum ad alia multa, tum ad meam aequationum per series re- „solutionem.

„Rectius initio scripsissem $a + bx + cy + dxy + ex^2$ „$+ fy^2 + g = 0$, ut servato eodem ordine, postea pergi pos- „sit in sequente gradu ad hanc formam
$a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3$ aeq. 0 „ et sic porro.

„Amstelodami cum Huddenio locutus sum, cui negotia civi- „lia tempus omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Con- „sulum, qui subinde imperium obtinent. Nuper Consul Regens „erat, nunc Thesaurarii munus exercet. Praeclara admodum in „ejus schedis superesse certum est. Methodus Tangentium a „Slusio publicata dudum illi fuit nota. Amplior ejus Methodus „est, quam quae a Slusio fuit publicata. Sed et quadratura „hyperbolae Mercatoris ipsi jam anno 1662 innotuit. Hactenus „Leibnitius."

---

*) So findet sich dieser Ausdruck in der oben citirten Stelle. Offenbar liegt hier eine Zeichenverwechselung zu Grunde.

D. Baker est indefatigabilis industriae vir, qui lubenter in se suscipiet laborem calculi, qui censebitur utilis. Sed credo eum in **Methodo Tangentium** vix satis peritum, quam puto in scriptis hactenus editis nondum esse demonstratam. Si itaque tu dignaberis ipsi impertire consilia tua hac in re, hoc promovebit opus.

Bakerus huc imprimendam misit Exercitationem suam **de Continue-proportionalibus**, aliamque cui titulus: **Cardanus Promotus**.

Narrat mihi D. Loggan (Chalcographus) quod effigiem tuam delineavit ille in ordine ad sculpturam, quae praefigenda sit libro tuo **de Lumine, Coloribus, Dioptricis** etc. quem edendum intendis. Qua de re desideramus esse certiores. Sum etc. Lond. 5. Martii $167\frac{6}{7}$.

P. S. Exemplar Epistolae tuae (quatuor schedarum) nondum est ad D. Leibnitium missum, sed intra septimanam est quidam hinc profecturus Hanoveram, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

XL.

Oldenburg an Leibniz.

Epistolam tuam utramque, unam Amstelodami, alteram Hanoverae datam, rite accepi. Procrastinavi hactenus, ad Te scribere, quod nollem ea periclitari, quae ad te transmittenda mihi suppetunt, quorum e numero litterae sunt Newtonianae, non minus argumento graves, quam scripto prolixae. Si quidem intellexero, prodromum hunc ad te recte delatum esse, (quem sub Dni. Seroteri involucro expedio) fidentius, quae penes me sunt, curare ad te potero. Quantocius igitur si placet, rescribas, nec ulla utaris inscriptione alia, quam ad Grubendolium, ut nosti, quoties scil. per tabellionem ordinarium me invisis.

Quid causae sit, quod Spinosae non tradidisti literas meas, divinare equidem non possum. Quas velis demonstrationes Metaphysicas, quae a te lectae et examinatae in literis tuis Amstelodamensibus dicuntur, non intelligo, cum earum Authorem subticueris.

Dnus Balduinus, Saxo Dresdensis, dono nuper misit Regi nostro, seu Fundatori Soc. Regiae, nec non ipsi Societati, Phosphorum suum, qui soli vel candelae expositus, lucem ita imbibit, ut eam in tenebris reddat. Experimentum tum in Aula nostra, tum apud Societatem Regiam peractum, felicissime successit, induxitque coetum illum Philosophicum, ut Inventorem in Sociorum suorum album cooptaverit. Fama fert, Kunckelium quendam invenisse aliud quoddam Phosphori genus, quem Noctilucam appellat, qui non modo prioris ad instar in obscuro lucet, sed et per vices fulgurat, et vim urendi inexstinguibilem habet. Dissertationem de eo edidit Kirchmayerus, Professor Witenbergensis, quam vidimus, sed cui vix fidem adhibemus; cum manus nostrae in rebus Physicis oculatae sint, nec nisi quod viderint, credant. Tu si quid hujus rei inaudiveris, quid veri subesse putes, significare ne graveris, oro. Postquam hisce responderis, fasciculum satis tumentem accipies; qui hujus brevitatem levitatemque, et prolixitate et momento compensabit. Vale et a Dno. Boylio, qui te valde amat, plurimum salve. Dabam Londini d. 22. Febr. 1677.

Aquae Rabelii vulnerariae fama adhuc integra est. Illa quam vobis oblatam esse scribis, ex eadem forte materia parata est.

Mons. Scroter dit, que dans peu de temps il ira en Allemagne, et qu'il verra Hannover. Ditez donc, s'il vous plait, si ie dois bailler la grande lettre de Newton, et le reste, que i'ay pour vous.

XLI.

Oldenburg an Leibniz.

Rumpo tandem moram, quam ex eo nexui, quod verebar, epistolam Neutonianam hic inclusam et mihi inscriptam, extra periculi aleam non esse, si per tabellionem ordinarium transmitteretur. Nunc demum occasio se obtulit, eum cum reculis quibusdam Schroederianis, quae navi Anglica Hamburgum, atque inde per ministrum Hanoveranum Hanoveram curandae sunt, transmittendi. Solenniter promisit Guilielmus Schroederus, se parem hujus fasciculi cum suismet rebus curam habiturum. Quamprimum ad manus tuas pervenerit, certiorem me fieri de eo velim; responsionem tuam Amstelodamo vel Antverpia Londinum mittendo, eamque ut soles, ad Grubendolium, citra ullum alium titulum, inscribendo. Mitto tibi apographum literarum Newtoni, autographum ad memet directum, mihi reservans. Tanta id ipsum cura relegi, quantam occupationes meae confertissimae patiebantur. Ad alia nunc distrahitur Newtonus ab iis, qui Leodii, Francisco Lino succenturiati, novam ipsius de Lumine et Coloribus Theoriam vehementer insectantur: qua de re brevi plura accipies, ni rationes meas male subduxi. Nihil hac vice de Collino apud te commemoro, quum Te omnino satiatum iri pro tempore prolixa hac Newtoni epistola autumem. Nec de aliis a te quaesitis fusius nunc agam, cum id alii scriptioni reservaverim, quam forte laudatus Schroeterus ipse, intra paucas septimanas Hannovera transiturus, secum feret. Verbo duntaxat innuam, Ignivorum Anglum, Parisiis nunc commorantem, certo quodam medicamento os et viscera sua munire, cujus virtute retusa, medicinam suam iterare toties, quoties debet. Bondii de longitudine Tractatus, tanti nominis mensuram haud implet. De Tschirnhusio nihil omnino accepi, ex quo Lutetia Parisiorum discessit. Gaudeo, in re telescopica laborare Goltinium. Quas lentes, a Parisiensi Borellio elaboratas, exploravimus, sic satis probamus. Multa et ingentia nobis promittuntur a Germanis quibusdam circa Phosphoros et Noctilucas; nec spes deest, quin fidem datam, saltem quoad rei summam, sint liberaturi. Nuper in Soc. Regiam cooptavimus Dn. Balduinum, qui Phosphori sui specimen pulcherrimum, thecae deauratae inclusum, Serenissimo Regi nostro, ceu Soc. Regiae Fundatori, nec non Societati ipsi, dono transmiserat, insigni effectu conspicuum.

Illustris Boylius et doctissimus Collinius plurimam tibi salutem dicunt. Prior semper aliquid molitur novi, et jam imprimis circa Poros et Figuras corporum occupatum se videt. Posterior brevi ad Te nonnulla scribet, quae forte non displicebunt.

Fere memoria exciderat, me nuper vidisse et appendisse magnetem parvulum, qui cum nonnisi 13 grana penderet, suum met pondus centies et quadragesies novies, me coram sustinere potuit. Thesauro quovis hunc lapillum preciosiorem censeo.

Vale et Tui studiosissimum amare perge.

Dabam Londini d. 2. Maji 1677.

P. S.

Non obstante tam enormi prolixitate petiit Dn. Collinius, ut sequentia haec prioribus subjicerem; nempe:

1. Non nisi post sex mensium lapsum secundum Volumen Algebraicum Dni Kersy praelo commissum iri: Sperare se proinde, Clarissimi Freniclii opus interea proditurum, quod suppeditaturum nobis credit complures breves intermediatasque responsiones in istis inventi novi Fermatiani Problematibus: quod ipsum licet et hic praestitum a viro quodam docto fuerit, non tamen ipse nos hactenus edocuit, qua methodo. Addit, nos percipere, Fermatum, Wallisium et Kersium, omnes (consiliis haud communicatis) in idem Theorema incidisse, dividendi sc. summam duorum Cuborum in duos Cubos, neminem vero eorum posse beneficio ejus invenire parvos illos numeros, quos Dn. Frenicius nobis dedit in quadam epistola sua in Wallisii Commercio Epistolico.

2. Narrationi illi de Constructione ad dividendum Aequationem Biquadraticam in duas Quadraticas, subjungit idem Collinius: Hoc praestari citra opem Aequationis Cubicae, quando Biquadratica aequatio sit per multiplicationem duorum quadraticorum: Subtilitatem consistere ait in determinando, quando id fieri possit absque ope Aequationis ejusmodi Cubicae, et quando non item.

3. Ad Cartesii solutionem Problematis Pappi ait idem, Virum quendam doctum in Operatione sive Processu Problematis, semper eam continebat intra duas Aequationes quadraticas, quae multiplicatae per se invicem producebant Aequationem illam biquadraticam, quae solvebat Problema, poteratque dividi in duas Aequationes Quadraticas citra opem Cubicae.

Jungo hic summam eorum, quae destinantur secundo volumini Algebraico, quod meditantur Angli lingua vernacula; eamque mitto Anglice, prout acceperam ab amico, satis compertum habens, Te linguam hanc satis callere ad haec intelligendum.

Vale iterum atque iterum etc.

XLII.

Leibniz an Oldenburg.

Accepi hodie literas Tuas diu expectatas cum inclusis Neutonianis sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum cura ac meditatione, quibus certe non minus dignae sunt quam indigent. Nunc pauca quae festinante oculo obeunti incidere e vestigio annotabo.

Egregie placet quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane theoremata inciderit, et quae de Wallisianis interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum interpolationum demonstratio, cum res antea quod sciam, sola inductione niteretur, tametsi pars eorum per tangentes sit demonstrata.

Cl. Slusii methodum tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo Neutono assentior, et jam a multo tempore rem tangentium longe generalius tractavi, scilicet per differentias ordinatarum. Nempe $T\,_1B$ (Fig. 27) (intervallum tangentis ab ordinata in axe sumtum) est ad $_1B\,_1C$ ordinatam, ut $_1CD$ (differentia duarum abscissarum $A\,_1B$, $A\,_2B$) ad $D\,_2C$ (differentiam duarum ordinatarum, $_1B\,_1C$, $_2B\,_2C$) nec refert quem angulum faciant ordinatae ad axem. Unde patet nihil aliud esse invenire tangentes, quam invenire differentias ordinatarum, positis differentiis abcissarum, si placet, aequidifferentibus. Hinc nominando imposterum $d\overline{y}$ differentiam duarum proximarum y: et $d\overline{x}$ differentiam duarum proximarum x, patet $d\overline{y^2}$ esse $2y\,d\overline{y}$ et $d\overline{y^3}$ esse $3y^2\,d\overline{y}$ etc. Nam sint duae proximae sibi (id est differentiam habentes infinite parvam) scilicet y et $y + d\overline{y}$, quoniam ponimus $d\overline{y^2}$ esse differentiam quadratorum ab his duabus, ejus valor erit $y^2 + 2yd\overline{y} + \overline{dy}|^2 - y^2$, seu omissis $y^2 - y^2$, quae se destruunt, item omisso quadrato quantitatis infinite parvae, et ob rationes ex methodo de maximis et minimis notas erit $d\overline{y^2} \sqcap 2yd\overline{y}$, idemque est de caeteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiae quantitatum ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum, ut: $d\overline{yx}$ erit $\sqcap\, y\,d\overline{x} + x\,d\overline{y}$ et $d\overline{y^2x} = 2xy\,d\overline{y} + y^2d\overline{x}$. Hinc si sit aequatio
$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \sqcap 0,$$
statim habetur tangens curvae ad quam est ista aequatio. Nam

ponendo $A_1B \sqcap y$ et $A_2B \sqcap y + \overline{dy}$ (scilicet quia ${}_1B_2B$ seu ${}_1CD \sqcap \overline{dy}$) itemque ponendo ${}_1B_1C \sqcap x$ et ${}_2B_2C \sqcap x + \overline{dx}$ (scilicet quia ${}_2CD \sqcap \overline{dx}$) et quia eadem aequatio exprimit quoque relationem inter A_2B et ${}_2B_2C$, quae eam exprimebat inter A_1B et ${}_1B_1C$, tunc in aequatione illa pro y et x substituendo $y + \overline{dy}$ et $x + \overline{dx}$ fiet:

$$\begin{array}{l} a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \\ \hline + b\overline{dy} + c\overline{dx} + dy\overline{dx} + 2ey\overline{dy} + 2fx\overline{dx} + 2gxy\overline{dy} + 2hxy\overline{dx} \\ \qquad + dx\overline{dy} \qquad\qquad\qquad\qquad + gy^2\overline{dx} + hx^2\overline{dy} \\ \hline + d\overline{dx}\,\overline{dy} + e\overline{dy}|^2 + f\overline{dx}|^2 + g\overline{dy}|^2x + h\overline{dx}|^2y \\ \qquad\qquad + 2gy\overline{dy}\,\overline{dx} + 2hx\overline{dx}\,\overline{dy} \end{array} \sqcap 0$$

ubi abjectis illis quae sunt supra primam lineam quippe nihilo aequalibus per aequationem praecedentem, et abjectis illis quae sunt infra secundam, quia in illis duae indefinite parvae in se invicem ducuntur, hinc restabit tantum aequatio haec:

$$b\overline{dy} + c\overline{dx} + \begin{array}{l} by\overline{dx} \\ bx\overline{dy} \end{array} \text{ etc. } \sqcap 0,$$ quicquid scilicet reperitur inter lineam primam et secundam, et mutata aequatione in rationem seu analogiam, fiet

$$\frac{-\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ etc.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ etc.}}$$

id est $\left(\text{quia } \frac{-\overline{dy}}{\overline{dx}} \text{ seu } \frac{-{}_1B_2B \text{ seu } -{}_1CD}{D_2C} \sqcap \frac{-T_1B}{{}_1B_1C}\right)$ erit $\frac{c + dy \text{ etc.}}{b + dx \text{ etc.}} \sqcap \frac{-T_1B}{{}_1B_1C}$. Quod coincidit cum regula Slusiana, ostenditque eam statim occurrere hanc methodum intelligenti. Sed methodus ipsa nostra longe est amplior, non tantum enim adhiberi potest, cum plures sunt literae indeterminatae quam y et x (quod saepe fit maximo cum fructu) sed et tunc utilis est, cum interveniunt irrationales, quippe quae eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est irrationales tolli, quod in methodo Slusii necesse est; et calculi difficultatem haud dubie in immensum auget. Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus simplicioribus rem explanare: Et primum in simplicissimis: generaliter si sit aliqua potentia aut radix: x^z erit $\overline{dx^z} \sqcap z x^{z-1} \overline{dx}$. Si z sit $\frac{1}{2}$ seu si x^z sit $\sqrt[2]{x}$, erit $\overline{dx^z}$ seu hoc loco $\overline{d\sqrt[2]{x}} \sqcap \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\overline{dx}$ seu $\frac{\overline{dx}}{2\sqrt{x}}$, ut notum aut facile demonstrabile. Sit jam binomium ut $\sqrt[2]{a + by + cy^2}$ etc. quaeritur

$d\sqrt[3]{a+by+cy^2}$ seu $d\overline{y^z}$ posito $\frac{1}{3} \sqcap z$, et $a+by+cy^2$ etc. $\sqcap x$. Est autem $d\overline{x} \sqcap bd\overline{y} + 2cyd\overline{y}$ etc. Ergo $d\overline{x^z}$ seu $\dfrac{d\overline{x}}{3\sqrt[3]{x}}$ erit $\sqcap \dfrac{bd\overline{y} + 2cyd\overline{y} \text{ etc.}}{3\sqrt[3]{a+by+cy^2}}$. Eadem methodus adhiberi potest etsi radices in radicibus implicentur. Hinc si detur aequatio valde intricata, ut:

$a + bx\sqrt[2]{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} + hyx^2\sqrt[2]{y^2 + y\sqrt[2]{1-y}} \sqcap 0$ ad aliquam curvam, cujus abscissa sit y, AB, ordinata x, ${}_1BC$, tunc aequatio proveniens, utilis ad inveniendam tangentem TB, statim sine calculo scribi poterit, et haec erit

$$
\begin{aligned}
& bd\overline{x}\sqrt[2]{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} \\
& + \frac{bx}{2\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}} \frown \overline{2yd\overline{y} + \frac{bd\overline{y}}{3\sqrt[3]{1+y}}} \\
& + \frac{hyx^2}{2\sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}}} \frown 2yd\overline{y} + d\overline{y}\sqrt[2]{1-y} + \frac{y \frown -d\overline{y}}{2\sqrt[2]{1-y}} \\
& \qquad\qquad + 2hxyd\overline{x} \frown \sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}} \sqcap 0 \\
& \qquad\qquad + hx^2 d\overline{y}
\end{aligned}
$$

seu $\dfrac{-d\overline{y}}{ad\ d\overline{x}}$ id est $\dfrac{-T_1B}{ad\,{}_1B_1C}$ erit ut omnes provenientis aequationis termini per $d\overline{x}$ multiplicati, ad omnes ejusdem terminos per $d\overline{y}$ multiplicatos. Ubi sane mirum et maxime commodum evenit, quod $d\overline{y}$ et $d\overline{x}$ semper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem Slusiana omnes ordine irrationales tollendas esse nemo non videt, quod immensi calculi res est. Arbitror quae celare voluit Neutonus de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in ea sententia confirmat, nimirum semper figurae illae sunt quadrabiles quae sunt ad aequationem differentialem. Aequationem differentialem voco talem qua valor ipsius $d\overline{x}$ exprimitur, quaeque ex alia derivata est, qua valor ipsius x exprimebatur. Exempli causa, (Fig. 28) sit $AB \sqcap y$, $EB \sqcap \omega$, ponatur $\omega \sqcap \dfrac{b+cy+dy^2+ey^3 \text{ etc.}}{z\sqrt[m]{1+by+\frac{c}{2}y^2+\frac{d}{3}y^3+\frac{e}{4} \text{ etc.}}}$

quaeritur quadratura figurae ABEA (quanquam forte saepe tale trilineum non sit proditurum, quale depinximus, sed curva habitura asymtoton). Describatur alia curva AC, talis ut BC sit $\sqrt[4]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4 \text{ etc.}}$ et rectangulum sub recta AV, repraesentante Unitatem constructionis, et sub ordinata nova BC, aequabitur figurae ABEA. Ejusmodi theoremata condi possunt indefinita, imo pleraque sub generalissimis quibusdam complecti licet. etc. significat nihil referre sive hae series producantur sive ubilibet finiantur, unde patet hanc unicam regulam pro infinitis figuris quadrandis servire diversae plane naturae ab iis, quae hactenus quadrari solebant.

Pulcherrimae sunt illae series Neutonianae, quae ex infinitis in finitas degenerant, qualis illa est, quam exhibet pro extractione radicis binomii aut ejus quadratura. Quod si id in generali illa aequationis affectae indefinitae extractione, cum sit $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. et y fit: $\frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ etc. vel $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^4}$ etc. idem praestari posset, ut scilicet liceret inter extrahendum radices ex aequationibus vel binomiis invenire radices rationales finitas, quando eae insunt, vel etiam irrationales; tunc dicerem methodum serierum infinitarum ad summam perfectionem esse productam. Opus esset tamen praeterea discerni posse varias aequationis ejusdem radices, item necesse esset ope serierum discerni aequationes possibiles ab impossibilibus. Quod si haec nobis obtinuerit vir in his studiis maximus, atque effecerit, scilicet ut possimus seriem infinitam convertere in finitam, quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta, tunc in methodo serierum infinitarum quae divisione atque extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum restabit. Haec si quisquam mortalium, certe Neutonus praestare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut ex multis seriebus infinitis possimus deligere maxime naturales, quales haud dubie illae erunt, quae ita erunt comparatae, ut cum fieri potest, atque opus est, degenerent in finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum extractionum per series infinitas minime indirectam, sed maxime naturalem esse. Problema est perelegans, cujus meminit, curvam describere, quae per data quotcunque transeat puncta. Huddenius mihi Amstelodami dixit, posse se curvam describere Analyticam seu certa aequatione uniformi constantem, quae faciei hominis cujusdam noti lineamenta designet. Caeterum quaerendum est an hoc Neutonus intelligat de punctis infinitis, ut si sit Axis (Fig. 29) $A\,{}_1B\,{}_2A\,{}_2B\,{}_3A$ etc. in infinitum productus, et duae datae curvae infinitae analyticae, una $A\,{}_1C\,{}_2C\,{}_3C$ etc. altera $A\,{}_1D\,{}_3D$ etc. Si ponamus $A\,{}_1B$, ${}_1B\,{}_2A$, ${}_2A\,{}_2B$, ${}_2B\,{}_3A$ etc. inter se et datae cuidam quantitati F aequales, quaeritur an dari possit curva analytica seu aequationis capax, quae in infinitum producta transeat (alternis) per puncta ${}_1C$, ${}_2D$, ${}_2C$, ${}_3D$, ${}_3C$ etc. Fermatius alicubi scribit se methodum habere per quam curva inveniri possit, cujus proprietas specifica data non pertineat ad unum punctum, ut vulgo fit, cum ordinatae referuntur ad partes axis, sed ad duo quaelibet simul, vel etiam ad tria quaelibet simul etc.

Quae de variis seriebus suis ac nostris examinandis atque inter se comparandis dicit Cl. Neutonus, in ea me immergere non audebo, antequam in gratiam cum Analysi rediero, nam harum rerum vestigia in animo meo prope nunc obliterata sunt. Agnosco interim pulcherrima et utilissima ab eo annotari. Elegantissima et minime expectata est via, qua seriem meam $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$ etc. deducit ex sua.

Quod ajt problemata Methodi Tangentium inversae esse in potestate, hoc arbitror ab eo intelligi per series scilicet infinitas. Sed a me ita desiderantur, ut curvae exhibeantur geometrice quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) quadraturis. Exempli causa cycloidem deprehendit Hugenius sui ipsius evolutione describi; difficile autem fuisset, credo, solvere hoc problema: invenire curvam, quae sui ipsius evolutione describitur. Nec refert quod istius curvae descriptio quadraturam circuli supponit. Et hoc problema etiam ex eorum est numero, quae voco Methodi Tangentium inversae. Ita inter methodos tangentium inversas generales est, invenire curvam analyticam cujus longitudines sint areis datae figurae, curva analytica comprehensae, proportionales (contrarium enim dudum possumus). Quod problema arbitror non esse insolubile, et videtur non contemnendum, facilius enim est lineam quam spatium organice metiri, et reducta spatiorum dimensione ad dimensionem linearum, solis filis in rectum extensis mechanica fieri poterit constructio; et spatia poterunt in data ratione secari instar linearum rectarum. Cum ait Neutonus, inventionem Curvae, quando tangens vel intervallum tangentis et ordinatae in axe sumtum est recta constans, non indigere his methodis, innuit credo se intelligere Methodum tangentium inversam generalem in potestate esse per methodos serierum appropinquatorias; in hoc vero casu speciali non opus esse seriebus; ego vero methodum quaerebam quae accurate curvam quaesitam exhibeat (saltem ex suppositis quadraturis) et cujus ope ejus aequationem si quam habet, aut aliam primariam proprietatem possimus invenire. Quod ait problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli (Fig. 30) TBC, semper posse solvi,*) id verum est et ex meis quoque artibus fluit, ac saepe ne quadraturis quidem accitis, simplici analytica operatione praestari potest, ut si BC posita x, sit TB $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3$ quaeraturque qualisnam sit haec curva quae hanc tangentium habeat proprietatem, id est quaenam sit aequatio relationem exprimens inter AB seu y et BC seu x, ajo eam fore y $\sqcap$ $bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} \ldots$ Si fuisset TB $\sqcap$ $a + bx + cx^2 + \ldots$ opus fuisset quadratura Hyperbolae ad inveniendam curvam quaesitam. Generaliter autem quandocunque datur relatio inter duo ex lateribus hujus trianguli, quod ego Characteristicum (ob crebros usus) vocare soleo, semper suppositis quadraturis figurarum analyticarum haberi potest curva quaesita. Quod tamen nescio an praeter Neutonium praestiturus sit quisquam; mea methodo res unius lineolae calculo peragitur ac demonstratur. Sed et infinitis casibus rem praestare possum, tametsi ipsa y ingrediatur in ipsius TB expressionem, ut si sit TB $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots - y$**), fiet aequatio curvae yx $\sqcap$ $bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \ldots$***) Itaque si habeatur valor ipsius TA ex BC haberi poterit curva.†)

*) Im vorhandenen Entwurfe hatte Leibniz ursprünglich hier geschrieben: ut si sit TB $\sqcap$ $a + bx + cx^2$, seu $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{a + bx + cx^2}{x}$ etc. id verum est, nam posita $\overline{dx}$ constante, quod a nobis pendet, fiet y $\sqcap \int \overline{\frac{a + bx + cx^2}{x}}$ seu $\int \frac{a}{x} + bx + \frac{cx^2}{3}$ etc. Diese, wie die folgenden Stellen, wo Leibniz Integralrechnung gebraucht, hat er eingeschlossen, wahrscheinlich zum Zeichen, dass sie in der Abschrift auszulassen wären. Offenbar wollte er Newton in seine Bezeichnungsweise nicht einweihen!?

**) Muss vielleicht heissen: TB $\sqcap$ $b + cx + dx^2 + \ldots - y$.

***) Wie oben steht hier: quia $\int \overline{x\,\overline{dy} + y\,\overline{dx}} \sqcap yx$.

†) Wie oben steht hier: si $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{a + by + cy^2 + dy^3 \text{ etc.}}{x}$ fiet:

Quod vero addit Cl. Neutonus non aeque rem procedere, si detur relatio ipsius TB ad partem axis seu ad AB vel y; ad hoc respondeo, mihi aeque facile esse invenire unam, si detur relatio ipsius TB ad AB, quam si, ut ipse requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inversam nondum quod sciam habemus. Sunt et alia problematum genera, quae hactenus in potestate non habeo, quorum ecce exempla:

Sint duae aequationes $x^y + y^x \sqcap xy$ et $x^x + y^y \sqcap x + y$; duae sunt incognitae x, y, duaeque ad eas inveniendas aequationes, quaeritur valor tam unius quam alterius literae. Talia problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror; si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati lucem afferre potest Neutonus pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analysin promovebit. Analysis quoque Diophantea seu solutio problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta videtur.

Haec annotavi festinans atque inter legendum, ad reliqua majore otio opus est. Interea Celeberrimum Neutonum quaeso officiosissime a me saluta, et post actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum seriërum, nempe posita $z \sqcap ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ etc. ait fore $y \sqcap \frac{z}{a} - b\frac{z^2}{a^3}$

$x\overline{dy} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + cy^2\overline{dx}$; scribamus $x\overline{dy} + y\overline{dx} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + 1y\overline{dx} + cy^2 dx$, fiet $xy \sqcap x + \int \overline{\frac{by\,dx}{1y\,dx} + cy^2 dx} \cdot \frac{\overline{dx}}{x} \sqcap \frac{1}{a + by + cy^2 + dy^3}\overline{dy}$, posito $\overline{dy} \sqcap 1$ seu y arithmetice progredientibus fiet: $\overline{dx}\frac{1}{x} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{a} + by + cy^2 + dy^3}$ $\overline{dy}$ seu area Hyperbol. $\sqcap \int \overline{\frac{1}{a + by \text{ etc.}}}$. Hinc ergo quandocunque valor ipsius TB habetur ex data AB sola, problema semper solubile: $\frac{\overline{dy}}{dx} \sqcap \frac{by \sqcap BT}{x \sqcap BC}$. Ergo $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$, ubi mirabile est, duabus quadraturis Hyperbolicis hoc loco solvendam esse rem aliunde manifestam, est enim aequatio ad aliquam paraboloidum, scilicet si $b \sqcap 1$, fiet $y \sqcap x$, generaliter autem fiet $y \sqcap x^b$, si $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$.

$+ \frac{2b^3 + ac}{a^5} z^3$ etc. item $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^3$ etc. Et si qua alia in promtu habet theoremata nonnihil generalia, quoniam ad calculum contrahendum plurimum serviunt, quod si eorum origenem sive demonstrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam nosse an per extractiones in seriebus discernere possit aequationes possibiles ab impossibilibus, nam si generalis ejusmodi extractio procederet, sequeretur nullam aequationem fore impossibilem. Item quomodo inveniat diversas ejusdem aequationis radices; item an tales habeat series, quarum ope extrahendo aequationes inveniantur valores finiti quando tales insunt aequationi. Denique quid sentiat de resolutione aequationum, quales paulo ante posui, ut $x^y + y^x \sqcap xy$, et $x^x + y^y \sqcap x + y$, ubi scilicet incognita ingreditur in exponentem. Oblitus eram dicere, pulchram mihi videri cyssoidis extensionem in rectam quam Neutonus invenit, ex supposita quadratura Hyperbolae; ego mihi videor eodem modo etiam metiri posse curvam Hyperbolae aequilaterae, sed nondum omnis, neque curvam Ellipseos quantum memini.

Antequam finiam, adjiciam usum pulcherrimum serierum, qui imprimis Collinio nostro non erit ingratus. Scis magnam esse difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis Cubicis, quando eas ingreditur quantitas negativa, ut $\underbrace{\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}}_{M} + \underbrace{\sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}}_{N}$, ubi utraque quantitas M et N est singulatim impossibilis, summa autem ut alibi ostendi, est quantitas possibilis et realis. Ut vero ea eruatur et ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{z}{2} + e\sqrt[2]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ et $\frac{z}{2} - e\sqrt[2]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}$ (unde fit $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}} + \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}} \sqcap z$) non potest adhiberi methodus Schotenii Geometriae Cartesianae subjecta, quia opus est ad eam, ut valor ipsius $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ exhibeatur saltem approximando, quod notis methodis impossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt[2]{-b^2}$ prope verum dabit? necesse est enim invenire $b\sqrt{-1}$. Quis autem exprimet $\sqrt{-1}$

appropinquando? Scripsi olim Collinio me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores valeat. Id ecce hic uno verbo: ex binomio $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b^2}}$ extraho radicem per seriem infinitam, sive per theorema Neutonianum, sive etiam more meo priore, instituendo calculum secundum naturam cujusque gradus, cum scilicet nondum theorema generale abstraxissem: quae radix ponatur esse $l + m\sqrt{-b^2} + n + p\sqrt{-b^2}$ etc. Extrahatur jam et radix ex binomio altero $\sqrt[3]{a-\sqrt{-b^2}}$, fiet illa $+ l - m\sqrt{-b^2} + n - p\sqrt{-b^2}$ etc. ut facile demonstrari potest ex calculo. Ergo addendo haec duo extracta destruentur imaginariae quantitates, et fiet $z \sqcap 2l - 2n$ etc.*) Invento ergo valore ipsius z quantum satis est propinquo, quemadmodum Schotenius postulat, reliqua methodo Schoteniana, perinde ac in aliis binomiorum extrahendorum generibus transigentur.

XLIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nuperas meas credo acceperis. Nunc istas mature summitto, ne facilitate Dn. Newtoni abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quaedam suae Epistolae loca explicaret; nempe, quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. fit $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$, vel [si sit $z \sqcap ay + by^3 + cy^5$ etc. erit] $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ etc. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus Extractionibus derivari, sed et altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri; qua me quoque aliquando usum in veteribus meis schedis reperio, sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sumpseram, nihil prodiisset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse.

---

*) In dem Abdruck dieses Briefes (Leib. op. Tom. III. p. 87) findet sich hier folgender Satz: Quae sunt eae seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria.

Difficultatem moveram in praecedentibus literis circa Aequationes Impossibiles, quarum Radices Possibiles videntur inveniri per series infinitas. Necdum vero illa sublata est, et meretur res excuti diligentius.

Illud tamen video, si in Aequatione data $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. literae z et y sint indeterminatae, tunc Aequationem semper esse Possibilem: sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b etc. lateret Aequatio, posset esse Impossibilis; et tamen per seriem generalem aliqua prodire videretur Radix possibilis. Cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror: sed nunc in ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari, tum quomodo ex seriebus agnosci possit, aequationes esse Impossibiles (quamquam id alias satis facile inveniatur), tum quomodo dignoscantur diversae Radices.

Praeter ea quae in superiore Epistola notavi, scilicet Methodum Tangentium Inversam et Geometricam (saltem suppositis Curvarum Analyticarum quadraturis) et alia id genus, deest nobis circa quadraturas, ut scire certe possimus, annon quadratura figurae alicujus propositae reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae. Nam pleraeque figurae, hactenus tractatae, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec per Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur caeterae omnes, quando id fieri potest. Hoc quamdiu non fit, haeremus; et saepe per Seriem Infinitam particularem quaerimus, quod ad Circuli aut Hyperbolae aut aliam notioris figurae quadraturam reduci poterat.

Crediderat Gregorius, dimensionem Curvarum Hyperbolae et Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolae. Ego vero reperi aliquam speciem curvae Hyperbolicae, quam ex data ipsius Hyperbolae quadratura metiri possum. De caeteris nondum mihi liquet.

Hannoverae, 12 Julii 1677.

XLIV.

Oldenburg an Leibniz.

Scripsi ad Te die 2. Maji novissimi, literisque meis inserui Apographum prolixae satis epistolae, a Cl. Newtono ad me datae, et fasciculum hunc Dno. Schrotero commisi, qui sancte pollicebatur, se eum, una cum reculis quibusdam suis, Hamburgum indeque Hannoveram transmittendis, fideliter ad Te curaturum. Spero, eum fidem datam liberasse, istumque adeo thesaurum Newtonianum (sic mihi eximium illud scriptum vocare fas sit) ad manus tuas rite pervenisse. Nunc mitto tibi per Sambinum, Heidelbergam contendentem, non modo jactatum, spem tamen fallens, Bondii Inventum de Longitudine, sed et Tractatum Andersonii de Tormentorum bellicorum Usu et Effectis, expectatione quoque nostra multum inferiorem. Comitatur hos libros libellus Darii, compendifactus, de Foenore tum simplici tum composito, una cum Appendice, quae Aequationum affectarum solutionem in numeris, per approximationem, Logarithmorum beneficio praestandam, docere satagit. Haec omnia Tibi mitto Collinii nostri nomine, qui una mecum virtutem et doctrinam tuam in magno ponit precio. Adjeci epistolam Anglice scriptam, quae Experimenta quaedam continet, curate a nostratibus pronuper sumpta, quaeque forte ad Projectilium Theoriam rite condendam non parum conferre poterunt.

Quoad Vernicem, quam a Collinio descriptam desideras, ait ille, parandae ejus modum in Evelini nostri Sylva et Pomona extare, qui liber cum forte ad manum tibi non sit, locum illum pagella hic seorsim juncta exscribendum curavi.

Rubelii liquor vulnerarius etiamnum famam suam inter ingenios tuetur, quamvis a malevolis et invidis artis Medicae professoribus passim exploratur.

Quicquid illud fuerit, quod in Arte Chrysopoetica pollicitus fuerit Sch^us^, nihil hactenus ab eo praestitum novimus. Jam assiduus fere comes est Imperatorici ad Aulam hanc Ablegati, qui nummum nobis monstrat, in aurum ex mercurio ni fallor, Viennae conversum, non tamen (quod nonnulli mirantur) in aurum purissimum, cum nonnisi 23 caratorum bonitatem obtineat.

Nescio, quid causae sit, quod Transactiones nostras a Schultzio non accepisti. Puto tamen, Martinum nostrum eas singulis mensibus Hamburgum curare. Invenies in iis, quicquid tum nostrates, tum Cassinus et Hevelius de Cometa nupero observata dedere. Continere se non potuit Cassinus a deducenda Theoria sua Cometica, antehac exposita, ex apparentium Cometae hujus locorum intervallis, quae laudatus Hevelius in literis suis posterioribus mihi communicaverat. Fortassis et hanc partem proximis Transactionibus inseram, quae tamen non nisi mense Septembri proximo in lucem emittentur, cum hoc feriarum aestivarum tempore Bibliopola meus imprimere haec acta tergiversetur.

Necdum hic appulit eorum ullus, qui Phosphoros se possidere venditant. Lubentes videremus substantiam illam, quam penes Dn. Craftium esse significasti, cum oppido rarum sit et eximium, corpus aliquod factitium secum perpetuo gestare lucem, et in tenebras translatum statim eam expromere, quin imo per aliquot annos vim lucendi retinere. Audivi interim, primum hujus Phosphori Inventorem degere Hamburgi, a quo dictus Craftius ejus parandi artem (hactenus tamen non nisi imperfecte) hauserit.

Facile credo, Te, in Aula isthac novum, variis modis distrahi. Dabis tamen operam, spero, ut quae apud vos et per Germaniam totam in re philosophica geruntur mature edoceamur: quod facile a Te fieri posse, ob Serenissimi Principis vestri ingenium curiosissimum et pansophicum (cui obsequium cultumque meum humillime defero) maximopere laetor.

Galli nuper Tractatum edidere de Architectura Navali, edituri alium de Arte Naves gubernandi. Jesuita Chales de Millet, Cursus Mathematici Author, opus nuper evulgavit de Arte Navigandi, et Dn. Felibienus aliud, de Architectura Civili. Dantisco nuper accepi libellum de Frigore, a quodam Conrado non male conscriptum, quamvis paucissima nova, vel quoad doctrinam, vel quoad experimenta, continentem, lectu tamen jucundum et ingenia excitantem.

Grevius noster, qui hactenus feliciter in Malpighio incubuit Anatomiae Plantarum, nuper Anatomen Animalium Comparatam aggressus est, atque examinatis jam 15 vel 16 Quadrupedum Intestinis eorumque differentiis variis probe inter se collatis, de eorum usibus doctam sane Dissertationem coram Societate Regia instituit. Ruminationis, inter alia, methodo, solidius quam hactenus factum tradita.

Dn. Boylius plurimam Tibi salutem dicit. Is, quamvis complura sub incude habeat, hactenus tamen ambigit, cuinam ex tot argumentis materiae primas in excudendo tribuere debeat.

Oxoniensis quidam, Dn. Plot vocatus, in lucem nuper emisit Historiam Naturalem Oxoniensis provinciae, seu Specimen quoddam Consilii quod init, de Historia Naturali omnium Angliae provinciarum condenda. In dicta Oxoniensi historia notavit conscripsitque omnia, quae in Comitatu illo circa Naturam, Artes et Antiquitatem, ipse, cum plurium virorum solertium ope, observare potuit. Putatur id peregisse magna cura et fide, multique animum induxere, opus hoc tam feliciter coeptum cohortationibus et opibus suis promovere. Ego ad plaerosque amicos meos transmarinos jam scripsi, quid hac in re apud nos jam sit praestitum, eosque sollicitari, ut hoc exemplo simile quid, in suis quique regionibus, aggredi, atque hac ratione symbolam suam ad Universalis historiae Naturae structuram exitandam conferre velint. Confido penitus, Vir Clarissime, Te non latitaturum post principia, sed summis viribus eo annixurum, ut similis Historia amplissimarum, quae Serenissimis Luneburgi et Brunsvici Principibus subjacent, ditionum concinnetur, cui Sapientissimos Doctissimosque juxta ac Bellicosissimos illos Heroas authoritatum et facultatum suarum partem generose et strenue collaturos esse persuasissimum habeo. Multa sine dubio in Sylva Hercinia occurrunt notatu dignissima, cujus partem insignem laudatissimi illi Duces possident. Dolendum profecto esset, semper ea debere a philosophantium cognitione abdi, nec in lucem protrahi, ut dignam Promptuarii naturae partem faciant. Sat viro ingenuo et ingenioso dictum, cui hanc rem sollicitandam summa animi contentione committo. Vale et ab omnibus amicis communibus, tui studiosissimis, plurimum salve.

Dabam Londini d. 12. Julii 1677.

XLV.

Oldenburg an Leibniz.

Ex quo tempore ad te scripsi per Dnum. Sambinum Heidelbergensem, quem etiam Dno. van der Heck commendavi, ut scil. fasciculum meum ipsi pro te traditum Hanoveram summa cura expediret, binas a Te literas accepi, quae utraeque de prolixa illa Dni. Newtoni Epistola, antehac ad te missa, cogitationes tuas aperiunt. Non est quod dicti Newtoni vel etiam Collinii nostri responsum tam cito ad eas expectes, cum et urbe absint, et variis aliis negotiis distineantur. Scire interim te velim, me in supradicto fasciculo inclusisse Bondium de Longitudine, et Andersonium de Projectilibus, et Darium de Faenore compendifacto; nec non Flamstedianae epistolae apographum de Experimentis Arcu factis; juncta etiam methodo Colliniana Vernicis parandae. Nunc tibi per Dn. Schröterum ultima mea Acta philos. mitto, cum priorum Te jam factum esse participem confidam.

Needum visus est in his nostris oris Dn. Craftius, cujus Phosphorii gemini videndi mirum nos desiderium incessit. Aemulatio quaedam ipsum inter et Kirchmaierum intercedere videtur, quam dirimi ipsa autopsia discuperem. De hoc argumento lator harum fusius haud dubie tecum colloquetur, qui nunc Viennam se properare ait, novi Principis Zinzendorfii honoribus litaturus.

Accepi nuper a Dno. Cassino literas, quas magni facio. Postquam enim notaverat Satellitum Jovis configurationes pro mensibus Augusto et Septembri hujus anni, promiseratque, se brevi reliquas hujus anni configurationes daturum; adjecit situm principalis maculae Jovis ad eos dies, quibus adjecta hora observari commode potest. Haec illa macula est, ex cujus restitutionibus, inter se comparatis, Revolutiones Jovis circa axem proprium periodum deduxit horarum 9. 56′, deinde subtilius h. g. 55′ 52″, quando motus Jovis apparens congruit medio, estque min. 5′ in consequentia. Paulo quippe tardius restitui maculam ait, cum motus Jovis apparens in Consequentia velocior est; paulo citius, quando motus hic Jovis in consequentia tardior est, vel stationarius, aut retrocedit. Hanc porro maculam hoc anno rursus in conspectum venire ait, quae duobus praecedentibus delituit: quam occultationis et apparitionis vicem jam saepius a se observatam asserit. Scil. cum annis 1665 et 1666 apparuerit, ab anno 1667 ad An. 1672 frustra quaesita est: Initio autem anni 1672 rursus apparuit eodem in situ Jovialis disci quo fuerat olim observata, et ad easdem horas, quas numeri Cassiniani postulabunt. Sed A. 1675 rursus evanuit delituitque usque ad mensem Julii anni hujus. Nunc iterum conspicua est eadem figura, eodemque loco Jovialis disci quo prius et easdem horas per dictos Cassini numeros praemonstratas.

Talis autem est, juxta Cassinum, Jovialis disci prospectus, quando illa ad medium itineris sui in disco Jovis apparente pervenit. Tres hic conspiciuntur obscurae Zonae jacentes in situ parallelo motui Jovis circa axem proprium, (Fig. 31), cujus polus Australis circa a, borealis circa b, schemate per telescopium inverso; Macula autem principalis Zonae Australis parti boreali adjacet.

Ao. 1675, quo macula principalis disparuit, interstitium lucidum in Zonam borealem et mediam disruptum esse, affirmat Cassinus in plures partes, parvas insulas in fluvio referentes: Mox insulas lucidas prorsus evanuisse adjicit, et ex duabus obscuris Zonis, media et boreali, semoto interstitio una latior conflata est; quam iterum hoc anno medio interstitio lucido in duas distinctam esse animadvertit. Notandum vero ait, eandem distinctionem hoc factam anno, quo Jovialium satellitum systema respectu nostri inversum est, semicirculis eorum superioribus, qui totum sexennium ad Austrum vergebant; nunc versis ad Boream, et e converso juxta ea, quae superiori anno in diariis praedixerat. Quam Jovialis mundi Catastrophon dignam existimavit, quae Regiae Societati communicaretur. Ideoque et ego dignam censui, quam Tibi, Societatis Regiae membro meritissimo, impertirem. Plura scribendi tempus non suppetit in praesenti. Vale igitur florentissime et me amare perge. Dab. Londini d. 9. Augusti 1677.

XLVI.

Leibniz an Newton.

Quantum Tibi scientiam rerum Mathematicarum totiusque Naturae debere arbitrer, occasione data etiam publice sum professus. Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti, patere Tibi etiam, quae analysi receptae non subsunt. Conatus sum ego quoque notis commodis adhibitis, quae differentias et summas exhibent, Geometriam illam quam Transcendentem appello analysi quodammodo subjicere, nec res male processit. Sed a Te magni aliquid expecto, ad summam manum imponendam, tum ut problemata, quae ex data tangentium proprietate quaerunt lineas, reducantur optime ad quadraturas; tum ut quadraturae ipsae (quod valde vellem) reducantur ad curvarum rectificationes, utique superficierum aut corporum dimensionibus simpliciores.

Sed super omnia optem, ut Geometricis absolutus naturam, uti coepisti, Mathematice tractare pergas, in quo genere certe tu unus cum paucissimis ingens operae pretium fecisti. Mirificum est, quod invenisti Ellipses Keplerianas prodire, si tantummodo attractio sive gravitatio et trajectio in planeta concipiantur, tametsi enim eo inclinem, ut credam haec omnia fluidi ambientis motu sive effici sive regi, analogia gravitatis et magnetismi apud nos; nihil tamen ea res dignitati et veritati inventi tui detraxerit. Quae summus et ipse Mathematicus, Christianus Hugenius, in tua notavit appendice libelli de causa luminis et gravitatis expensa Tibi non dubito; et sententiam vicissim tuam velim, vestra enim amica collatione potissimum, qui in hoc genere eminetis, erui veritas potest.

Cum vero maximum tu quoque lumen ipsi Dioptricae intuleris, explicatis colorum phaenomenis inexpectatis, velim quid sentias de Hugeniana explicatione radiationis utique ingeniosissima, cum feliciter adeo prodeat lex sinuum. Significavit mihi Hugenius, nescio quae nova phaenomena colorum sibi a Te communicata. Ego valde optem ut ratio colorum quos fixos vocant, ex apparentibus deduci possit, seu ut ostendatur ratio efficiendi per refractiones, ut tota aliqua superficies certum colorem ostendat.

In librorum apud Anglos editorum Indicibus occurrere mihi aliquoties libri Mathematici autore Neutono, sed dubitavi a Te essent, quod vellem, an ab alio homonymo.

Heinsonius noster redux testis fuit benevolentiae erga me Tuae. De cultu vero meo erga Te non ille tantum testari potest, sed et Stepneius, tecum ejusdem olim Collegii habitator, nunc Magnae Britannicae Regis negotia apud Caesarem; nuper apud Serenissimum Electorem Brandenburgicum curans.

Haec scribo magis ut studia erga Te mea intelligas, quae nihil tot annorum silentio amisere, quam ut studia Tua ego, quibus auges humani generis opes, interrumpere velim vacuis litteris, et supervacuis. Vale. Dabam Hannoverae $\frac{7}{17}$ Martii 1693.

XLVII.

Newton an Leibniz.

Literae tuae, cum non statim acceptis responderem, e manibus elapsae inter schedas meas diu latuere; nec in eas ante hesternum diem incidere potui. Id quod me moleste habuit, cum amicitiam tuam maximi faciam, teque inter summos hujus saeculi Geometras a multis retro annis habuerim; quemadmodum etiam data omni occasione testatus sim. Nam quamvis commercia philosophica et mathematica quam maxime fugiam, tamen metuebam ne amicitia nostra ex silentio decrementum acciperet; idque maxime cum Wallisius noster Historiam Algebrae in lucem denuo missurus nova aliqua e literis inseruit, quas olim per manus Dni Oldenburgi ad te conscripsi, et sic ansam mihi dedit ea etiam de re ad te scribendi. Postulavit enim ut methodum quandam duplicem aperirem quam literis transpositis ibi celaveram. Quocirca coactus sum qua potui brevitate exponere methodum meam fluxionum, quam hoc celaveram sententia: Data aequatione quantitates quotcunque fluentes involvente invenire fluxiones, et vice versa. Spero autem me nihil scripsisse quod tibi non placeat, et siquid sit quod reprehensione dignum censeas ut literis id mihi significes, quoniam amicos pluris facio quam inventa mathematica.

Reductionem quadraturarum ad curvarum rectificationes quam desiderare videris, inveni talem. Sit Curvae cujusvis abscissa x, ordinata y et area az, posito quod a sit data quantitas. Fluat x uniformiter sitque ejus fluxio $\dot{x} = a$, et ipsius y sit fluxio $\dot{y}$. A dato puncto (Fig. 32) D in recta positione data DE sumatur BD = x, et agatur indefinita BCG ea lege ut cosinus anguli DBG sit ad Radium ut fluxio $\dot{y}$ ad fluxionem $\dot{x} = a$: et inveniatur Curva FG quam recta BG perpetuo tangit. Id enim semper fieri potest Geometrice ubi fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ relatio geometrica est. Sit G punctum contactus et ubi punctum B incidit in punctum D incidat punctum G in punctum F. In tangente BG sumatur GC aequalis Curvae GF et CH aequalis rectae FD et erit BH = z. Qua inventa habetur area quaesita az.

Quae vir summus Hugenius in mea notavit, ingeniosa sunt. Parallaxis solis minor videtur quam ipse statueram, et motus sonorum forte magis rectilineus est. At caelos materia aliqua subtili nimis implere videtur. Nam cum motus caelestes sint magis regulares quam si a vorticibus orirentur, et leges alias observent, adeo ut vortices non ad regendos, sed ad perturbandos Planetarum et Cometarum motus conducant; cumque omnia caelorum et maris phaenomena ex gravitate sola secundum leges a me descriptas agente accurate quantum sentio sequantur, et natura simplicissima sit; ipse causas alias omnes abdicandas judicavi et caelos materia omni quantum fieri licet privandos, ne motus Planaterum et Cometarum impediantur aut reddantur irregulares At interea siquis gravitatem una cum omnibus ejus legibus per actionem materiae alicujus subtilis explicuerit et motus Planetarum et Cometarum ab hac materia non perturbatos iri ostenderit, ego minime adversabor. Colorum phaenomena tam apparentium ut loquuntur quam fixorum rationes certissimas me invenisse puto, sed a libris edendis manum abstineo, ne mihi lites ab imperitis intententur et controversiae. Alius est Newtonus, cujus opera in librorum editorum indicibus tibi occurrunt. His contestari volui me tibi amicum integerrimum esse et amicitiam tuam maximi facere. Vale. Dabam Cantabrigiae, Octob. $\frac{16}{26}$ 1693.

Utinam rectificationem Hyperbolae, quam te invenisse dudum significasti, in lucem emitteres.

Leibniz an Galloys.

Leibniz war durch Oldenburg's Vermittlung einstimmig zum Mitglied der Königlichen Societät zu London (9. April 1673) erwählt worden. Es darf deshalb nicht Wunder nehmen, zumal da Leibniz stets das grösste Interesse für gelehrte Vereine zeigte und es ihm als die höchste Ehre galt, Mitglied einer gelehrten Körperschaft zu sein, dass sein Bestreben nun dahin ging, ebenfalls in die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Paris aufgenommen zu werden. Er setzte daher nicht allein die Fürsprache von Hugens in Bewegung (Guhrauer, Leben Leibniz. Theil 1. S. 171. f.), sondern er wandte sich auch an Männer, die damals auf den allmächtigen Minister Colbert Einfluss hatten. Zu den letztern gehörte der Abbé Galloys (so schreibt er seinen Namen stets in den sehr kurzen, inhaltslosen Billets, mit denen er die Briefe Leibnizens beantwortete, nicht Gallois).

Nach der Histoire littéraire de la France, Articl. Gallois, zeichnete sich derselbe durch eine für seine Zeit schöne Schreibart besonders aus, und er erhielt im Jahre 1666 von Colbert das Privilegium zur Herausgabe des Journal de Savans, das er bis zum Jahre 1674 allein redigirte. 1668 wurde Galloys Mitglied der Akademie. Er genoss fortdauernd die Gunst Colbert's, der ihn sehr hoch schätzte, so dass er ihm sogar eine Wohnung in seinem Hôtel einräumte*). Bei der Umgestaltung der Akademie im

*) Vergl. dagegen über das Verhältniss zwischen Colbert und Galloys ein Urtheil von Leibniz im Commercium philo. et mathemat. Leib. et Joh. Bernoull. Tom. II. p. 178.

Jahre 1699 erhielt Galloys einen Platz in der Classe der Geometrie, und er fasste damals den Plan, die mathematischen Sammlungen des Pappus herauszugeben, ohne ihn jedoch auszuführen. In der letzten Zeit seines Lebens nahm er Antheil an dem Streit, den Rolle gegen die Differentialrechnung erhob; er wird wenigstens unter denen genannt, von welchen Rolle zu seinen Angriffen vermocht worden war. Galloys starb 19. April 1707, 75 Jahr alt. In den Memoiren der Akademie der Wissenschaften finden sich mehrere Abhandlungen mathemathischen Inhalts von ihm.

Leibniz erreichte damals seinen Zweck nicht, obwohl er, nachdem er Paris verlassen, von Hannover aus seine Bewerbungen fortsetzte. Dass er Lutheraner war, scheint unübersteigliche Schwierigkeiten gemacht zu haben. Erst nach dem Jahr 1699 wurde Leibniz zum Mitglied erwählt.

Die drei folgenden Schreiben Leibnizens sind zur Beurtheilung seiner Thätigkeit um die damalige Zeit nicht ohne Wichtigkeit. Er gedenkt aller seiner Arbeiten, um Galloys zu seinen Gunsten zu stimmen. Besonders verbreitet er sich ausführlich über jenes riesige Unternehmen, die allgemeine Charakteristik, von der sich mehr oder minder ausgeführte Bruchstücke in seinem Nachlass finden.

I.

Leibniz an Galloys.

Paris 2. Novembr. 1675.

Une indisposition m'a empeché de faire ma cour cette semaine comme je me l'estois proposé. C'est pourquoy je Vous supplie de suppléer par vostre bonté au defaut de ma presence, si l'occasion se presente de parler utilement de l'affaire qui vous est renvoyée, et j'espere que vos faveurs seront bientost suivies d'un succès favorable.

Je n'ay pas osé écrire à Mons. le Duc de Cheureuse, de peur d'abuser de la grace qu'il me fait de ne me pas rebuter entierement, lorsque je viens quelquesfois luy faire la reverence. Mais je sçay que Vos recommandations serviront bien mieux à me conserver l'honneur de la protection que tout ce que je pourrois écrire.

Comme je ne veux pas abuser de vostre temps, qui est dû au public, et à des personnes pour lesquelles le public s'interesse, je ne veux adjouter que le recit d'une petite conqueste que je viens de faire sur l'Hyperbole. Tout le monde sçait qu' Archimede a donné la dimension de la Courbe du Cercle en supposant la quadrature de la figure. Messieurs Hugens, Wallis, et Heuraets ont fait voir que la Courbe de la Parabole depend de la Quadrature de l'Hyperbole. Mais personne a donné encor la dimension de la Courbe de l'Hyperbole par la Quadrature de son espace; non pas même de celle de l'Hyperbole principale, qui a les asymptotes à angle droit, et les costez rectum et transversum égaux, et qui est entre les Hyperboles ce que le Cercle est entre les Ellipses. J'en suis venu à bout à la fin par un effort d'esprit sur ce que Mons. Oldenbourg m'avoit écrit dépuis peu que Messieurs les Anglois l'avaient cherchée, et la cherchoient encor sans succès. Cela m'anima à faire une petite tentative, d'autant plus que je sçavois que Mons. Gregory (qui est grand Geometre sans doute) y avoit renoncé en quelque façon publiquement dans sa Geometrie des Courvilignes. Mais je vous en parleray plus amplement, quand j'auray l'honneur de vous saluer, cependant je me dis etc.

Leibniz an Galloys.*)

Quoyque vous ayez eu assez de bonté pour me souffrir quelques fois auprès de vous, vous sçavez neantmoins que j'ay toujours ménagé le temps des personnes que j'honnore. J'observe la même maxime lorsqu'il s'agit d'écrire des lettres, et je n'importune que le moins qu'il m'est possible ceux dont le temps est destiné à des soins plus importans. Je sçay que vous avez peu de momens à perdre estant attaché à un grand Ministre de qui la merveilleuse conduite n'est pas le moindre des bienfaits dont la France doit remercier le ciel. Comme vous estes toujours si près de sa personne, il y a lieu de juger que des affaires aux quelles vous estes occupé, ne doivent pas estre interrompues par des lettres de mes pareils. Je me trouve neantmoins en quelque façon obligé de vous écrire celle cy, tant parcequ'il me semble que vous m'en avez donné permission, que parceque je vous dois ces marques de ma gratitude qui sont les moindres que je vous doive donner.

En effect, Monsieur, je rougis lorsque je songe à la peine que j'ay donnée à Mons. le Duc de Chevreuse et à vous, et cependant vous aviez la bonté non seulement de me favoriser, mais même de m'inviter à rechercher vostre assistance dans une

*) Leibniz hat bemerkt: ist nicht abgangen. — Es fehlt das Datum auf diesem Schreiben. Jedenfalls ist es im Laufe des Jahres 1677 abgefasst, da Leibniz darin den Tod Spinoza's erwähnt, der den 21. Febr. 1677 starb.

affaire qui avoit quelque apparence. Toute la faute que j'ay faite est de n'avoir pas fait plutost ce que j'ay esté obligé de faire à la fin, car je ne vous aurois pas importuné si souvent, et je n'aurois pas perdu tant de temps, car la même retraite ou je me trouve maintenant m'estoit déja ouverte il y a long temps. Mais en effect je ne repends pas d'avoir tardé si long temps à Paris, puisque j'ay connu par la quelques personnes dont j'honnoreray tousjours le merite extraordinaire, et dont vous estes un des principaux, ce qu'on peut dire sans vous flatter. Peut estre même que le temps viendra que vos bontez ne se trouveront pas entierement sans effect, qu'on pourra reconnoistre la bonne volonté que j'ay eue, et que les dommages que j'ay soufferts par ma faute se pourront reparer.

Maintenant j'ay la satisfaction d'estre tout à fait bien auprès d'un prince dont les talens extraordinaires et les grandes vertus font du bruit dans le monde. J'ay une place de Conseiller, 500 écus de gage bien payés, le logement et la table, mais de plus un accés auprès du prince, qui me donne occasion de ressentir souvent des effects de sa bonté, et d'apprendre les sentimens genereux dont il a l'ame remplie. En effect on sçaura un jour, que ce n'est pas l'interest, mais le bien public qui le fait agir et qu'on l'a soubçonné à tort d'avoir voulu s'écarter de son chemin.

Nous aurons icy M. Stenon en qualité d'Evesque in partibus et de Vicaire Apostolique en cette Cour, à la place de feu M. l'Evesque de Marocco que S. A. S. entretenoit. Je ne sçay si vous avez veu les lettres de controverse de Mons. Stenon; il y en avoit une qui estoit adressé à M. Spinosa. Spinosa est mort cet hiver. Je l'ay veu en passant par la Hollande, et je luy ay parlé plusieurs fois et fort long temps. Il a une étrange Metaphysique, pleine de paradoxes. Entre autres il croit que le monde et Dieu n'est qu'une même chose en substance, que Dieu est la substance de toutes choses, et que les creatures ne sont que des Modes ou accidens. Mais j'ay remarqué que quelques demonstrations pretendues, qu'il m'a monstrées ne sont pas exactes. Il n'est pas si aisé qu'on pense, de donner des veritables demonstrations en metaphysique. Cependant il y en a et de très belles. On n'en sçauroit avoir avant que d'avoir establi de bonnes definitions qui sont rares. Par exemple il n'y a personne qui ait bien défini ce que c'est que semblable, et cependant avant que de l'avoir defini, on ne sçauroit donner des demonstrations naturelles de plusieurs propositions importantes de metaphysique et de mathematique. Apres avoir bien cherché, j'ay trouvé que deux choses sont parfaitement semblables, lorsqu'on ne les sçauroit discerner que per compraesentiam, par exemple, deux cercles inegaux de même matiere ne se sçauroient discerner qu'en les voyant ensemble, car alors on voit bien que l'un est plus grand que l'autre. Vous me direz: je mesureray aujourdhuy l'un, demain l'autre; et ainsi je les discerneray bien sans les avoir ensemble. Je dis que c'est encor les discerner non per memoriam, sed per compraesentiam: parce que vous avez la mesure du premier presente, non pas dans la memoire, car on ne sçauroit retenir les grandeurs, mais dans une mesure materielle gravée sur une regle, ou autre chose. Car si toutes les choses du monde qui nous regardent, estoient diminuées en même proportion, il est manifeste, que pas un ne pourroit remarquer le changement. Par cette definition je demonstre aisement des propositions tres belles et tres generales, par exemple que deux choses estant semblables selon une operation ou consideration, le sont selon toutes les autres; par exemple soyent deux villes inegales en grandeur, mais qui paroissent semblables parfaitement, lorsqu'on les regarde au costé oriental, je dis qu'elles paroistront aussi semblables, quand on les regardera du costé occidental, pourveu que à chaque veue on découvre toute la ville. Cette proposition est aussi importante en Metaphysique et même en Geometrie et en Analyse, que celle du tout plus grand que sa partie. Et neantmoins personne que je sçache l'a enoncée. On demontre par la aisement le theoreme des triangles semblables qui semble si naturel, et qu' Euclide demonstre par tant de circuits.

Je ne sçay si vous vous estes souvenu, Monsieur, de faire extraire les definitions du dictionnaire de l'Academie françoise. Je souhaiterois fort moy même de les avoir par vostre faveur. En voulant aller d'Angleterre en Hollande j'ay esté retenu quelque temps dans la Tamise par les vents contraires. En ce temps la ne sçachant que faire et n'ayant personne dans le vaisseau que des mariniers, je meditois sur les choses la, et surtout je songeois à mon vieux dessein d'une langue ou écriture rationelle, dont le moindre effect seroit l'universalité et la communication de differentes nations. Son veritable usage seroit de peindre non pas la parole, comme dit Monsieur de Brebeuf, mais les pensées, et de parler à l'entendement plutost qu'aux yeux. Car si nous l'avions telle que je la conçois, nous pourrions raisonner en metaphysique et en morale à peu pres comme en Geometrie et en Analyse; par ce que les Caracteres fixeroient nos pensées trop vagues et trop volatiles en ces matieres, ou l'imagination ne nous aide point, si ce ne seroit par le moyen de caracteres. Ceux qui nous ont donné des methodes, donnent sans doute des beaux preceptes, mais non pas le moyen de les observer. Il faut, disent-il, comprendre toute chose clairement et distinctement, il faut proceder des choses simples aux composées; il faut diviser nos pensées etc. Mais cela ne sert pas beaucoup, si on ne nous dit rien davantage. Car lorsque la division de nos pensées n'est pas bien faite, elle brouille plus qu'elle n'éclaire. Il faut qu'un écuier tranchant sçache les jointures, sans cela il dechirera les viandes au lieu de les couper. Mons. des Cartes a esté grand homme sans doute, mais je croy que ce qu'il nous a donné de cela (?) est plutost un effect de son genie que de sa methode, parceque je ne voy pas que ses sectateurs fassent des decouvertes. La veritable methode nous doit fournir un filum Ariadnes, c'est à dire un certain moyen sensible et grossier, qui conduise l'esprit, comme sont les lignes tracées en geometrie et les formes des operations qu'on prescrit aux apprentifs en Arithmetique. Sans cela nostre esprit ne sçauroit faire un long chemin sans s'égarer. Nous le voyons clairement dans l'Analyse, et si nous avions des caracteres tels que je les conçois en metaphysique et en morale, et ce qui en dépend, nous pourrions faire en ces matiéres des propositions très asseurées et tres importantes; nous pourrions mettre les avantages et desavantages en ligne de conte, lorsqu'il s'agit d'une deliberation; et nous pourrions estimer les degrez de probabilité, à peu près comme les angles d'un triangle. Mais il est presque impossible d'en venir à bout sans cette characteristique. Je vous en parle parceque je sçay que vous avez songé autres fois à des choses de cette nature, et que vous en avez une parfaite intelligence. J'ay parlé au long dans la lettre que j'ay pris la liberté d'écrire à Mons. le Duc de Chevreuse d'une matiere qu'on a trouvée en Allemagne, et qui semble donner quelque chose d'approchant de la lumiere perpetuelle. Omnia jam fient fieri quae posse negabant. J'ay veu aussi des experiences considerables sur une eau vulneraire faite dans ces pays cy, elle guerit et appaise la douleur avec une promptitude merveilleuse, il n'en reste quasi point de marques, ce qui seroit d'importance pour les blessures du visage. Je travaille quelque fois en matiere de mouvement, et je trouve qu'il n'y a point d'auteur qui n'en ait donné presque icy des regles fautifes comme je puis demonstrer, et même verifier par l'experience. J'ay laissé à Paris le Manuscript de ma quadrature, et peut estre qu'on l'y pourra faire imprimer.

Il est temps de finir cette lettre assez prolixe, en vous asseurant que je serois toute ma vie etc.

III.

Leibniz an Galloys.

December 1678.

J'ay appris de M. de la Rocque que la lettre que je vous avois écrite et envoyée à un nommé Mons. Soudry, n'a pas esté rendue. Ce Mons. Soudry est mort d'apoplexie à l'armée à mon grand regret; car il estoit habile homme surtout en mechanique, et il s'étoit chargé à Paris du soin de l'impression de mon Manuscrit de la quadrature arithmetique. Pour reparer ce malheur qui est arrivé à ma lettre, je n'ay pas voulu manquer de vous écrire pour obtenir abolition du crime de silence et d'ingratitude dont vous m'avés peut estre déja condamné. En effect, Monsieur, apres les bontés que vous m'avés témoignées aussi bien que Monseigneur le Duc de Chevreuse, mon silence seroit criminel. Vous avez souffert mes importunités par un long espace de temps, et vous vous estes donné autant de peine pour l'amour de moy, que vous en auriés pû prendre pour nos propres interests. Cependant j'estois un inconnu, un étranger, un homme, qui ne vous étoit utile à rien. L'opinion que vous avies de moy que je pourrois contribuer quelque chose à l'avancement des sciences, a esté l'unique raison d'un procedé si genereux. Le malheur a voulu que je n'en ay pû profiter. Et je vous avoue, Monsieur, que ce qui m'a fait balancer le plus lorsqu'on m'appelloit icy, a esté le regret que j'avois de laisser vostre ouvrage imparfait et de quitter des personnes de tant de merite, et de tant de bonté. Mais enfin je ne pûs m'en defendre. Car n'ayant pas encor une resolution positive à Paris, je fus obligé de ne pas laisser passer une occasion que je ne retrouverois pas. En effect Son Altesse Serenissime, mon Maistre, m'a traité fort genereusement bien au delà de ce qu'elle m'avoit promis. En venant icy j'avois seulement 400 écus d'argent content, et le logement à la Bibliotheque de S. A. S. avec un simple titre de conseiller. Maintenant outre le même logis j'ay jusqu'à 900 écus d'argent content; et une charge fixe et effective de conseiller du conseil aulique qui est immediatement apres celuy d'Estat, avec esperance de quelques autres graces et beaucoup d'entrée auprès du Maistre. Vous jugés bien, Monsieur, que c'est quelque chose et que l'argent vaut autant que si j'en avois bien d'avantage à Paris où tout est plus cher. Mais le principal est que le Prince qui est non seulement curieux, mais encor intelligent au delà de ce qu'on sçauroit croire, voulant que je luy rapporte de temps en temps ce qui se passe dans les belles sciences, me donne par là la liberté de m'entretenir quelques fois avec mes premieres amours. En effect je pretends d'avoir en Geometrie et en Mecaniques des choses qui sont bien au delà de ce que je sçavois à Paris. Mais sur tout je songe aux Combinaisons que vous m'avés recommandées. Je ne cherche presque plus rien en Geometrie, que l'art de trouver d'abord les belles constructions. Je voy de plus en plus que l'Algebre n'est pas la voye naturelle pour y arriver, et qu'il y a moyen de faire une autre caracteristique propre aux lignes, et naturelle pour les solutions lineaires; au lieu que l'Algebre est commune à toutes les grandeurs, et qu'il fait des detours, et des operations forcées ordinairement, pour tirer la construction du calcul; quoyque sur cela même il y ait beaucoup d'adresses qui ne sont pas encor connues à tout le monde. Si cette caracteristique de Geometrie estoit établie comme je voy qu'elle pourroit estre, elle meneroit infalliblement là où l'on veut aller, autant qu'il est possible, aussi bien que l'Algebre, au lieu que les adresses des Geometres ordinaires qui ne cherchent les solutions que par la voye lineaire et purement Geometrique, sont bien bornées, et ne leur reussissent que rarement: L'algebre au contraire ayant cela de bon qu'elle fait tousjours arriver à la solution du probleme, quoyque la solution ne soit pas tousjours la plus courte, et quoyque la voye du calcul ne soit pas la plus naturelle, et n'éclaire pas l'esprit en chemin comme la voye des Geometres.

Ce n'est pas pourtant l'Algebre de Viete ou de des Cartes qui puisse arriver à la solution de tous les problemes: puisqu'elle ne va qu'aux problemes de la Geometrie rectilineaire, c'est à dire qui traite des moyens de trouver une ligne droite dont la relation à d'autres lignes droites est donnée; car ce ne sont que ces problemes qui se reduisent aux équations du premier, second, troisieme, ou quelque autre degré plus haut et qui sont les seuls que M. des Cartes apprend de resoudre par l'intersection de ses courbes. Au lieu que les problemes les plus difficiles, et qui ont le plus d'influence dans la mecanique ne se reduisent à aucune equation d'un certain degré. Ils dépendent de quelques equations extraordinaires, que j'appelle Transcendentes, parce qu'elles sont de tous les degrés tout à la fois, ou conjointement, ou bien alternativement. Il faut de nouvelles lignes courbes, pour les construire, et il faut une nouvelle espece d'Algebre, pour les traiter dignement: elle n'est pas encor connue de nos auteurs: Et cependant les centres de gravité, les quadratures, les dimensions des courbes ou grandeurs courvilignes, et generalement tous les problemes pour lesquels la grandeur de quelque ligne autre que droite ou de quelque espace compris de telles lignes est supposée ou demandée, reviennent à cette Algebre transcendente, quand on les veut reduire aux termes de calcul. C'est pourquoy il ne faut pas s'étonner si Viete, des Cartes même, et leurs disciples n'ont pû presque rien faire sur ces sortes de problemes. Et ce que les autres ont fait la dessus ne sont que de certaines rencontres particulieres, heureuses ou ingenieuses. Au lieu que je voy moyen de traitter tout cela analytiquement et j'ay beaucoup d'essais considerables de ma methode.

Pour ce qui est de l'Algebre en elle même, separée de l'application aux lignes, j'ay un grand dessein, c'est de donner un moyen de faire des tables literales, aussi utiles en Algebre specieuse, que les tables des sinus le sont en nombres. Par ce moyen on n'auroit presque d'autre peine en calculant, que d'ordonner son calcul, d'en transcrire l'evenement des tables, et de substituer en copiant les lettres qu'on a employées dans son calcul à la place de celles des tables. C'est sans doute la plus utile chose dont on se puisse aviser en Algebre; et ce qu'il y a encor de bon, est que ces tables ne se sçauroient fausser, parce que tout y garde un certain ordre, et va avec une progression si bien reglée, qu'on y découvre d'abord s'il y a quelque faute de calcul ou d'impression. Pour la construction de ces Tables, le tout est d'en sçavoir le dessein et d'en trouver le vray commencement ou d'y avoir entrée, par une ouverture naturelle. Le reste n'est presque que la peine d'écrire. Outre cela j'ay des voyes demonstratives pour arriver à l'extraction des racines irrationelles des equations des degrés qui passent le cube et le quarré-quarré. Mais comme le calcul en est long, je suis presque d'avis, de le differer jusqu'à la l'execution des tables.

Pour la Science des Nombres j'ay enfin obtenu le moyen que j'ay cherché long temps, de resoudre les problemes de l'Arithmetique figurée, ou de Diophante, par une voye seure et analytique; ce que Bachet, M. Fermat, M. Frenicle, et quelques autres habiles gens ont fait la dessus ne sont que des tentatives, qui reussissent en de certains cas particuliers; et ma voye est aussi differente de la leur, que l'Analyse l'est de la Geometrie ordinaire. Mes solutions peuvent tousjours estre universelles, c'est à dire je puis faire un denombrement par ordre de tous les exemples ou nombres qui peuvent satisfaire à l'infini; et je puis determiner les plus simples de tous; aussi bien que demonstrer les impossibilités. J'ay demonstré le theoreme de Mons. Frenicle (de l'impossibilité d'un triangle rectangle dont l'aire est quarrée) par une voye differente de la sienne, et bien meilleure, puisqu'elle donne une infinité d'autres theoremes plus generaux. Cependant les plus habiles mathematiciens ont cherché inutilement une demonstration differente de celle de M. Frenicle. Je n'estime pas fort ces sortes de problemes de l'Arithmetique de Diophante, car quoyqu'ils soyent beaux, ils sont de peu d'usage. Je les estime pourtant assés pour les dépecher une fois pour toutes, à fin que le monde n'en soit plus fatigué; et à fin d'avancer l'art d'inventer, d'autant que l'analyse connuë jusqu'icy n'y pouvoit arriver, et d'autant que M. des Cartes a avoué dans ses lettres qu'il y trouvoit de la peine.

J'ay quelques pensées Mechaniques qui auront des suites; je fais executer ma machine Arithmetique, et je ne m'oublieray pas l'horloge sans parler de quelques autres desseins. J'ay laissé à Paris mon Manuscrit de la Quadrature Arithmetique. Les Theoremes qu'il contient sont considerables en theorie, et tres utiles pour la practique. Car en retenant seulement dans la memoire deux progressions tres simples que j'y donne, et qu'on ne sçauroit quasi oublier, quand on les a une fois apprises, on pourra resoudre par le aisement tous les problemes de Trigonometrie, sans les Tables, sans instrumens, et sans livres, avec autant d'exactitude que l'on voudra. Ce qui sera d'un grandissime usage pour les voyageurs, qui ne peuvent pas tousjours porter leurs livres avec eux. Avoir des tables est une commodité, mais ne pouvoir pas resoudre les problemes sans les tables est une imperfection de la science, à la quelle je pretends d'avoir remedié. Cette invention a paru memorable à des habiles Geometres: et j'avois eu l'ambition de l'eterniser, „en la faisant publier parmy les découvertes bien plus impor-„tantes de vostre Academie Royale, mais je ne sçay si cela „se pourra faire doresnavant. Si ce n'est que vostre bonté „trouve un jour quelque expedient favorable pour faire en sorte „que toutes les peines que vous avés prises pour moy du „temps passé reussissent encor à quelque chose d'approchant; „Car je ne sçay s'il est necessaire d'estre tousjours à Paris „pour avoir quelque relation à l'Academie Royale, d'autant que „le Roy a fait des graces pareilles à des gens qui n'avoient „point de telle relation à l'Academie et qui ne se chargoient „d'aucun travail."

J'adjouteray quelque chose des Combinaisons, et de l'Art d'inventer en general. Car je sçay que vous aimés ces considerations universelles, et que vous avés vous même là dessus des observations importantes. Je suis confirmé de plus en plus de l'utilité et de la realité de cette science generale et je voy que peu de gens en ont compris l'étendue. Mais pour la rendre plus facile et pour ainsi dire sensible, je pretends de me servir de la characteristique dont je vous ay parlé quelques fois, et dont l'Algebre et l'Arithmetique ne sont que des échantillons. Cette characteristique consiste dans une certaine écriture ou langue (car qui a l'une peut avoir l'autre) qui rapporte parfaitement les relations des nos pensées. Ce charactere seroit tout autre que tout ce qu'on a projetté jusqu'icy. Car on a oublié le principal qui est que les characteres de cette écriture doivent servir à l'invention et au jugement, comme dans l'Algebre et dans l'Arithmetique. Cette écriture aura de grands avantages, entre autre un qui me paroist important. C'est que les chimeres que celuy même qui les avance n'entend pas ne pourront pas estre écrites en ces caracteres. Un ignorant ne s'en pourra pas servir ou s'efforçant de le faire il deviendra sçavant par là même. Car cette écriture est instructive bien plus que celle des Chinois ou il faut estre sçavant pour sçavoir écrire. La connaissance de la langue s'avancera avec celle des choses et y servira beaucoup, et une chose pourra avoir autant de noms que de proprietés; mais il n'y en a qu'un qui sera la clef de tous les autres, quoyqu'on n'y puisse pas toujours parvenir dans les matieres qui dependent des experiences. Cependant on approchera au moins par cette voye, autant qu'il est possible ex datis experimentis aut in potestate existentibus. On jugera même souvent quelles experiences sont encor necessaires pour remplir le vuide. Mais à fin d'arriver à ce grand dessein, il ne faut que les definitions des termes de quelque langue receue, ce qui n'est pas infini. Et cela me fait souvenir des definitions des mots qui ont esté faits dans l'Academie Françoise dont vous m'avés parlé un jour, et que je souhaiterois bien de voir. Il y aura bien d'abregés dans l'execution: mais je ne me sçaurois expliquer là dessus en peu de mots.

Je m'apperçois que la chaleur d'écrire me mene trop loin, et que tant de choses que j'entasse les unes sur les autres pourront paroistre un peu chimeriques à une personne aussi exacte et aussi judicieuse que vous estes. Mais la satisfaction que j'ay de vous parler m'a emporté, et j'espere que vous aurés la bonté de prendre cette lettre pour une conversation ou il se dit bien des choses, qu'on n'asseure pas à la rigueur. Peut estre pourtant que je n'ay rien dit, dont je n'aye quelque échantillon, et dont je ne puisse demonstrer au moins la possibilité, et donner même quelque ouverture pour y arriver. Et cela est bien assés pour un homme comme moy, qui est distrait de plusieurs manieres, et qui n'est pas aidé. Mais si j'avois des personnes capables de concourir avec moy, je croy que je n'ay rien dit que nous n'executerions; et peut estre encor quelque autre chose. Car il y a ordinairement un enchainement dans les découvertes.

Je vous supplie, Monsieur, de faire tenir la cy jointe à Monseigneur le Duc de Chevreuse, j'y parle amplement de ce phosphore ou feu tangible, dont il est fait mention dans le journal. J'en rapporte quelques experiences assez curieuses. Je souhaiterois d'en procurer quelque avantage à l'inventeur. J'espere même, que cela donnera matiere de parler de moy, et de faire valoir ma correspondance qui pourra quelques fois estre utile à l'Academie, parce que plusieurs curieux s'adressent à moy maintenant que j'ay l'honneur d'approcher souvent d'un prince qui entend et qui aime les belles choses. On me fait esperer une liqueur d'une telle force, qu'elle attaque même le verre en peu de temps, et plusieurs autres experiences considerables. Je me remets à ce que vous trouverés convenable.

Vous desirez de sçavoir, Monsieur, les oeuvres d'Aegidius Strauchius et de Samuel Puffendorf. Voicy ceux qui me sont connus.

Aegidii Strauchii

Breviarium Chronologicum (que vous sçaves déja).

Astrognosia. 12°. Witeb. 1668, ou il tache de donner une methode aisée pour connoistre les étoiles fixes.

Tabulae Matheseos. 12°. Witeb. 1662. C'est un recueil des tables Mathematiques qui sont les plus necessaires pour la Geometrie practique, l'Astronomie, la Geographie, la Chronologie etc. J'apprehende seulement qu'elles ne soyent pas correctement imprimées.

Aphorismi Mathematici. 12°. Witeb. 1675. Ces sont les propositions les plus necessaires à sçavoir, mais si je ne trompe pas, elles sont sans demonstration.

Magnitudinum doctrina. 12°. Witeb. 1678. C'est à peu près de même.

Definitiones Theologicae. 4°. Dantisci 1672.

Compendium Theologiae. 12°. Dantisci 1673.

Il y a encor de luy quelques disputations, quelques sermons, et quelques livres de controverse, car il a eu des démelés avec le jeune Calixtus, theologien de Helmstäd, et avec quelques uns de ses propres collegues et avec le Magistrat même à Danzig. . . .

Samuelis Puffendorfii

Elementa juris universalis } que vous sçavés deja.
De officio hominis }

Son grand ouvrage in 4°. de jure naturae et gentium dont le livre de officio hominis est l'abregé. Londin. 1672. 4°.

Monzambanus, de statu imperii Germanici. Ce livre a esté traduit en françois, mais chastré. L'auteur n'est pas nommé dans ce livre, mais tout le monde sçait que c'en est M. Puffendorf. Et son frere qui a esté resident de Suede en France et ailleurs, ne le desavoue pas.

Dissertatio de Republica irregulari [qui sert d'éclaircissement au Monzambane]. 12°. 1669.

Dissertationes Academicae selectiores, Upsaliae 1677. 8°.

Maintenant il travaille à l'histoire de Suede depuis le Roy Gustave premier jusqu'à la mort de Charles Gustave.

Quand j'apprendrois quelques autres livres de ces Messieurs, je vous en feray part.

Vous aurés veu Stephanum de Urbibus avec les Commentaires de Thomas Pinedo, Juif Portugais, imprimé depuis peu en Hollande. Je suis bien aise de voir que les Juifs commencent à apprendre les lettres latines et grecques; cela facilitera sans doute leur conversion.

Un nommé Sandius en Hollande pretend de rétablir l'Arianisme, qui est different du Socianisme comme vous sçavés en ce que Socinus et quelques autres modernes pretendent que Jesus Christ n'a pas esté avant sa mere; au lieu qu'Arius et les autres anciens de cette étoffe l'ont crû au moins primogenitum creaturarum. Vous avés peut estre veu aussi le livre de Caesarinus Furstenerius de Jure Suprematus (c'est à dire de la souveraineté) Principum Germaniae, ou il pretend d'expliquer comment ils sont souverains non ostant ce qu'ils doivent à l'Empereur et à l'Empire. Item le projet qu'on a publié en Hollande des oeuvres de feu M. Saumaise qu'on pretend y faire imprimer.

Il est temps de finir à moins que de commencer une 4me feuille, et de faire un livre au lieu d'une lettre. Je vous supplie d'excuser que je me suis servi d'une autre main, parce que la poste pressoit, et je faisois copier, pendant que je continuois d'écrire. Mais je vous supplie sur tout, de me pardonner cette prolixité inouyé. Il me sembloit que je vous parlois en écrivant; et le souvenir de la satisfaction que j'avois trouvé dans vostre entretien me charmoit. En effect, Monsieur, quelque agreable que le sejour de Paris puisse estre, je ne le regrette que parceque j'ay quitté avec luy un tres petit nombre de personnes qui vous ressemblent, quoyque je ne sache si deux ou trois font nombre. Cette étendue d'esprit, cette maturité de jugement, avec des sentimens si equitables, sont des plus rares productions de la nature, et un voyageur peut dire, quand il a bien employé son temps, quand il en rencontre pendant ses courses. Ce peu d'espace qui reste, m'oblige d'arrester. Si vous me voulés honorer de quelque commandement, Monsieur Brosseau, Resident de S. A. S. mon Maistre, me le fera tenir. Je suis avec tout le zele, que je dois à vostre merite éclatant, et à vos bontés signalées etc.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Vitale Giordano.

Leibniz verweilte auf seiner italischen Reise (1689 bis 1690) längere Zeit in Rom. Die berühmtesten Gelehrten der grossen Weltstadt kamen ihm auf das zuvorkommendste entgegen, und er wurde in alle gelehrten Vereine eingeführt. Unter andern wurde er auch in die Academia fisico mathematica als Mitglied aufgenommen, ein Verein, der von Ciampeni gegründet, in dessen Hause sich versammelte und die berühmtesten Namen, wie Borelli, Cassini, Bianchini u. s. w. vereinigte (sieh. Guhrauer, Leben Leibniz. Theil 2. S. 89 ff.). Auch Vitale Giordano gehörte zu dieser Akademie, dessen Euclide restituto, wovon in den folgenden Briefen die Rede ist, von Scheibel (Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniss, 1ster B. S. 480) erwähnt wird *).

In dieser kurzen Correspondenz begegnen wir Leibniz auf einem Gebiete, auf dem er in den Jahren der Kraft anhaltend und eifrigst thätig gewesen ist. Zahlreiche, zum Theil vollstän-

*) Der vollständige Titel dieses Werkes ist: Euclide restituto da Vitale Giordano da Bitonto Lettore delle Matematiche nella Sapienza di Roma, e nella Reale Academia stabilita dal Rè Christianissimo nella medisima Città Libri XV. Ne i quali principalmente si dimostra la compositione delle proportioni seconda la definitione datane dal suo antico Autore. Seconda Impressione con nuove Additioni. In Roma, per Angelo Bernardo. 1686. fol. Scheibel hat dazu bemerkt: Der allgemeine Titel ist: Corso di Mathematica Tomo primo, welcher Cursus nach der Anzeige des Inhalts aus 7 Tomis bestehen soll. — Ich habe dieses Werk nicht zur Einsicht erhalten können.

dig ausgearbeitete Abhandlungen unter den hinterlassenen Manuscripten beweisen, dass er auf die Begründung der Principien der Mathematik und besonders der Geometrie durch möglichst strenge Beweise der Euclidischen Axiome bedacht war. Es scheint, dass Leibniz zu diesem Ende die Geometrie der Lage schuf, von der sich noch Bruchstücke vorfinden, die in der vollständigen Sammlung der mathematischen Abhandlungen Leibnizens nicht ohne Interesse werden gelesen werden.

I.

Leibniz an Giordano.

Percurri nonnulla Euclidis Tui restituti, et magna cum voluptate vidi multa a Te feliciter suppleri. Nec cum iis facio qui rigorosas demonstrationes contemnunt. Etsi libens agnoscam, viris magnis qui quaedam notiora tanquam concessa admisere, ut ad majora progrederentur, esse ignoscendum, interim laudanda est posterorum praetermissa supplentium industria. Inprimis circa parallelas et rationum compositiones video te profunde meditatum. Quidam Nonancurtius in Belgio libellum de rationibus scripsit quem me videre memini; hujus methodum laudat et secutus est Arnaldus (celebris apud Theologos, sed idem in omni doctrinarum genere excellens) in secunda editione libri Gallici, quem inscripsit: Nova Geometriae Elementa. Ambo rationem exprimunt per fractionem, cujus numerator sit antecedens, denominator consequens, sed videbatur mihi deesse aliquid ad summum demonstrandi rigorem. Et fractio ...*) potius est aliquid rationem determinans quam ipsa ratio. Velim nosse quae tua sit circa hoc argumentum sententia de posthumis Galilaei a Cl. Viviano editis.

Circa demonstrationes quasdam quas ab aliis in tuum Euclidem transsumsisti, nonnihil difficultatis reperio. Nam in demonstratione Thaletis p. 21. quod recta per centrum ducta circulum bisecet, unus casus negligitur, si scilicet diceret aliquis unum

*) Ein zweisilbiges Wort unleserlich; es scheint: ista, zu sein.

segmentum ABC in alteram partem translatum partim intra partim extra alterum segmentum ADC cadere. Item in demonstratione axiomatum p. 22. 23. quod duae rectae non habeant partem communem, nec spatium includant. Supponitur duo puncta G, F p. 22 et duo puncta E, F p. 23 quibus duae rectae a circulo secantur non coincidere inter se, quod tamen adhuc demonstrandum erat. Et licet in axiomatis posterioris demonstratione Clavius hanc instantiam removere voluerit, attamen ipsemet in eandem denuo incidit, supponendo novum circulum quem describit ex centro D sumto in recta ACO secare rectas in punctis E et F non coincidentibus. Sed in universum in horum axiomatum de recta demonstrationibus difficultatem reperio, quod in eas nullo modo ingreditur definitio rectae, nec ulla rectae proprietas axiomate aliquo praemittendo contenta. Definitio enim rectae a te assumta est quod sit brevissima inter duo puncta, qua pulchre uteris pro parallelarum proprietate, sed hic eam non adhibes nec aliud de recta axioma praemittis. Itaque in omnibus istis demonstrationibus posset alia quaecunque linea pro recta assumi, quod tamen male fieret. Itaque videtur aliquid his demonstrationibus deesse. Et difficulter absolvi poterit demonstratio, nisi quis assumat notionem rectae, qualis est qua ego uti soleo, quod corpore aliquo duobus punctis immotis revoluto locus omnium punctorum quiescentium sit recta, vel saltem quod recta sit linea secans planum interminatum in duas partes congruas; et planum sit superficies secans solidum interminatum in duas partes congruas.

II.

Giordano an Leibniz.

Statueram, ad te venire; cum nova occupatio fregit consilium meum. De honorifico judicio tuo super mea de momentis Dissertatione, atque Euclide restituto, mirificas tibi gratias ago. Hoc unum superest, ut aliquid ipse dicam de doctissimis tuis Animadversionibus, in elementa factis; non quo mea sim defensurus: sed, ut rationes aperiam tibi, quibus adductus, putavi, ea, quae conatus sum, satis esse posse ad Euclidis restitutionem, quam mihi proposueram. Primum itaque monitum te volo, praecipuum meum institutum fuisse, ut iisdem Elementis eam conciliarem claritatem, quae esset quam proxime accommodata captui Tyronum, qui si ipso in vestibulo intricatas figuras offendant, statim confunduntur, atque animo cadunt. Hoc factum est, ut Thaletis demonstrationem, quam pag. 21. exposui, talem reliquerim, qualem suus fecit Auctor, sine tertii casus additione; tum quia tertius ille casus non dissimili ratione demonstratur; tum etiam, quia cum hoc in Theoremate sit prima demonstratio negativa, neque adhuc Tyro assuetus sit concipere pro semicirculo figuram longe diversam (Fig. 33), qualis est notata AFC, facili negotio confundi is potuisset: id quod minime fit in sequente, multoque minus in ea, quae sequenti succedit; quia assuetus jam concipere demonstrationem negativam in figura facilis constructionis, nullam deinde difficultatem experiturus aliis implicatioribus, ut in pag. 123 ubi nihil obstitit, quominus eundem casum adderem.

Quod ad Procli demonstrationem attinet in pag. 22, non plane video, ubi sit difficultas: Quoniam, cum rectae AD, CD supponantur una extra alteram, et in D tantum*) concurrentes, equidem ignoro, quonam modo concipi possint, ut concurrentes in G et F; ad summum enim contendi posset, ut continuatae versus A et C possint tandem concurrere ad partes AC: quare, si fiat DB minor, quam DA, et DC, circumferentia secabit rectas DA, DC, ut in G et F; vel si sumatur in minore rectarum DA, DC punctum quodcunque G vel F, facto centro in D, intervalloque DG vel DF describatur circulus EGH, ejus circumferentia secabit DB continuatam in puncto aliquo B; quod idem est, ac prius.

Neque minus ignota mihi est difficultas ad pag. 23. ubi rectae BAD, BCD productae aut concurrant cum circumferentia in uno puncto K, aut secant circumferentiam in duobus punctis; si enim concurrerent prius, quam pervenirent ad circumferentiam, pergamus eas producere, quousque aut concurrant cum circumferentia in uno puncto, aut secent circumferentiam in duobus punctis; si eam secent in duobus punctis, optima et Procli de-

---

*) Leibniz hat „tantum" unterstrichen, und darüber geschrieben: sed hoc gratis supponitur.

monstratio: si cum circumferentia concurrant in uno puncto, ut in K, tunc sumpto in recta BCI puncto aliquo D ita, ut BD sit major, quam DO, et centro in D, intervalloque DB describatur circulus BGE, ejus peripheria secabit rectas OHK, OFK, ut in E et F; et hoc modo Clavii demonstratio recte concludit. At tot hae complicationes non sunt opportunae; imo immane quantum confusionis ingererent mentibus Tyronum, in quorum gratiam mihi visum est ad alios casus non procedere.

Jam ad rectae lineae definitionem accedo. Ipse equidem optimam puto Euclideam: recta linea est, quae ex aequo sua interiacet puncta; cujus sensus mihi videtur esse, quod recta linea sit illa, quae aequaliter inter sua extrema extenditur. At Heronis definitione sum usus, non alia de causa, nisi quia visa mihi est accommodatior Tyronum intellectui; et ab aliis lineis tunc optime distincta est, cum dixi: lineam, quae non brevissima est inter duo puncta, vocari curvam. Certe quaecumque linea sumatur pro linea recta proposita, aut erit brevissimum intervallum inter extrema rectae propositae, aut non erit: si erit brevissimum intervallum, ea erit recta linea: si non erit brevissimum intervallum, ea erit curva.

Duplex tua definitio, satis ea quidem ingeniosa est, sed suis etiam exceptionibus obnoxia: quarum maxima videtur esse, quod supponit cognitum, tum corpus, tum planum; quod est ponere (ut aiunt) currum ante boves. Idem peccavit D. Borellius in suo Euclide restituto, qui supponens cognitum corpus, ex ea cognitione deduxit notitiam superficiei, lineae, et puncti; deinde in 6. libro ei definiendum fuit, quid esset corpus. Hoc sane alienum est a persona Geometrae. Alia exceptio est, quod linea, secans planum in duas partes congruas, esse potest curva, imo etiam tortuosa. Utraque tandem definitio tam obscura videtur, ut vix concipi possit a peritioribus, nedum a candidatis Geometriae. In meo Archimede sic rectam lineam definivi: la linea revoluta intorno a suoi estremi immoti, le di cui parti ritengono sempre il medesimo sito di prima, la chiamo recta linea, sed fateor: ea in definitione non acquiesco: expungam ipsam, et Euclideam, quam optimam duco (atque rectitudinem explicat) reponam.

Mitto tibi opusculum meum, inscriptum: Fundamentum doctrinae motus Gravium: deest responsio ad nonnullas objectiones, quae nondum est impressa; eam tamen tradam Ill. D. Ciamperto, qui curabit ad te perferendam. Si per tempus licet, exopto, atque expecto tuum de hoc opusculo judicium, quod plurimum apud me valet. Ceterum te rogo, ut tuis mandatis me velis exornatum, et me amare perge. Romae Tertio Idus Novembres 1689.

III.

Leibniz an Giordano.

Gratias Tibi maximas, Clarissime Domine, pro novo munere ago, quod in itinere jucundam lectu materiam suppeditabit. Facerem etiam quod per schedam nunc exequor, nisi essem occupatior quam ut scribere ad Te facile possim.

Caeterum non is ego sum qui mea velut ex tripode dicta statim recipi velim, et ingenuitatem eorum inprimis amo, qui non diffitentur se utiliter admonitos. Itaque quod contra meam rectae definitionem objicis, dignum consideratu agnosco; utrum scilicet in eo peccet, quod plani et solidi notiones supponit, an potius vel ideo laudem mereatur. Quod tibi porro examinandum relinquo exactius, antequam dicamus tecum, currum esse positum ante boves. Erit enim qui arbitretur corporis notionem priorem esse notione superficiei et lineae, tanquam corporis terminorum, nec per se subsistentium, et has corporis sectione cognosci. Quod initio assumo interminatum vel ita ut termini ejus non considerentur, ita ut ipsa sectio det terminos. Prima autem et simplicissima corporis sectio est in partes sibi respondentes congruas, seu ita ut secans ad utramque secti partem se habeat eodem modo; et haec fit per **p l a n u m**. Et prima cursus plani sectio eodem modo fit per **r e c t a m** nec (quantum ego video) nisi per rectam. Habemus ergo plani et rectae originem simplicissimam secundum hunc considerandi modum qui sane novus apud ingenuos aliquem applausum sperare poterat. Nec ideo alios considerandi modos improbo (quales et ipse habeo), dummodo par claritas obtineatur, quam in Euclide nondum hactenus agnoveramus. Interim quacunque demum utamur notione rectae, eam influere, ut ita dicam, oportet in theoremata quae de recta demonstrare volumus, alioqui ignotum est, utrum ea quae demonstramus ad eam rem pertineant, cujus data est definitio. Idque in illis demonstrationibus Euclideorum Axiomatum, quas a Proclo et Clavio mutuatus es, desiderare me jam innui, etsi hoc in responsione tua praeterieris. Quomodo enim ex iis sciemus pertinere ad lineam brevissimam inter sua puncta extrema. Caeterum cum propositum esset in Euclidetuo omnia qua licet exacte demonstrare, fortasse non diffiteberis rectius suppleri casus qui ad perfectionem demonstrationis desiderantur, quod tironibus opinor praejudicium facere non poterat. Neque quisquam unquam tam bene subductis rationibus librum scripsit, quin aliqua hujusmodi admonitionum materia supersit, quas sine detrimento existimationis agnoscere possumus. Et licet pag. 23. duae rectae BA, BC concurrant in puncto D vel O, hoc nihil prohibet, quin adhuc saepius concurrant atque adeo coincidant E et F. Non igitur supponitur (quod ais) esse tantum concurrentes in D. Sed nolo te his tenere diutius, voluique tantum respondere, ne me putes quadam contradicendi libidine temerarias objectiones festinasse. Nam diu desideravi exactas videre axiomatum istorum demonstrationes, quoniam sciebam magni referre ad perfectionem Geometriae, itaque dubitationes meas vel ideo tibi proponere volebam, ut Te quem parem superandae difficultati putabam, ad supplenda quae desunt, excitarem. Vale et me ama.

Druck von Julius Plessner in Berlin.

Leibnizens gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Zweiter Band.

BERLIN.

Verlag von A. Asher & Comp.

1850.

Leibnizens
mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band II.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Hugens van Zulichem und dem Marquis de l'Hospital.

BERLIN.
Verlag von A. Asher & Comp.
1850.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Hugens van Zulichem.

Leibniz wurde im Jahre 1672 von dem Kurfürsten von Mainz, in dessen Diensten er damals stand, mit einer politischen Mission an Ludwig XIV nach Paris gesandt. Er verweilte hier, einen kurzen Ausflug nach London abgerechnet, ununterbrochen bis zu seiner Rückkehr ins Vaterland gegen das Ende des Jahres 1676. Dieser Aufenthalt Leibnizens in der französischen Hauptstadt war für seine wissenschaftliche Entwickelung von der höchsten Wichtigkeit. Paris war damals der Brennpunkt des wissenschaftlichen Lebens; die höchsten Notabilitäten in Kunst und Wissenschaft hatte Ludwig XIV an seinen Hof gezogen. Leibniz, in der schönsten Periode jugendlicher Kraft, entbrannte von Begier, durch Bekanntschaft mit jenen ausgezeichneten Männern Kenntnisse auf allen Gebieten des Wissens zu sammeln. Schon seit dem Beginn seiner Studien hatte er eine besondere Hinneigung zu den mathematischen Disciplinen empfunden; sie waren seine Lieblingswissenschaft geworden. In Paris erwachte die alte Liebe zur Mathematik im Feuer jugendlicher Begeisterung von neuem. Leibniz machte hier nämlich die persönliche Bekanntschaft von Hugens*) der auf Colbert's Veranlassung, seit dem Jahre 1666 als höchste mathematische Autorität der damaligen Zeit zur Verherrlichung der neu gegründeten Königlichen

*) Diese Schreibart des Namens ist deshalb gewählt worden, weil alle an Leibniz gerichteten Briefe übereinstimmend unterzeichnet sind mit: Hugens de Zulichem.

Akademie der Wissenschaften in Paris seinen Wohnsitz genommen hatte. Zum ersten Male trat so Leibniz einem Meister seiner Lieblingswissenschaft gegenüber, und es konnte nicht fehlen, dass er sehr bald begriff, wie wenig er noch mit dem Umfange der mathematischen Disciplinen bekannt war. Auf der andern Seite konnte Hugens nicht entgehen, dass er ein ausgezeichnetes Talent vor sich hatte, dessen Ausbildung und geschickte Leitung die herrlichsten Früchte versprach.*) Leibniz wurde fortan der Schüler von Hugens, und er hat zu jeder Zeit offen bekannt, wie viel er Hugens verdanke.

Diesem Verhältniss zwischen Leibniz und Hugens verdanken wir den vorliegenden Briefwechsel, der bis zum Tode des letztern (8 Juli 1695) dauerte. Leibniz legte stets die neuen Ergebnisse seiner mathematischen Studien Hugens zur Begutachtung vor, und obwohl dieser öfters scharf critisirte, so bat Leibniz immer wieder von neuem um des Meisters Meinung, da er wohl wusste, dass für Hugens's Urtheil die strenge Wahrheit als die alleinige Richtschnur galt. Die ersten Briefe sind während ihres beiderseitigen Aufenthalts zu Paris geschrieben. Leibniz berichtet Hugens, der ihm, wie es scheint, das Studium der Algebra Bombelli's empfohlen hatte, über die Erfolge seiner algebraischen Untersuchungen; er legt ein besonderes Gewicht darauf, dass er zuerst die allgemeine Anwendbarkeit der Cardanischen Formel für die Auflösung der cubischen Gleichungen nachweisen könne. Ferner ergiebt sich aus dem zweiten Antwortschreiben von Hugens, dass Leibniz ihm die Reihe, die den Inhalt des Kreises zu dem umschriebenen Quadrate ausdrückt, und die nach ihm die Leibnizische genannt wird, mitgetheilt hat.

Durch den Abgang Leibnizens von Paris (gegen das Ende des Jahres 1676) wurde, wie es scheint, die Correspondenz auf einige Jahre unterbrochen. Seine Rückkehr nach Deutschland, seine neue Stellung am Hofe zu Hannover verhinderten Leibniz sich in nächster Zeit mit mathematischen Untersuchungen zu befassen. Erst im Jahre 1679 knüpft er den Briefwechsel wieder an. Sogleich im ersten Briefe (vom 8 September 1679) schreibt Leibniz, dass er in der Vervollkommnung der Analysis grosse Fortschritte gemacht. Er besitzt allgemeine Methoden, durch welche

*) Die näheren Umstände seines Zusammentreffens mit Hugens erzählt Leibniz selbst in der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis.

er Probleme, die bisher dem Calcul widerstanden, bewältigt, z. B. Quadraturen, das umgekehrte Tangentenproblem (d. h. aus der gegebenen Gleichung für die Tangente die Curve zu finden), irrationale Wurzeln der Gleichungen, Arithmetik des Diophantus (d. i. Methode der unbestimmten Coefficienten). Er fordert Hugens auf, ihm ein Problem aus der umgekehrten Tangentenmethode vorzulegen, um seine Erfindung daran zu prüfen. Besonders aber wünscht Leibniz Hugens's Ansicht über die diesem Schreiben beiliegende Skizze der Characteristica geometrica oder, wie er auch sonst noch diese von ihm geschaffene Disciplin nennt, Analysis situs zu vernehmen, in der er durch eine besondere Charakteristik nicht allein die Quantität, sondern zugleich auch die Lage der Grössen in Betracht zieht.*) Aus den Schreiben VI. und 11. Jan. 1680 erhellt jedoch, dass Hugens sich nicht von der Wichtigkeit dieser neuen Disciplin überzeugen konnte, und er spricht sich in ziemlich schroffer Weise dahin aus, dass sie seiner Ansicht nach gar nichts Neues sei. Da aber Leibniz wiederholt behauptet, von der Wahrheit und Wichtigkeit derselben überzeugt zu sein, so fordert er zuletzt Leibniz auf, seine neue Lehre, so wie auch die Tangentenmethode an Beispielen zu erläutern, um seine Ungläubigkeit zu überwinden. Leibniz lässt jedoch in der Folge die Diskussion über die Analysis situs ganz fallen, wie er gewöhnlich that, wenn er sah, dass man ihn nicht begriff (er sagte dann mit Socrates: non habet hujus rei sensus) und giebt nur ein Beispiel zur Erläuterung seiner Tangentenmethode.

Die nun folgende lange Unterbrechung der Correspondenz erklärt sich entweder dadurch, dass Hugens's Antworten ausblieben, da er 1681 Paris verliess, um seine durch angestrengte Ar-

*) Sogleich bei dem ersten Bekanntwerden des Briefwechsels zwischen Hugens und Leibniz hat diese Skizze mit Recht die Aufmerksamkeit der Mathematiker der Gegenwart auf sich gelenkt; aus ihr konnte man zuerst eine Vorstellung über das Wesen dieser neuen Disciplin sich bilden, denn weder von Leibniz noch späterhin war irgend etwas über die Analysis situs publicirt worden. Man wusste bis dahin nur aus seinen hier und da zerstreuten gelegentlichen Aeusserungen, welche Wichtigkeit Leibniz auf diese Disciplin legte, und dass er in der schönsten Periode seiner Kraft vielfach daran gearbeitet. Unter seinen hinterlassenen Manuscripten finden sich noch mehrere umfassende Abhandlungen über diesen Gegenstand, die demnächst in einer neuen Ausgabe der mathematischen Schriften Leibnizens einen Platz finden werden.

beiten sehr angegriffene Gesundheit im Vaterlande wiederherzustellen, oder dass Leibniz den Briefwechsel abbrach, da er sah, dass er durch Hugens das nicht erreichen konnte, wonach er sich so sehr sehnte, einen Platz in der Pariser Akademie zu erhalten.

Veranlassung zur Wiederanknüpfung der Correspondenz gab das Problem der isochronischen Curve. Leibniz hatte nämlich in Folge seines Streites mit den Cartesianern über das Maass der lebendigen Kräfte (um, wie er sagte, diesen Streit für die Geometrie nützlich zu machen) seinen Gegnern im Jahre 1687 die Aufgabe gestellt: diejenige Curve zu finden, welche ein schwerer Körper beschreiben muss, der sich in gleichen Zeiten gleichviel der Horizontalebene nähert (Trouver une ligne de descente dans laquelle le corps pesant descende uniformément, et approche également de l'horison en temps égaux; oder wie Leibniz anderswo dieses Problem ausdrückt: Invenire lineam isochronam, in qua grave descendat uniformiter sive aequalibus temporibus aequaliter accedat ad horizontem, atque adeo sine acceleratione et aequali semper velocitate deorsum feratur). Hugens war auf dies Problem aufmerksam geworden und hatte im Octoberheft der Nouvelles de la republique des lettres desselbigen Jahres die Eigenschaften und die Construction der verlangten Curve bekannt gemacht. Indessen hatte Leibniz seine grosse Reise nach Italien angetreten und er erhielt jenes Heft erst zu Anfang des Jahres 1688. Sichtlich überrascht beeilt er sich, um Hugens seine Freude auszudrücken, dass er das Problem seiner Aufmerksamkeit für werth gehalten und dass die gegebene Auflösung mit der seinigen übereinstimme. Hiermit beginnt der bei weitem wichtigste Theil der Correspondenz, die nun bis zum Tode von Hugens ununterbrochen fortdauert.

Wenige Wochen nach seiner Rückkehr aus Italien richtet Leibniz sogleich wieder eine Mittheilung an Hugens und er bringt, wie es scheint, geflissentlich die Differentialrechnung zur Sprache. Hugens, gebildet und gewöhnt an die äusserst scharfe und lichtvolle Ausdrucksweise der Geometer des Alterthums, hatte die Abhandlungen Leibnizens über die neue Analysis in den Actis Eruditorum etwas dunkel gefunden, und da er selbst eine ähnliche Methode zu besitzen meinte, zu studiren unterlassen; er entschliesst sich jedoch nun seine Aufmerksamkeit darauf zu richten, da Leibniz behauptet, dass in seiner neuen Methode die

Methodus tangentium inversa enthalten sei. Indessen will er noch die Leibnizische Auflösung des Problems der Kettenlinie, das Jacob Bernoulli vorgelegt hatte, abwarten, um daran die Vorzüglichkeit des Leibnizischen Algorithmus zu beurtheilen. Hugens hatte sich nämlich schon seit seinem 15. Jahre mit diesem Problem beschäftigt und war jetzt so glücklich, dasselbe mittelst der bis dahin gebräuchlichen bewährten Methoden zu lösen, ein Umstand, der auf das glänzendste sein eminentes Talent und seine hohe Meisterschaft beweist. Da nun aber Leibniz und die Bernoullis durch den neuen Calcul zu denselben Resultaten gelangten, ja das Problem noch vollständiger lösten, als Hugens es anfangs vermochte, so wird endlich auch Hugens, der Meister der alten Methode, für die neue Analysis gewonnen, und er arbeitet sich hinein. Je consideray ensuite, schreibt er 1 Sept. 1691, pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient echappées et je jugeay que ce devoit estre un effet de vostre nouvelle façon de calculer, qui vos offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées; und 17 Sept. 1693: J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie dans ces nouveaux progrès qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par vostre merveilleux calcul. M'y voila maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens encore rien aux ddx, et je voudrois bien sçavoir si vous avez rencontré des problemes importants ou il faille les emploier, afin que cela me donne envie de les etudier. Auf Hugens's Mahnung entschloss sich auch Leibniz zur Abfassung eines Compendiums der neuen Analysis; da jedoch bald darauf, im Jahre 1696, das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die Analyse des infiniment petits des Marquis de l'Hospital erschien, so blieb die Sache unausgeführt. — So wurde das Problem der Kettenlinie der Prüfstein für die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung Leibnizens. Deshalb macht auch dieses Problem Epoche in der Geschichte der Mathematik; die frühere Methode wurde verlassen, die neue Analysis hatte sich unwiderleglich bewährt.

Ausserdem verbreitet sich die Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens über alle wichtigen Fragen der Physik und Mechanik, die zu Ende des 17. Jahrhunderts die ausgezeichnetsten Männer fast ausschliesslich beschäftigten. Newton hatte in seinem unsterblichen Werke: Principia philosophiae naturalis mathematica (1686) die Mechanik des Himmels durch das Gravitationsgesetz, die glücklichste aller Hypothesen, begründet; eine Besprechung desselben konnte zwischen den beiden grossen Männern nicht ausbleiben, und es ist interessant zu sehen, wie ein so eminenter Geist, als Hugens war, sich mit den auf das Attractionsgesetz basirten Theorien Newton's nicht einverstanden erklärt. Pour ce qui est de la cause du reflus, schreibt er am 18 Nov. 1690 an Leibniz, que donne Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres theories qu'il batit sur son principe d'attraction qui me paroist absurde. Leibniz hatte in verschiedenen Abhandlungen, die in den Actis Eruditorum erschienen waren, ein anderes Prinzip zur Erklärung der Erscheinungen der Himmelskörper zu Grunde gelegt; ihm war der starre Mechanismus der Newtonschen Lehre zuwider, und er nahm ausser der Schwerkraft noch eine „matiere liquide deferante commune" an, die eine Bewegung, ähnlich dem „tourbillon de Descartes" haben sollte. La correspondance, schreibt Leibniz $\frac{4}{11}$ April 1692 an Hugens, qu'il y a des planetes ou satellites d'un même systeme est favorable à une matiere liquide deferante commune; und in einem andern Briefe desselben Jahres: Et la raison qui fait que je ne me repens pas encor de la matiere deferente, depuis que j'ay appris l'explication de Mr. Newton, est entre autres, que je voy toutes les planetes aller à peu pres d'un même costé et dans une même region, ce qui se remarque encor à l'égard des petites planetes de Jupiter et de Saturne. Au lieu que sans la matiere deferente commune, rien n'empescheroit les planetes d'aller en tous sens; ebenso 10 März 1693: Ainsi je m'imagine que si quelque cause extraordinaire detournoit l'axe de la terre, il reprendroit bientost sa veritable situation, comme fait un aimant, au lieu que, selon l'hypothese de Mr. Newton, la terre vogue dans l'ether comme feroit une isle flottante, que rien ne dirige que sa propre tendance deja prise. Diese Ansichten Leibnizens unterwirft Hugens in dem Schreiben 11 Jul. 1692 einer scharfen Kritik.

Trotz dieser differenten Meinungen spricht jedoch Leibniz an verschiedenen Stellen dieser Correspondenz mit hoher Anerkennung und nichts weniger als eifersüchtig über Newton. So unter andern antwortet er, als ihn Hugens berichtet, dass Fatio eine neue Ausgabe der Principia Newton's beabsichtige, dass die erste von Druckfehlern wimmle und selbst in der Theorie Fehler vorkämen: Le livre de Newton est un de ceux qui meritent le plus d'estre perfectionnés et Mr. Fatio fera bien de s'y appliquer. Je ne m'etonne pas si parmy tant de recherches difficiles, il s'y est glissé quelque faute de doctrine. Ebenso spricht Leibniz seine Theilnahme aus, als er von Hugens erfährt, dass Newton eine Störung seiner Geisteskräfte erlitten haben sollte: c'est à des gens comme vous, Monsieur et luy (Newton) que je souhaitte une longue vie et beaucoup de santé, und erkundigt sich später, ob derselbe noch nicht wiederhergestellt ist. — Diese Stellen verdienen hervorgehoben zu werden, um über Leibnizens Charakter in dem grossen Streite wegen des ersten Erfinders der Differentialrechnung ein gerechtes Urtheil zu fällen.

Es ist noch übrig, in wenigen Worten das Verhältniss zu bezeichnen, in dem die vorliegende Ausgabe der Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens zu der Uylenbroek's steht, die in der Sammlung: Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ex manuscriptis in bibliotheca Lugduno-Batavae servatis edidit P. I. Uylenbroek. Hagae Comitum 1833. II Part. enthalten ist. In dem Convolut, das auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover die Briefe beider Männer enthält, finden sich die eigenhändig geschriebenen Briefe von Hugens vollständig vor; sie sind getreu wiedergegeben, und der aufmerksame Leser wird sich bei Vergleichung beider Ausgaben überzeugen, dass die gegenwärtige mehrere enthält, die in der ersten fehlen, und dass andere Briefe, die in der Sammlung Uylenbroek's nur nach dem Entwurfe von Hugens mitgetheilt sind, hier vollständig erscheinen. Dagegen bot das erwähnte Convolut auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover nur wenige Leibnizische Briefe. Es war deshalb nöthig, diese letztern, mit einigen neu aufgefundenen vermehrt so wieder zu geben, als sie sich in der Uylenbroekschen Sammlung finden. Selbst wenn auch die Entwürfe oder Abschriften der Leibnizischen Briefe auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover vorhanden gewesen wären, so war damit keineswegs Berechtigung zu der Annahme gegeben, dass Leibniz sie in dieser Gestalt an Hugens übersandt, denn so wie er bei der Abfassung seiner mathematischen Abhandlungen verfuhr, dass er sie zwei- dreimal entwarf, alsdann abschreiben liess, die Abschrift nochmals verbesserte und wiederum eine Abschrift davon machen liess, die vielleicht nochmals verbessert und mit neuen Zusätzen versehen in die Druckerei gelangte, ebenso verfuhr er mit seinen Briefen. Es hätte mithin in jedem Falle auf die Sammlung Uylenbroek's Rücksicht genommen werden müssen, der die Leibnizischen Originale vor sich hatte.

I.

Leibniz an Hugens.

Je vous envoye le livre de Bombelli, dont je vous ay parlé. Vous y verrez page 292 comment il se sert des racines imaginaires (il appelle par exemple $\sqrt{-121}$, ou $11\sqrt{-1}$, piu di meno 11; et $-\sqrt{-121}$ ou $-11\sqrt{-1}$ mene di meno 11), et comment il trouve par là la racine de l'équation $1^3 \sqcap 15^1$ plus 4, c'est à dire $y^3 \sqcap 15y + 4$. Il dit d'en avoir une demonstration en lignes, qu'il met aussi page 298, mais il y prouve seulement qu'une telle équation est possible, et que sa racine est quelque chose de reel, qui se peut donner en lignes. Mais il ne s'ensuit pas que l'operation par son piu di meno est bonne. Car quoyqu'il dise à la fin de la page 294 que ses racines sont venues de l'equation, ce n'est pas pourtant sans supposition. Il paroist aussi par la page 293 qu'il ne pouvoit pas resoudre par cette methode l'equation $y^3 \sqcap 12y + 9$, dont la racine rationelle est fausse ou negative, sçavoir -3. Il trouve neantmoins en essayant, par une autre methode (tirée aussi de Cardan, que l'equation se peut diviser par $y + 3$, ne scachant pas que par cette même raison -3 en est la racine fausse: et il trouve par ce moyen la vraye $1\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$, laquelle estant composée d'un nombre et d'une racine quarrée, ne pouvoit pas estre tirée des formules de Cardan: parceque les racines qu'on a par ces formules, sont tousjours ou irrationelles cubiques ou nombres. D'ou vient qu'il a cru que les formules de Cardan ne servent pas en cette rencontre, et ne sont pas generales.

Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles, soit vrayes soit fausses ou negatives. (2) Que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ai trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extrahibles de tous les degrez pairs, qui contiennent des imaginaires et dont neantmoins la realité peut estre renduë palpable sans extraction; pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'exemple de la formule $\sqrt{(1+\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})}$, qui vaut 6, est une preuve tres considerable. (4) Je demonstre, ce que personne a demonstré encor, que toute l'equation cubique, qui peut être deprimée, contient une racine rationelle pourveu que l'equation même soit proposée en termes rationaux. D'ou il s'ensuit que celle qui ne peut estre divisée par l'inconnue + ou — un diviseur rationel du dernier terme, est solide. Proposition tres importante, puisqu' elle nous donne un moyen asseuré de scavoir si un probleme est solide en effect, ou s'il l'est seulement en apparence. Mr. Descartes ne parle pas si positivement, car il dit, qu'il faut examiner toutes les quantités qui peuvent diviser le dernier, qu'il suppose estre en entier et rationel; et il semble qu'il n'ose pas dire, tous les nombres, ou toutes les quantités rationelles. De sorte qu'il nous laisse en doute, s'il ne faut pas aussi examiner les diviseurs irrationels: soit qu'il n'avait point de demonstration assez convaincante pour les diviseurs rationels à l'exclusion des irrationels; soit qu'il n'ait negligé de parler plus exactement. De la vient aussi qu'on peut demonstrer en cinquième lieu (5) par la seule analyse, sans aide de Geometrie, que toute l'equation cubique est possible, pourveu qu'elle soit conceue en termes possibles. De plus (6) l'obstacle qui a embarassé principalement la resolution des equations par racines irrationelles, estant levé, ceux qui chercheront des formules pour les plus haut degrez, ne seront plus rebutez par la rencontre des irrationelles, au lieu que sans cela ils chercheront envain des expressions differentes de celles qu'ils ont deja trouvées. D'ou vient que des personnes fort habiles en ces matieres ont cru avant cela qu'on ne scauroit trouver une expression generale pour tout un degrez: persuasion, qui les obligeroit à examiner inutilement toutes les formules, et toutes les combinaisons possibles des irrationelles, pour chercher des expressions particulieres pour certains cas qui semblent n'estre pas compris dans la generale. (7) Lorsqu'on aura trouvé les racines irrationelles des equations, tous les problemes qui peuvent estre reduits à une equation reviendront seulement à deux problemes de Geometrie, sçavoir à la section de l'angle et à celle de la raison. J'entends par la section de la raison, ou si vous voulez, des logarithmes, qui répondent en quelque façon aux arcs: l'extraction des racines. (8) Vous connoistrez mieux tout ceci par l'écrit, que je vous ay fait voir, et vous jugerez par les autres, que vous avez veu de même, de ce que j'appelle section des puissances, et de cette table de theoremes, que peut estre continuée à l'infini, et qui a de grands usages, tant pour resoudre quelques equations affectées que pour donner des abregez considerables dans le calcul, lorsqu'il s'agit de purger une equation de quantités irrationelles, et de calculer par les puissances des grandeurs composées. Et comme ces theoremes donnent aussi la resolution de quelques formules des equations affectées de tous les degrez à l'infini, vous trouverez en (9) lieu, que c'est la premiere fois qu'on donne la resolution de quelques equations indeprimables plus que solides, par les irrationelles de leur propre degrez, puisqu'on n'en a pas encor trouvé aucun exemple dans le 5e degré seulement, bien loin d'avoir donné une table, qui passe par tous les degrez à l'infini, comme j'ay fait.

Enfin, il n'y a personne, qui puisse mieux juger que vous de la qualité de deux inventions, que je n'ay pas encor expliquées, qui sont (10) l'une de la methode de tirer en nombres veritables ou approchans, les racines des binomes, ou il entre des imaginaires: et l'autre du compas des equations, qui donne sans aucun calcul, tout à la fois, toutes les racines d'une equation proposée de quelque degré et de quelque formule d'un degré donné qu'elles puissent estre; soit geometriquement en lignes soit arithmetiquement en nombres approchans, dont on peut incontinent tirer les veritables s'il y en a, sans aucun calcul. Il semble qu'apres cet instrument il n'y a quasi plus rien à desirer pour l'usage qu'Algebre peut ou pourra avoir dans la mechanique et dans la practique. Il est croyable que c'estoit le bût de la Geometrie des anciens (au moins de celle d'Apollonius) et la fin des lieux qu'ils avoient introduits, parcequ'ils avoient reconnus que peu de lignes determinent en un instant, ce que de grands calculs en nombres ne scauroient faire, qu'apres un long travail, capable de rebuter le plus ferme. Ils n'avoient pas poussé la chose fort loin; Mr. Descartes a suivi leurs traces, et a donné une methode de digerer par ordre les courbes et de les accommoder aux problemes. Mais il ne s'y est pas pris de la maniere la plus simple et la plus naturelle pour ce qui est de les accommoder aux equations; d'ou vient que pour ces sursolides par exemple, il aura déja besoin quasi d'autant d'instrumens differens qu'on luy proposera de problemes. J'ay eu le bonheur de rencontrer le chemin que la nature semble avoir fait expres. Les constructions s'y font sans calculs et sans autre preparation que celles de changer les ouvertures des parties d'un même instrument; lequel, à raison de sa grandeur, sert à toutes les equations imaginables.

Vous m'exhortez, Monsieur, de publier ces pensées et quelques autres, que vous avez veues de moy, du temps passé. Si vous témoignez d'estre encor de cette même opinion, j'y travailleray tout de bon, et le sentiment que vous en avez me tiendra lieu d'approbation generale, dont je me flatte apres la vostre.

Au reste je suis etc.

II.

Hugens an Leibniz.

Ce 30 Sept.

J'ay retenu plus longtemps que je ne devois, Monsieur, les escrits que vous m'avez prestez, mais je crois que vous recevrez mes excuses quand je vous diray qu'ayant este fort longtemps hors d'exercice pour ce qui regarde ces sortes d'Equations Algebraiques, il m'a falu du temps pour les estudier de nouveau a fin de pouvoir juger de vos nouvelles inventions. Vous vous estes mis a chercher une chose qui doit estre bien difficile a trouver puisqu'elle ne l'a pas esté encore, qui est de donner des formules de racines pour les Equations du 5e. degré et au delà. Et quoyque vous n'en serez pas encore venu a bout, c'est quelque chose d'avoir trouvé de ces racines dans beaucoup de cas, et d'avoir decouvert des Theoremes, qui semblent devoir faciliter le chemin aux regles generales.

Pour ce qui est de l'usage des racines de Cardan dans les cas mesme ou elles sont meslees de quantitez imaginaires, il est certain qu'elles servent tousjours dans les problemes d'Arithmetique, et vous avez plus fait que Bombelli en faisant voir que lors mesme que l'on ne peut pas tirer la racine des binomes, leur racines ne laissent pas de signifier des quantitez reelles. Mais a fin que l'on s'en puisse servir utilement il faut que vous nous donniez la methode que vous dites avoir trouvee pour tirer les racines de ces sortes de binomes tant au cas qu'elles sont extrahibles, qu'a ceux ou l'on ne les peut avoir que par approximation. Je vois que Bombelli en a extraict dans ces premiers cas, mais il y a apparence que ce n'a esté qu'en tastonnant, comme dans les autres extractions des racines cubes des binomes reguliers: quoyque il pretende d'avoir aussi quelque regle assurée pag 151, de la quelle je seray bien aise d'entendre vostre avis.

Vous assurez une chose que je voudrois bien voir demontrée, sçavoir qu'il n'est pas possible de trouver des formules de racines sans quantitez imaginaires dans les cas ou la regle de Cardan produit de cette sorte de quantitez. La preuve de ces negatives est difficile. Pour ce qui est de celle de cette autre proposition importante que toute equation cubique qui peut estre deprimée contient une racine rationelle, il sera bon que vous fassiez voir comment elle suit de la realité des racines de Cardan dans tous les cas, car j'avoue que je ne le conçois pas encore clairement.

La remarque que vous faites touchant des racines inextrahibles, et avec des quantitez imaginaires, qui pourtant adjoutees ensemble composent une quantité reelle, est surprenante et tout a fait nouvelle. L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de caché la dedans qui nous est incomprehensible.

L'instrument que vous promettez pour resoudre toute sorte d'Equations me paroit quelque chose de fort beau et je vous defierois d'en venir a bout si je n'avois veu desia ce que vous scavez faire par la machine d'Arithmetique. Je suis etc.

III.

Hugens an Leibniz.

Ce 6. Novembre.*)

Je vous renvoie, Monsieur, Vostre escrit touchant la Quadrature Arithmetique, que je trouve fort belle et fort heureuse; Et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir decouvert, dans un Probleme qui a exercé tant d'esprits, une voye nouvelle qui semble donner quelque esperance de parvenir a sa veritable solution. Car le Cercle, suivant vostre invention estant a son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression ni par consequent la quadrature du cercle, apres que vous aurez fait voir que vous avez determiné les sommes de plusieurs autres progressions qui semblent de mesme nature. Mais quand mesme l'impossibilite seroit insurmontable dans celle dont il s'agit, vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une proprieté du cercle tresremarquable, ce qui sera celebre a jamais parmi les geometres. Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme qui sert a Vostre demonstration, j'avois envie de la baptizer, en luy donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoïde des anciens. Mais ayant vu du depuis que cette mesme ligne a esté premierement mise en avant par L. Gregorius, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra. Il s'en est servi pour demonstrer le rapport qu'il y a entre la mesure de la Cissoïde et celle du cercle, qui est de mon invention, ainsi qu'il paroit par le traité de M. Wallis de Cissoide, et par ce que le mesme autheur en a dit dans son traité du Mouvement, ou la demonstration que j'ay donnée de ce Theoreme est inserée. Laquelleestant supposée, vous pourriez par là abbreger de beau-

*) Im Original fehlt das Jahr, ebenso wie im vorhergehenden Briefe. Uylenbroek datirt diesen Brief vom 7 November 1674.

coup vostre demonstration de la Quadrature Arithmetique. Mais vous ferez en cela comme vous le jugerez à propos. Je vous donne le bon jour et suis tout a vous etc.

IV.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce 8 de Sept. 1679.

Un de mes amis, nommé M. Hansen, qui a eu l'honneur de vous parler, me mande, que vous continués d'avoir de bons sentimens pour moy, de quoy je vous suis fort obligé, et j'en ay voulu prendre l'occasion de vous témoigner combien j'honnore vostre merite extraordinaire, que tout le monde reconnoist avec moy, et qui vous met au premier rang.

J'ay appris de Mr. de Mariotte, que vous nous donnerés bientost la Dioptrique si longtemps souhaittée. J'ay grande envie de la voir un jour, et je voudrois scavoir par avance si vous estes content des raisons de la refraction, que Mr. Descartes propose. J'avoue, que je ne le suis pas entierement, non plus que de l'explication de Mr. Fermat, qui est dans le 3e tome des lettres de Descartes.

J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmetique, à fin de l'y faire imprimer un jour. Mais j'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir à bout de la pluspart des choses, qui paroissoient jusqu'icy au dessus du calcul: par exemple, les quadratures, et methodus tangentium inversa, et les racines irrationelles des equations, et l'arithmetique de Diophante. Car j'ay des methodes generales, qui donnent la plupart de ces choses d'une manière aussi determinée, que celle dont l'Algebre ordinaire se sert pour arriver à une equation. Et je ne crains pas de dire, qu'il y a moyen d'avancer l'Algebre au de là de ce que Viete et Mr. des-Cartes nous ont laissé, autant que Viete et des-Cartes ont passé les anciens. Mais comme ces methodes generales menent ordinairement à des grands calculs, lorsque les conditions du probleme ne fournissent pas quelque adresse singuliere, j'ai projetté un moyen pour les abreger. Ce sont certaines Tables qu'on pourroit faire calculer en lettres et qui seroient aussi importantes en Algebre, que les Tables des Sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces tables estoient faites, les operations d'Algebre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux methodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matiere.

Si vous avés quelque beau probleme qui dépande a methodo tangentium inversa, je serois bien aise de voir, si j'en pourrois venir à bout. J'ay demonstrè l'impossibilité du Triangle rectanglé en nombres dont l'aire soit un quarré, autrement que Mr. Frenicle; et pour les racines irrationelles des equations, j'ay une voye demonstrative pour y arriver; mais la chose est plus difficile que l'on ne pense. J'en avois communiqué mes essais que vous avés veu à Paris, et les pensées que j'avois alors, à une personne tres ingenieuse,*) qui y a fort travaillé depuis, et croyoit d'en estre venue à bout, mais je ne trouvay pas mon compte dans les lettres qu'elle m'en écrivit: ainsi j'en remets l'execution aux tables.

Il y a encor une espece de calcul qui m'arreste, mais aussi personne ne s'en est servi. Il seroit pourtant utile à certaines choses. En voicy un exemple. Soit $x^z + z^x$ égal à b, et $x^x + z^z$ égal à c. Or b et c estant données, on demande x et z. Prenons un exemple plus aisé. $x^x - x$ est égal à 24, on demande la valeur de x et l'on trouvera que c'est 3, car $3^3 - 3$ est $27 - 3$, c'est à dire 24. Voila donc une equation qui est nullius certi gradus cogniti, et dont le degré même est demandé. On pourroit bien décrire des lignes, dont l'intersection pourroit donner la solution de ces problemes, mais je demande une solution qui me donne la valeur de l'inconnue. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu, car vous voyés que ce sont des veritables problemes determinés, et il faut bien qu'il y ait une methode dans la nature pour les resoudre. Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis

*) In dem Entwurfe dieses Briefes nennt Leibniz den Namen, es ist Tschirnhauss.

pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs; et je vous envoye un essay qui me paroit considerable.*) Il n'y a personne qui en puisse mieux juger que vous, Monsieur, et vostre sentiment me tiendra lieu de celuy de beaucoup d'autres.

Je vous envoye aussi un peu de ce feu corporel, qu'on peut à bon droit appeller lumiere perpétuelle (car estant gardée comme il faut, elle dure plusieurs années sans se consumer). C'est une petite piece, mais belle, car on n'en fait pas toujours de semblabes, et ordinairement la matiere vient en petits grains seulement. Elle est enveloppée dans une vessie et celle-cy est mise dans de la cire, à fin que rien n'exhale, et que la piece ne prenne pas feu par le mouvement et la friction comme cela arrive aisément. Un tel morceau peut suffire à quantité d'experiences, car la moindre particelle est capable de rendre les choses rayonnantes; et quand on la manie avec les mains, elles en restent luisantes plusieurs heures, et cependant il n'y a rien de visible dessus qui paroisse au jour. On peut écrire avec cela en lettres luisantes, et quelques heures apres, quand elles paroistront mortes, estant frottées derechef, elles se font voir de nouveau. Je tiens qu'il y a un veritable feu enfermé la dedans; mais pas asses ramassé pour se faire toucher: quand on souffle contre, la lumiere disparoist et revient incontinent aprés; ce qui est remarquable. Cependant j'ay veu que le seul vent a allumé un morceau de papier qui m'avoit servi à nettoyer les doigts, en vuidant le recipient, lorsque j'avois fait ce feu. On allume aisément la poudre à canon au soleil et par le mouvement, un peu de ce phosphore estant mêlé parmy. Il seroit bon de l'essayer dans le vuide. Au reste je me rapporte aux experiences, que j'avois mandées à Mr. le Duc de Cheuvreuse. Pour mieux conserver ce morceau il faut verser un peu d'eau

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

dessus et au reste le tenir dans un petit verre bouché; sans cela il s'exhale à l'air. Dans l'eau il jettera des éclairs par intervalles, particulierement lorsqu'on la remue, ou lorsqu'on l'échauffe un peu en le touchant avec la main; mais estant sec et à l'air il luit continuellement. Vous n'avés pas sujet de le ménager trop; car je vous en puis faire avoir d'autres, puisque j'en puis faire. Je vous supplie, Monsieur, d'en monstrer l'effect chez Mr. Colbert et Mr. le Duc de Cheuvreuse et à l'Academie. Si vous trouvés qu'on l'agrée, je suis prest à communiquer la composition à l'Academie, quoyqu'elle m'ait cousté beaucoup de peine.

Je vous supplie, Monsieur, de me mander quelque chose de ce qui se passe de curieux chez vous. Mr. Brosseau, resident de mon Prince, demeurant à la rue des Rosiers derrière le petit S. Antoine, fera tenir la lettre. Vous aurés entendu parler de l'entreprise de Mr. Becher en Hollande, de tirer l'or du sable. Il y a des personnes qui en ont bonne opinion. Vous scavés que Mr. Hudde est un des commissaires. Mr. Becher dit qu'il traite aussi avec les François. Je serois bien aise de sçavoir si vous en avez ouy parler à Paris. Pour moy je doute du succes, car je croy de sçavoir à peu près en quoy consiste son experience. Il y a un vestige d'or: mais je ne scay s'il y a de quoy gagner, car il pretend qu'il y aura plus en grand qu'en petit à proportion, ce qui est paradoxe. Je suis aveo zèle etc.

Beilage.

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteristique, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indeterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere narurelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées. L'algebre est obligée de supposer les elemens de geometrie, au lieu que cette caracteristique pousse l'analyse jusqu'au bout. Si elle estoit achevée de la maniere que je la conçois, on pourrait faire en caracteres, qui ne seront que des lettres de l'Alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et meme avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'on se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par ex. des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leur pensées ou experiences à la posterité, ce qui ne se sçauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures. Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique, car s'il ne s'agit que de la description, il vaudra mieux, quand on en peut et veut faire la dépense, d'avoir les figures et mesme les modelles, ou plustost les originaux des choses. Mais l'utilité principale consiste dans les consequences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se sçauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geométrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'à examiner les qualités des materiaux, par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures, de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, cecy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géométrie que la consideration des lieux: c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere de caractéres. Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement les points des figures. Les premiéres lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les dernieres, comme X, Y, les points demandés. Et au lieu qu'on se sert des égalités ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par le caractere ♉. Par ex. dans la premiere figure (fig. 1.) ABC ♉ DEF veut dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles ABC et DEF suivant l'ordre des points, qu'ils peuvent occuper exactement la meme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estant posés egaux et semblables) seront manifestement coincidents. Mais sans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, sçavoir ABC ♉ DEF, dans la seconde figure (fig. 2.) c'est à dire, on pourra mettre en mesme temps A sur D, et B sur E, et C sur F, sans que la situation des trois points ABC entre eux, ny des trois points DEF entre eux, soit changée; supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de même. Apres cette explication des caracteres, voicy les lieux:

Soit A ♉ Y (fig. 3.) c'est à dire, soit un point donné

A. On demande le lieu de tous les points Y ou (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A. Je dis que le lieu de tous les Y sera l'espace infini de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un meme espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi Y ♉ (Y). Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit (fig. 4.) A Y ♉ A (Y). Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A, et le rayon AY, tousjours le meme en grandeur, ou égal à la donnée AB ou CB. C'est pourquoy on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: AB ♉ AY ou CB ♉ AY.

Soit (fig. 5.) AX ♉ BX; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisieme X, qui ait la mesme situation à l'égard du point A, qu'il a à l'égard du point B, [c'est à dire que AX soit égale ou (parceque toutes les droites egales sont congruentes) congruente à BX, ou que le point B se puisse appliquer au point A, gardant la mesme situation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points X, (X) d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme AX ♉ BX, de mesme A (X) ♉ B (X). Mais il n'y en aura point qui satisfasse hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme à l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite AB, qui luy est perpendiculaire.]

Soit (fig. 6.) ABC ♉ ABY; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'égard de AB. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny même la droite. Cependant il est maniféste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi: ABY ♉ AB (Y), car alors le lieu seroit un cercle, mais qui ne seroit pas donné. C'est pourquoy il faut adjouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points A, B demeurant fixes, et que le point C attaché à eux par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes) et par consequent gardant la meme situation à leur égard, soit tourné à l'entour de A, B, pour decrire la circulaire CY (Y). On peut juger par là que la situation d'un point à l'égard d'un autre peut estre conçue sans exprimer la ligne droite, pourveu on les conçoive joints par quelque ligne que ce soit. Et si la ligne est posée inflexible, la situation des deux points entre eux sera immutable. Et deux points peuvent estre conçus avoir la mesme situation entre eux que deux autres points, si les uns peuvent estre joints par une ligne qui puisse estre congrue avec la ligne qui joint les autres. Je dis cecy, à fin qu'on voye que ce que j'ay dit jusqu'icy ne depend pas encor de la ligne droite (dont je vay donner la definition), et qu'il y a difference entre A, C, situation de A et C entre eux et la droite AC.

Soit (fig. 7.) AY ♉ BY ♉ CY; le lieu de tous les Y sera la droite. C'est à dire, trois points estant donnés, on demande un point Y, qui a la meme situation à l'égard de A, qu'il a à l'égard de B, et qu'il a à l'égard de C. Je dis que tous ces points tomberont dans la droite infinie Y (Y). Si tout estoit dans un même plan, deux points donnés suffiroient pour determiner ainsi la droite.

Soit enfin (fig. 8.) AY ♉ BY ♉ CY ♉ DY; le lieu sera un seul point; car on demande un point Y, qui ait la mesme situation à l'égard de quatre points donnés A, B, C, D; c'est à dire que les droits AY, BY, CY, DY soient égales entre elles; et il n'y a qu'un seul qui puisse satisfaire.

Ces mesmes lieux se peuvent exprimer en plusieurs autres façons, mais celles-cy sont des plus simples et des plus fécondes et peuvent passer pour des definitions. Et pour faire voir que ces expressions servent au raisonnement, je monstreray par les caracteres, avant que de finir, ce qui est produit par l'intersection de ces lieux. Premiérement: l'intersection de deux surfaces spheriques est une ligne circulaire. Car l'expression d'une spherique est AC ♉ AY, et celle d'un plan est AY ♉ BY, et par consequent AC ♉ BC, parce que le point C est un des points Y. Or BC estant ♉ AC, et AC ♉ AY, nous aurons BC ♉ AY, et AY estant ♉ BY, nous aurons BC ♉ BY. Joignons ces congruités, et nous aurons ABC ♉ ABY, c'est à dire AB ♉ AB, BC ♉ BY, AC ♉ AY. Or ABC ♉ ABY est à la circulaire, donc l'intersection d'un plan et d'une surface spherique donne la circulaire. Ce qu'il falloit demonstrer par cette sorte de calcul. — De la même façon il paroit que l'intersection de deux plans est une droite. Car soyent deux congruités, l'une AY ♉ BY pour un plan, l'autre AY ♉ CY pour l'autre plan, nous aurons AY ♉ BY ♉ CY, dont le lieu est la droite. Enfin l'intersection de deux droites est un point. Car soit AY ♉ BY ♉ CY et BY ♉ CY ♉ DY, nous aurons AY ♉ BY ♉ CY ♉ DY.

Je n'ay qu'une remarque a adjouter, c'est que je vois qu'il est possible d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination; mais cela est trop important et va trop loin pour que je me puisse expliquer la-dessus en peu de paroles.

V.

Leibniz an Hugens.

A Hannovre ce $\frac{10}{20}$ Octobre 1679.

J'espere que vous aurés receu la lettre que je vous ay écrite, il y a quelques semaines, avec une petite piece assés considerable du vray phosphore, ou de cette lumiere materielle et constante, dont j'avois écrit autresfois à Mr. de la Rocque, auteur du Journal. Maintenant Mr. Tschirnhaus que vous connoissés, ayant passé par icy et m'ayant raconté que vous ne vous portés pas trop bien, je vous ay voulu témoigner par celle-cy, que j'y prends beaucoup de part, et que je considere vostre santé comme une chose qui doit estre pretieuse au public. J'ose même vous conjurer de la ménager un peu plus que vous n'avés coustume de faire. Vous avés déja acquis tant de gloire que vous vous pouvés reposer un peu, et si vous donniés quelques unes de vos belles pensées et découvertes toutes pures, quoyque dénuées de ce bel appareil de demonstrations formelles, mais qui gênent trop, et qui font perdre trop de temps à une personne comme vous estes, je croy que la posterité ne vous seroit que trop obligée.

Je reviens à Mr. Tschirnhaus, avec qui j'ay parlé quelques jours durant des matieres dont je n'avois parlé à personne pendant que je suis icy. Il a fait quantité de belles tentatives pour arriver aux racines des equations, et comme nous avions disputé la dessus par lettres, car les siennes ne me satisfaisoient point, nous avons conferé sur ce sujet, et enfin il s'est trouvé que j'avois eu raison de ne me pas rendre; aussi s'y veut il prendre à present d'un autre biais, dont j'attends qu'il me mande le succès, car j'espere beaucoup de son genie. Pour moy je tiens cette matiere pour faite par ma methode, mais il faut un calcul que j'aurois entrepris, si je ne voyois moyen de l'abreger infiniment par quelques Tables, que j'ay conçues et qui à mon avis ne seront pas moins importantes en Algebre, que les Tables des Sinus dans la Geometrie practique.

Je vous ay aussi envoyé dans ma precedente un essay d'une nouvelle caracteristique en Geometrie, dont je serois bien aise d'avoir vostre sentiment. C'est une ouverture qui nous doit mener aussi loin dans son espece, que l'Algebre dans la sienne. Elle a des grands avantages sur l'Algebre, qui a besoin de grands detours pour parvenir a des demonstrations et constructions geometriques, au lieu que cette methode suit les figures de vue, qu'elle soulage l'imagination, et qu'on pourra faire par là une exacte déscription d'une machine ou autre chose imaginable, quelque composée qu'elle puisse estre, sans employer des figures ny des paroles, et cependant il sera aisé à celuy qui entendra ces caracteres de tracer la figure apres eux. Mais le plus important usage qu'on en pourra faire, c'est d'aider le raisonnement. Car on trouve ainsi par une espece de calcul tout ce que la Geometrie enseigne jusqu'aux elemens d'une maniere analytique et determinée. Car l'Algebre qui suppose les elemens ne pousse pas l'analyse à bout, comme fait cette nouvelle caracteristique, par laquelle je demonstre par exemple que l'intersection de deux surfaces spheriques est un cercle et choses semblables, sans employer l'imagination.

Pour ce qui est du phosphore, qui luit de soy-même, et qui jette des éclats, je vous en envoyeray la composition, si vous ne l'avés pas encor dans vostre Academie. Car je l'ay fait moy-même et j'en puis répondre. Je croy qu'il y a des gens qui demandent beaucoup pour le vous communiquer, mais je ne demande rien, pourveu que l'Academie Royale veuille tenir la chose secrete, et que cela puisse servir à faciliter ce que j'ay quelque raison d'esperer un jour. Car sans parler de quelques decouvertes mathematiques de mon cru (particulierement de ma quadrature dont j'ay achevé la demonstration dans les formes, avec quantité d'autres propositions considérables y comprises, et qui pourroit estre adeptée de l'Academie) je suis peut-estre en estat de vous envoyer de temps en temps ce qui se passe de plus considerable dans les sciences en Allemagne, et que vous n'apprendrez autrement que trop tard ou point. Et une correspondence reglée me pourra peut-estre faire considerer en quelque façon comme appartenant à vostre Academie quoyque je ne puisse pas estre present. J'ay quelques autres experiences considerables dont je pretends vous regaler un jour. Cependant je vous supplie, Monsieur, de concerter cette affaire avec Mr. l'Abbé Gallois, à qui j'en ay écrit autres fois. Vous m'avés déja témoigné tant de bonté, et vous avés tant fait pour moy, que j'ose encor esperer cette faveur. Je souhaiterois un mot de réponse que Mr. Brosseau resident d'Hannover, demeurant dans la rue des Rosiers, derriere le petit S. Antoine, me fera tenir. Je suis avec zele etc.

VI.

Hugens an Leibniz.*)

J'ay examiné attentivement ce que vous me mandez touchant vostre nouvelle Characteristique, mais pour vous l'avouer franchement je ne concois pas, par ce que vous m'en estalez, que vous y puissiez fonder de si grandes esperances. Car vos exemples des Lieux ne regardent que des veritez qui nous estoient desia fort connues, et la proposition de ce que l'intersection d'un plan et d'une surface spherique fait la circonference d'un cercle, s'y conclud assez obscurement. Enfin je ne vois point de quel biais vous pourriez appliquer vostre characteristi-

*) Von diesem Brief fehlt der Anfang, denn das Vorhandene hat weder die gewöhnliche Aufschrift noch ein Datum. Aus dem Inhalt ergiebt sich indess, dass dieses ein Bruchstück des Schreibens vom 22. November sein muss, von dem Leibniz im folgenden Briefe spricht.

que à toutes ces choses differentes qu'il semble que vous y vouliez reduire, comme les quadratures, l'invention des courbes par la propriete des tangentes, les racines irrationelles des Equations, les problemes de Diophante, les plus courtes et plus belles constructions des problemes geometriques. Et, ce qui me paroit encore le plus etrange, l'invention et l'explication des machines. Je vous le dis ingenuement, ce ne sont là à mon avis que de beaux souhaits, et il me faudroit d'autres preuves pour croire qu'il y eust de la realité dans ce que vous avancez. Je n'ay pourtant garde de dire que vous vous abusiez, connoissant d'ailleurs la subtilité et profondeur de vostre esprit. Je vous prie seulement que la grandeur des choses que vous cherchez ne vous fasse point differer de nous donner celles que vous avez desia trouvees, comme est cette Quadrature Arithmetique et ce que vous avez decouvert pour les racines des equations au dela du cube, si vous en estes content vous mesmes. Pour celle que vous proposez d'une espece nouvelle, sçavoir $x^x - x \propto 24$, elle est determinée en nombres entiers, mais autrement de sa nature elle ne paroit pas l'estre, car il y a des exposants qui sont des fractions, comme l'on peut entendre par les logarithmes, et ainsi vostre nombre pourroit aussi estre quelque fraction ou irrationel qui satisfist aussi bien que 3 à la dite equation. J'ay beaucoup travaillé tout l'esté dernier a mes refractions, sur tout en ce qui regarde le Cristal d'Islande, qui a des phenomenes si etranges que je n'ay encore sçeu penetrer les raisons de tous. Mais ce que j'en ay trouvé confirme grandement ma theorie de la lumiere et des refractions ordinaires. Dans celles-cy j'ay donné entre autres choses la construction de ce probleme proposé par Mr. des Cartes. Estant donner la figure d'un costé d'un verre, trouver la figure de l'autre costé pour faire ensemble le parfait assemblage des rayons paralleles ou qui regardent un point donné, et mesme plus universellement, car il veut que la donnée soit spherique ou de section de cone. Je tascheray de faire imprimer ce traité cet hyver si ma santé me le permet. Je voudrois pouvoir suivre vostre conseil de donner quelques unes de mes meditations en abbrege et sans la formalité des demonstrations, mais j'ay de la peine a m'y resoudre, ne pretendant pas qu'on me croie sur ma bonne foy dans les choses de cette nature. Je n'ay rien de nouveau presentement qu'une invention de niveau qui est fort commode et qui se rectifie et verifie d'une seule station, de sorte qu'a chaque observation on peut s'assurer d'avoir bien operé, ce qui n'est pas ainsi dans tous ceux qu'on a trouvé jusqu'icy, du moins avec des lunettes d'approche, comme est le mien dont je parle. J'en feray mettre la description dans le Journal et vous en feray part a la premiere occasion. Je vous prie cependant de croire que je suis veritablement et d'affection etc.

VII.

Leibniz an Hugens.

J'ay esté bien aise d'apprendre par celle que vous m'avés fait l'honneur d'écrire du 22 de Novembre, que le petit morceau du phosphore vous a esté rendu; mais bien plus, qu'il me semble d'y pouvoir remarquer que vostre indisposition est passée ou diminuée, ce que je souhaite de tout mon coeur. Il est vray que le phosphore cesse de luire enfin quand il n'a point d'air nouveau, cela me confirme dans mon opinion, dont je croy d'avoir parlé dans ma premiere, que c'est un veritable feu, assez fort pour estre veu, mais non pas assez pour se faire sentir à l'attouchement. Or le feu a besoin d'air nouveau. Il me paroist encor remarquable qu'il cesse de luire, quand on souffle contre, car, lorsqu'on chasse l'air en soufflant, ce mouvement trop rapide de l'air empeche le phosphore d'en profiter.

Pour allumer la poudre à canon, il ne faut que prendre un morceau, comme la teste d'une épingle, ou beaucoup moindre et ayant de la poudre menüe, concassée ou brisée un peu y mêler le petit morceau et le broyer avec la poudre, en se servant par l'exemple du plat d'un cousteau, avec lequel on le pressera contre la poudre sur une table, et la poudre s'allumera bientost. On pourra écrire avec ce phosphore des lettres de feu sur du papier et on allumera ce papier en continuant de trotter. Ces deux experiences sont les plus commodes, car on les peut faire sans consumer le phosphore. De fait en enfermant ce morceau, que je vous envoye a present, j'ay tracé des lettres lumineuses sur le papier, tout comme on écrit avec de la craye, ou du charbon, et je les ay pu lire tres clairement en cachant le papier au jour. Mais dans un lieu obscur elles paroissent et brillent merveilleusement avec quelque espece de mouvement.

Si le papier s'en allume, la poudre s'allumera à plus forte raison.*) Je m'étonne que le premier a mangé la vessie et donné quelque atteinte au papier, non obstant la cire, qui l'entourait. Maintenant j'ay couvert celuy-cy avec sa vessie de cire d'espagne. Je le vous envoye afin que vous ayés moins sujet de la ménager.

Les essais que Mr. Becher a publiés ne prouvent pas la realité de sa proposition, à moins qu'il fasse voir qu'on peut reiterer la même operation jusqu'à 50 fois avec le même argent. Car autrement tout l'argent de l'Europe devroit passer par son fourneau, avant qu'il pourroit gagner la million promise par an.

Je puis demonstrer que ce que j'ay avancé suit de ma caracteristique lineaire ou geometrique dont je vous ay envoyé un essay. Car premierement je puis exprimer parfaitement par ce calcul toute la nature ou definition de la figure (ce que l'Algebre ne fait jamais, car disant que $x^2 + y^2$ aeq. a^2 est l'equation du cercle, il faut expliquer, par la figure, ce que c'est que ce x et y, c'est à dire que ce sont des lignes droites, dont l'une est perpendiculaire à l'autre et l'une commence par le centre, l'autre par la circonferance de la figure). Et je le puis en toutes les figures, puisqu'elles se peuvent expliquer toutes par des spheriques, plans, circulaires et droites, dans lesquelles je l'ay fait. Car les points des autres courbes se peuvent trouver par des droites et cercles. Or toutes les machines ne sont que certaines figures, dont je les puis décrire par ces caracteres, et je puis expliquer le changement de situation qui s'y peut faire, c'est à dire leur mouvement. Secondement, lorsqu'on peut exprimer parfaitement la definition de quelque chose, on peut aussi trouver toutes ses proprietés. Cette caracteristique ser-

*) Il ne faut pas continuer de frotter avec le morceau pour allumer le papier, car le morceau tout entier s'en pourroit allumer et seroit inextinguible. Mais le papier estant imbû d'un trait repeté bien fort, on peut allumer le papier en frottant avec le doigt ou plustost contre luy-même ou contre quelqu' autre chose, qui en est imbue aussi.

vira beaucoup à trouver de belles constructions, parceque le calcul et la construction s'y trouvent tout à la fois; mais je ne dis pas qu'on puisse encor trouver par là les plus belles absolument. J'avoue cependant que ces raisonnemens ne touchent point et qu'on a meilleure grace de faire ces choses que de prouver qu'elles sont faisables.

Les racines irrationelles et la methode de Diophante n'ont rien de commun avec cette caracteristique de la situation, aussi n'est ce pas par là que j'y pretends. L'analyse qui sert pour les problemes semblables à ceux de Diophante, est une affaire faite, et je suis satisfait de la methode en general, quoyque je ne me sois pas encore amusé à chercher des abregés particuliers, lesquels, aussi bien que les racines irrationelles generales des equations superieures, demandent quelques tables, que j'ay projettées, pour eviter un calcul qui seroit trop prolixe, même dans le cinquieme degré. Les mêmes tables serviront pour toute l'Algebre. Les quadratures et les figures, dont les proprietés des tangentes sont données, demandent une maniere de calcul toute particuliere, dont j'ay des essais curieux; et j'ay trouvé par là une regle pour les tangentes ex data figura, qui passe infiniment les methodes connues. Soit une equation quelconque exprimant la relation des ordonnées y aux abcisses x, par exemple $\sqrt[2]{(x^2+by^2)}+\sqrt[3]{(xy^2+c^3)}+$ etc. aeq. $\sqrt[4]{(dx^4+ex^2y^2)}+\sqrt[5]{(f^2y^2+g^2y^3)}$ etc. ou quelqu'autre embarassée comme l'on voudra, je puis trouver les touchantes, sans oster les irrationelles ny fractions (s'il y en a qui enferment x ou y) de l'equation. Car on ne les sçauroit, sans enfler infiniment le calcul. Cet abregé estant si utile et presque necessaire dans les grands calculs, je le communiqueray quand il vous plaira. Je puis demonstrer que cette equation $x^x - x$ aequ. 24 est determinée, c'est à dire qu'elle a un nombre fini de racines.

Ma quadrature arithmetique est mise au net et demonstrée; je l'ay gardée pour l'Academie Royale, en cas qu'on puisse faire que l'auteur ait quelque relation avec elle, et qu'on juge alors ce traité digne d'ester mis parmy d'autres bien plus importans qu'ils donnent.

Son Altesse Serenissime mon maistre estant allée en Italie, j'auray un peu plus de loisir cette année, et je pretends d'achever ma machine arithmetique. Je souhaite fort de voir vostre Dioptrique, où il y aura des choses importantes sans doute. Je voudrois sçavoir ce que vous jugés du raisonnement de Mr. des Cartes pour la regle des refractions et de celuy de Mr. Fermat, qui conclut la même chose par une supposition opposée. Le lettre de Mr. Fermat est la 51e dans le 3e tome de celles de Mr. des Cartes. Je ne suis pas satisfait de l'une ny de l'autre. Item si vous croyés que l'irregularité des refractions, par exemple celle que M. Newton a remarquée, doit nuire considerablement aux lunettes.

Je seray bien aise de voir vostre niveau. J'ay dessein de faire en sorte qu'on employe des moulins à vent aux mines du Harz, qui appartiennent à mon maistre, pour en puiser l'eau souterraine, qui empeche les travailleurs, et qui s'en tire ordinairement par des moulins, que l'eau venant de quelques ruisseaux et grands reservoirs fait agir. Mais l'eau manque souvent dans un temps sec, la profondeur, dont il faut tirer l'eau sousterraine, est quelquefois jusqu' à 100 toises et plus. Je souhaite vostre avis la dessus, et je suis avec zele etc.

P. S. J'ay marqué dans un papier à part ce que je croy bon d'observer chez M. Colbert, puisque vous avés la bonté, Monsieur, de vous y interesser pour moy.*)

---

*) Das P. S. welches Uylenbroek im zweiten Theile p. 13 als zu diesem Briefe gehörig angiebt, ist nicht das richtige, wie sich aus dem Briefe Hugens von 11. Jan. 1680 (namentlich aus den Worten: sous nom inconnu) ergiebt, sondern vielmehr folgendes:

P. S. Pour mieux reüssir chez M. C. je croy qu'il seroit bon de dire qu'un Allemand curieux a envoyé ce phosphore, et qu'il en veut donner la composition, qu'il est versé en physique et mathematiques, qu'il offre sa correspondence pour communiquer de temps en temps des nouvelles découvertes d'Allemagne et ayant beaucoup des connoissances pour apprendre qu'il peut même donner quelque chose de considerable du sien. Qu'il seroit peut estre a propos qu'il fût en quelque façon à l'Academie avec charge de correspondance, et des appointemens en qualité de membre.

Pour le nom il sera bon de ne pas dire sans necessité; ou même l'appeller Gottfredus Wilhelmi qui est aussi le veritable sans le nommer Leibniz. Car M. C. ayant eu souvent les oreilles battues de ce nom dans un temps qui n'y estoit pas propre, en sera rebuté s'il s'en souvient. Car les grands ayant une fois fait des difficultés sur une chose, ne se rendent pas aisement, et on reuissit mieux en la proposant comme toute nouvelle. Si

VIII.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{1}{10}$ Decembre 1679.

Vous aurés receu ma derniere avec un autre morceau du phosphore. Cependant ayant songé à la maniere la plus commode et la plus seure d'allumer la poudre à canon avec le phosphore, je me suis avisé de celle-cy. Prenés un petit baton qui ait quelque largeur au bout: frottés le bien avec le phosphore, et ayant mis de la poudre menuë, concassée, sur une table, remués et broyés la avec ce bout du baston, en la pressant contre la table, et la poudre s'allumera bientost. Je viens de le faire. Ainsi vous épargnerés le phosphore, vous ne le mettrés pas en danger de s'allumer et vous allumerés seurement la poudre.

Pour ce que j'ay remarqué dans un billet separé mis dans la derniere lettre, vous en userés comme il vous plaira. J'ai cru qu'une solicitation nouvelle seroit plus agreable qu'une vieille, et qu'on pourroit mieux sonder l'intention de cette maniere, d'autant que les grands ne s'amusent gueres à demander les noms des personnes. Si on se peut passer de dire le nom, en parlant en termes generaux, il seroit bon de le faire: mais s'il y a de la difficulté là dessus, il faut plustost le dire ouvertement, en cas qu'on le demande. Ayez la bonté, Monsieur, de ne pas temoigner ce petit avis à quelqu'autre. La confiance que j'ay en vostre bienveillance fait que je me suis hazardé de toucher cecy.

Si vous apprenés quelque chose d'utile et servant aux manufactures, je vous supplie de m'en faire part; par exemple, je desire de sçavoir la composition du cuir impenetrable de Mr. Lancker, item de la manufacture de l'étain, dit Royal, dont on m'a écrit comme d'une belle chose. Je ne sçay si je vous ay mandé qu'un ouvrier allemand a trouvé moyen de faire le fer rouge en le battant seulement d'une certaine maniere. Je tacheray d'en apprendre les particularités.

M. le Duc de Chevreuse et M. l'Abbé Gallois y prennent, il seroit bon aussi de les en avertir, à fin qu'ils ne donnent pas d'abord à connoistre à M. C. qu'on renouvelle une vieille solicitation.

Je ne scay si vous avés appris que cette Moxa, qui a fait tant de bruit en Hollande n'est pas une drogue qui vienne des Indes, mais qu'elle se fait de quelques plantes d'Europe. Je voudrois sçavoir aussi si vous avés leu avec attention le livre de feu Mr. Spinosa. Il me semble que ses demonstrations pretendues ne sont pas des plus exactes, par exemple lorsqu'il dit que Dieu seul est une substance et que les autres choses sont des modes de la nature divine. Il me semble qu'il n'explique pas ce que c'est que substance. Je suis avec zele etc.

IX.

Hugens an Leibniz.

A Paris ce 11 Janv. 1680.

Depuis ma derniere j'ay esté malade tout de bon l'espace d'un mois entier, qu'il a falu garder la chambre. Monsieur Galois pendant ce temps m'estant venu voir, je luy recommanday vos affaires, et je le trouvay de luy mesme fort disposé a vous procurer du bien, m'assurant qu'il n'obmettroit point d'occasion pour cela et qu'il avoit mesme conceu quelque moyen pour l'effectuer. Je n'avois pas encore receu alors vostre penultime, ou estoit le second morceau de vostre composition, de sorte que je ne luy ay pas proposé l'expedient au quel vous aviez pensé de solliciter vostre affaire sous un nom inconnu. Mais je ne suis pas aussi d'avis d'en parler, parce que je scay fort bien le meschant effect que cela feroit aupres du patron s'il venoit par apres à le connoistre.

Je vous rends graces de la recrue du phosphore et des nouvelles instructions. Mais j'ay a vous dire que je les ay pratiquees en vain, car ni la poudre a canon ni deux papiers frottez l'un contre l'autre, apres les avoir imbus de cette composition, n'ont jamais voulu s'allumer quelque fortement que j'aye appris. Je n'ay rien produit que bien de la fumeur et de l'odeur assez mal agreable au nez. Cela fait que je m'estonne de ce que vous me mandez d'avoir bien reussi a cette experience, et il faut qu'en chemin la vertu de la drogue ait diminué, car assurement la poudre que j'ay emploiée estoit bonne, fine et seche.

Pour ce qui est des effects de vostre characteristique je vois que vous persistez a en estre persuadé, mais, comme vous dites vous mesme, les exemples toucheroient plus que les raisonnements. C'est pourquoy je vous en demande des plus simples, mais propres a convaincre mon incredulité, car celuy des lieux, je l'avoue, ne me paroit pas de cette sorte. Ce que vous promettez des tangentes sur des equations embarassees de racines me paroit beau, mais voions aussi de cela s'il vous plait un petit exemple, ou marquez seulement l'equation de la courbe et le dernier resultat du calcul qui donne la construction de la tangente. Touchant ce que vous me demandez a l'egard du raisonnement de Mr. des Cartes, ou il explique les refractions, je vous diray que je n'en ay jamais estè satisfait, par plusieurs raisons trop longues a mettre icy. Mr. Fermat pour prouver la mesme regle qu'avoit donnee des Cartes, suppose que le rayon de lumiere doit emploier le moins de temps qu'il est possible, et de plus que ce rayon chemine plus lentement dans le verre ou l'eau que dans l'air. Mais moy, je ne suppose que ce dernier et dela je demontre la mesme regle des refractions, et aussi cette proprieté que le rayon emploie le moindre temps. L'irregularité que Mr. Newton a remarqué aux refractions nuit plus aux lunettes a mon avis que le defaut qui accompagne les verres spheriques a cause de la figure.

Pour les moulins a vent que vous avez en vue d'emploier pour vuider l'eau des mines, je crois que cela est pratiquable, et que la chaisne avec des seaux est le meilleur moyen. Mais la profondeur de 100 toises est bien grande et c'est à vous a examiner si la richesse des mines peut recompenser les fraix de ces machines qui comme vous sçavez coustent beaucoup. Je me souviens qu'un Seigneur Escossais m'a dit autrefois qu' avec de chaines comme cela il vuidoit l'eau de ses mines de charbon, qui n'avoient pas moins de profondeur que celles dont vous parlez. Il me semble pourtant qu'il n'y emploioit que des chevaux, ce qui devoit aller bien lentement. La description de mon niveau sera mise dans le Journal qui suivra celuy de lundy prochain, et je vous l'envoieray dez qu'elle sera imprimée. Je vous souhaite une heureuse année et demeure etc.

X.

Leibniz an Hugens.

à Hannover ce 26 de Janvrier 1680.

Voicy un exemple de ma methode des Touchantes.*) J'ay pris le premier qui me paraissoit egalement curieux et embarassé d'irrationelles; et vous jugerez bien que je ne l'ay pas accommodé à ma methode, et que j'en aurois pu faire autant avec quelque autre.

J'ay allumé tant de fois et du papier et de la poudre avec mon phosphore, que je ne scaurois deviner pourquoy vous n'y avés pas reussi. Si, mêlant un petit morceau de phosphore parmy de la poudre et les agitant ou broyant ensemble, il ne vous arrive pas d'y mettre le feu, je suis au bout de mon latin.

Pour donner un essay de ma caracteristique, j'avois choisi les lieux, parceque tout le reste je determine par leurs intersections, et parceque la generation de tous les autres lieux depend des plus simples que j'ay donnés. Ainsi je croy d'avoir jetté les veritables fondemens.

Je suis bien aise que vostre jugement touchant la demonstration pretendue des loix de refraction donnée par Descartes, s'accorde avec le mien. Mr. Fermat a accommodé à la refraction la methode, dont Heron, Ptolemée et quelques autres anciens s'étaient servis pour demonstrer la regle de la reflexion; avec cette difference que les anciens n'avoient besoin que de chercher le moindre rayon, puisqu'il n'y a qu'un milieu, et par consequent, il n'y a que la longueur du chemin, qui vienne en considération, mais lorsqu'il y a deux milieux, il se faut servir de la raison composée du chemin et de la resistence du milieu, ce que Mr. Fermat a tres bien fait, se servant de cette supposition, que le rayon arrive d'un point à un autre par la voye la plus aisée. Cependant il faut avouer que cette supposition ne scauroit passer pour un axiome, mais seulement pour une hypothèse. Et je voy bien que vous en faites le même jugement.

Je vous remercie, Monsieur, de ce que vous me mandez touchant les mines de charbon, ou l'on s'est servi des chaînes

*) Siehe die Beilage zu diesem Brief.

à seaux jusqu'à la profondeur de 100 toises. Je croy que cela reussiroit bien aussi au Harz, s'il n'y avoit un inconvenient, qui est la corrosivité des eaux qu'on est contraint de tirer de nos mines qui mange bientost le fer. C'est pourquoy on s'y sert d'un vingtaine de pompes les unes sur les autres; ces pompes jouent par le moyen de moulins a eau; et mon dessein n'estant que d'essayer, si au défaut de l'eau dans un temps sec ou autrement, on pourroit y employer le vent, ménageant l'eau dans les grands reservoirs faits pour cet effect, je n'ay qu'a employer les mêmes pompes déja faites. Mais le vent allant fort inégalement, et agissant quelques fois avec une violence qui pourroit endommager les machines, il s'agit d'y remedier et de faire de l'application d'une maniere simple, commode et durable. J'ay pensé de faire ensorte que les ailes du moulin se tournent un peu et s'inclinent, quand le vent devient trop fort, sans que pour cela la croix, qui porte les ailes, change de place. Mais je souhaite d'en avoir vostre avis.

J'ay bien du déplaisir de ce que vous me mandés d'avoir esté malade tout de bon depuis quelques semaines. Il nous importe beaucoup que vous vous ménagiés un peu mieux que vous n'avés coustume de faire et que vous ne songiés presque doresnavant à d'autre étude, qu'à celle de vostre conservation.

Je vous suis obligé de ce que vous avés parlé avec Mr. l'Abbé Gallois. Ce que j'avois mandé, n'estoit pas pour deguiser, mais pour n'estre pas rebuté d'abord en reprenant une vieille sollicitation. Mais je vous supplie, Monsieur, de dechirer le billet que je vous avois envoyé, par ce que je connois par là qu'il pourroit estre mal interpreté.

J'ay fait une grande perte par la mort de feu mon maistre, qui estoit sans doute un des plus grands hommes que j'aye connu, sans parler de sa qualité de Prince. Mais Monsieur le Duc d'Osnabrug son frere prenant les rênes du gouvernement, et ayant déja donné a connoistre que la vertu et la generosité sont en quelque façon hereditaires dans la maison, nous avons tout sujet de nous consoler en quelque façon d'une perte, qui ne se pourroit mieux reparer que par un tel successeur. Cependant ces changements de la cour auxquels on est sujet, m'obligent de songer quelques fois à des ressourses, qui en sont independantes, en quoy vous m'avés déja assez favorisé. Je suis avec zele etc.

Specimen utilitatis Methodi novae Tangentium sive de maximis et minimis.

Sit curva EE (Fig. 9.) talis naturae, ut datis in recta AD velut axe quatuor punctis constantibus A, B, C, D, et puncto curvae E, ac junctis quatuor rectis AE, BE, CE, DE, tunc summa quatuor solidorum sub ternis quibuslibet rectis praedictis, aequetur solido ex omnibus quatuor invicem ductis et datae rectae G applicatis facto. His positis ex puncto dato E tangens ET axi occurrens in T ita educetur: ex E demittatur in axem perpendicularis EF, ponamus autem (facilitatis causa, ne signa mutare necesse sit) punctum F cadere inter A et T.*)

Constructio: Exhibeantur rectae octo quarum	Prima sit ad EF in ratione triplicata G ad DE	Secunda sit ad EF in rat. tripl. G ad CE	Tertia . . . BE	Quarta . . . AE

Quinta	Sexta	Septima	Octava			
DF	CF	BF	AF	Erit TF ad EF	ut	summa quatuor harum rectarum priorum ad summam quatuor posteriorum.
. . .	. . .	. . .	. . .			
DE	CE	BE	AE			

Hanc solutionem paucis calculi lineis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine taedio fieri potest; et tamen postea cum valores aut constructiones quaerimus, cogemur aequationis inutiliter exaltatae iterum depressiones investigare, qui labor in aequationibus decimum longe gradum excedentibus, qualis ista foret, saepe immensus est.

---

*) Notandum tamen si punctum F cadat inter A et D, mutanda nonnihil esse signa, et pro summis adhibendas differentias certo modo sumtas.

XI.

Leibniz an Hugens.

Janvier 1688.

Je ne m'attendois pas à voir mon probleme honnoré de vostre solution. C'est à vous et à vos semblables, dont le nombre est tres petit, d'estre plustost juges de ce que font les autres. On sçait assez que ces problemes ne vous arrestent pas: Il est inutile de dire, que vostre solution s'accorde exactement avec la mienne. Mon dessein avoit esté de tailler un peu de besoigne à ces bons Cartesiens qui pour avoir leu les Elemens de Bartholin, ou du P. Malebranche croyent de pouvoir tout faire en Analyse. Cependant M. l'Abbé Catelan doit estre bien aise d'estre degagé, il auroit peutestre souvent mordu les ongles inutilement. Il est vray que vostre solution est encor un peu enigmatique en ce qui regarde ces autres lignes isochrones moins principales, que vostre figure dans les Nouvelles de la republique des lettres mois d'octobre 1687 appelle BE, BF, BG. C'est pourquoy vous jugerés, Monsieur, si j'ay rencontré vostre sentiment. Voicy ce que j'en pense. Soit une de ces moins principales (Fig. 10) $\beta B\delta E$ passant par B sommet de la principale BD. Soit $\alpha\beta$ egale à $\frac{4}{9}$ du parametre de $\delta\beta$, et soit $A\alpha$ une droite horizontale et AB, $\alpha\beta$ perpendiculaires chacune touchant sa courbe au sommet. Or nous sçavons que le poids tombant de la hauteur ou horizontale qui passe par A sur quelque point de la courbe BD que ce soit, c'est à dire sur le sommet B ou sur quelqu'autre point D pourra descendre uniformement par la courbe. Donc de meme le poids tombant d'A, c'est à dire de l'horizontale qui passe par α, sur un point B de la courbe $\beta B\delta$, pourra descendre uniformement par $B\delta$. Mais la descente par la principale BD et qui commence par le sommet, retient le plus de vistesse. Aussi la perpendiculaire AB touche BD, et coupe $\beta\delta$. J'adjouteray aussi que generalement le temps de la descente par BD est au temps de la descente par AB, comme BC est au double d' AB, dont le corollaire est ce que vous aves voulu remarquer que BC estant double d' AB ~~les temps~~ sont egaux. [Nous verrons si M. l'Abbé C. y voudra mordre, quoyqu'il soit aisé en effect à un Analyste ordinaire de trouver le reste apres ce que vous en avés dit. Car le noeud de l'affaire estoit de determiner la nature de la courbe.]*)

Je souhaitte de tout mon coeur, que vous donniés au public tant de belles decouvertes que vous avés faites depuis long temps dans la Geometrie, dans les Mécaniques, dans la Dioptrique, et autres sciences. Pourquoy ne vous servés vous pas de la commodité de tant de journaux des Sçavans. Mais ce que je souhaitte le plus, c'est vostre santé. Je ne connois personne, qu'on vous puisse substituer. En attendant la publication de vos ouvrages, je voudrois avoir au moins quelque connoissance de ce que vous avés dessein de donner. Il me semble d'avoir ouy dire que vous pouviés rendre raison enfin de la refraction du crystal d'Islande. Je voudrois sçavoir vostre sentiment sur le flus et reflus, sur la variation de l'aimant, qui apparemment a quelque regle, sur la nature des couleurs fixes qu'on appelle reelles. Item sur la generation des sels.

J'aurois écrit plustost, mais je suis en voyage depuis trois mois à voir quelques Archives pour en tirer des lumieres Historiques, et c'est pourquoy je n'ay vu les Nouvelles d'octobre qu'il y a quelques semaines.

XII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 8 Fevr. 1690.

Il est bien tard de vous dire maintenant, (si toutefois je ne dois pas l'omettre) que je reçûs la tres obligeante lettre que vous m'escrivistes il y a quelques 8 ou 10 mois, à l'occasion de Vostre Probleme dont vous aviez trouvé ma solution dans les Nouvelles des Sçavans. Je ne sçaurois vous dire pourquoy je n'y ay pas fait de response, si ce n'est pas ce que je l'avois differée, comme cela arrive parfois, et que dés lors je prevoiois cette occasion presente de vous devoir envoier le livre que j'allois faire imprimer. La lenteur des ouvriers, et un voiage

*) Diese eingeschlossene Stelle sollte wahrscheinlich in der zum Absenden bestimmten Reinschrift wegbleiben.

que je fis en Angleterre depuis que l'edition estoit commencée, ont fait qu'elle a trainé jusqu'icy. Le voila enfin acheve ce gros volume, et qui vous demande quelques heures de vostre loisir pour estre lû, comme à un juge tres competent en ces matieres. Outre le Traité de la Lumiere vous y verrez un discours de la cause de la Pesanteur, et ce que j'y ay adjouté touchant les corps qui traversent l'air ou quelqu'autre milieu qui leur fait resistence; de quoy vous avez traité aussi, et Mr. Newton plus amplement que pas un de nous deux. Je vois que vous vous estes encore rencontré avec luy en ce qui regarde la cause naturelle des chemins Elliptiques des Planetes; mais comme en traitant cette matiere vous n'aviez encore vû qu'un extrait de son livre et non pas le livre mesme, je voudrois bien sçavoir si du depuis vous n'avez rien changé à vostre Theorie, parce que vous y faites entrer les Tourbillons de Mr. des Cartes, qui à mon avis sont superflus, si on admet le Systeme de Mr. Newton, où le mouvement des Planetes s'explique par la pesanteur vers le Soleil et la vis centrifuga, qui se contrebalancent. Outre que ces Tourbillons Cartesiens faisoient naitre plusieurs difficultez, comme vous verrez par mes remarques, et mesmé sans elles vous ne pouviez pas l'ignorer. Je ne feray pas cette lettre plus longue, puisque je vous envoie assez d'ailleurs pour derober de vostre temps. Je vous supplieray seulement que lors que vous aurez examiné ces petits Traitez de m'en faire sçavoir vostre sentiment et si j'ay este assez heureux pour y avancer quelque chose qui vous soit nouvelle et qui vous satisfasse. Je suis de ceux qui vous honnorent le plus, Monsieur, et demeure etc.

XIII.

Leibniz an Hugens.

Hannover $\frac{11}{21}$ Juillet 1690.

Comme vostre temps nous est pretieux, je ne vous importunerois pas, si je ne trouvois à propos de vous recommander un jeune homme de tres grande esperance, nommé Mr. Spener. Il s'applique fort à la physique, et puisqu'il joint la connoissance de la chymie à celle des mathematiques, je m'en promets beaucoup. Comme il pretend l'honneur de vous faire la reverence à la Haye, vous en jugerés mieux, et il profitera de l'avantage de vous voir, pour se fortifier dans ses bons desseins, et pour les poursuivre avec l'exactitude, qui y est necessaire. S'il venoit chez vous, je vous supplie de luy faire donner la cy-jointe.

Il n'y a que cinq ou six semaines que je suis de retour à Hannover d'un voyage de deux ans et plus, pendant lequel j'ay parcouru une bonne partie de l'Allemagne et de l'Italie pour chercher des monumens historiques par ordre de Monseigneur le Duc.

J'ay trouvé bien peu de personnes avec qui on puisse parler de ce qui passe l'ordinaire en physique et en mathematiques. Mr. Auzout que j'ay trouvé à Rome, nous promet une nouvelle edition de Vitrouve, ou il pourroit bien reussir sans doute, puisqu'il a eu le moyen de voir tant d'antiques. Il pretend qu'il y a bien des passages ou Mr. Perrault a debité plustost ses propres pensées que celles de l'auteur et des anciens. Mais je trouve que Mr. Auzout est trop distrait, et comme il ne veut pas donner des pieces detachées, j'apprehende que cela ne nous prive entierement du fruit de ses travaux.

J'ay trouvé aussi à Rome chez Mr. le Cardinal de Bouillon, Mr. l'Abbé Berthet, que vous aurés peut-estre connu à Paris, sous le nom de P. Berthet, jesuite. Il s'applique fort à la musique, ou il fait des observations. Il est bon poëte avec cela, et il a traduit en Italien l'opera français, qui s'appelle l'Amadis, et encore quelques autres, conservant parfaitement le même chant, ce qu'on a trouvé beau et difficile. J'ay esté present à une representation qu'on en fit chez Mr. le Cardinal.

Le traité de Mr. Viviani de locis solidis est imprimé en partie, mais comme il y manque encor quelque chose, il ne le monstre pas encore.

J'ay trouvé deux medicins, bien versés dans les mathematiques, dont je me promets quelque chose, Mr. Guillelmini à Bologne et Mr. Spoleti à Padoue.

J'ay la plus grande impatience du monde, Monsieur, de voir vostre traité de la lumiere que j'attends de Hambourg, aussitost qu'il y sera arrivé. Il y a déja longtemps que le public le souhaittoit. Il nous faut de tels livres pour avancer veritablement. J'attends d'y voir dechiffré le mystere du crystal d'Islande, et peut estre y trouverons nous quelque chose, qui puisse servir à deviner les raisons des couleurs pour expliquer mathematiquement par quelle adresse la nature rend certaines liqueurs, ou surfaces, toutes rouges ou toutes bleues. Car je m'imagine que ces couleurs, qu'on appelle fixes, ne viennent pas moins de la refraction que celles qu'on appelle transparentes, quoyque feu Mr. de Mariotte ait esté d'un autre sentiment.

Je ne scay Mr. si vous avés veu dans les Actes de Leipzig une maniere de calcul que je propose, pour assujettir à l'Analyse ce que Mr. des Cartes luy même en avoit excepté. Au lieu que les affections des grandeurs, qu'on employoit jusqu'icy en calculant, n'estoient que les racines et les puissances, j'employe maintenant les sommes et les differences, comme $d\overline{y}$, $\overline{ddy}$, $\overline{dddy}$, c'est à dire differences et incremens ou elemens de la grandeur y, ou bien les differences des differences, ou les differences des differences des differences etc. Et comme les racines sont reciproques aux puissances, de même les sommes sont reciproques aux differences, par exemple, $\sqrt{yy} = y$ et $\sqrt[3]{y^3} = y$, de même $\int d\overline{y} = y$ et $\iint \overline{ddy} = y$. Par le moyen de ce calcul je me suis avisé de donner les touchantes et de resoudre des problemes de maximis et minimis, lorsque les equations sont fort embarassées de racines et de fractions, sans que j'aye besoin de les oster, ce qui m'epargne souvent des grandissimes calculs. Par le même moyen je reduis à l'analyse les courbes que Mr. des Cartes appelloit mechaniques, comme par exemple les cycloides, exprimant par une equation la relation entre x et y abscisse et ordonnée de la courbe. Par exemple (Fig. 11.) AB le sinus versus estant x, alors FGE*) arc du cercle chez moy se designe ainsi $\int (adx : \sqrt{(2ax - xx)})$, c'est à dire l'arc est la somme des elemens de la courbe circulaire qui sont: $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$ (ou $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$) car les deux points me signifient division, pour eviter la soubscription du diviseur. C'est à dire les elemens de la courbe circulaire sont à dx elemens respondans de l'abscisse, comme a, rayon, est aux sinus versus $\sqrt{(2ax - xx)}$. Cela estant posé, l'ordonnée de la cy-

*) Voluit dicere AE pro eo, quod dixit FGE. Anmerkung von Hugens.

cloyde, menée perpendiculairement sur l'axe, que nous appellerons y, sera $\sqrt{2ax - xx} + \int a dx : \sqrt{2ax - xx} = y$. Par le moyen de cette equation je trouve toutes les proprietés de la cycloide sans avoir aucun recours à la figure, comme si c'estoit une ligne ordinaire. Cherchant par exemple l'equation differentiale de cette equation, nous trouvons les tangentes de la cycloide; car $d\sqrt{2ax - xx} = \overline{a - x}\, dx : \sqrt{2ax - xx}$; par les regles de mon Algorithme, que j'ay données, donc $dy = (2a - x) dx : \sqrt{(2ax - xx)}$ ou bien $dy : dx :: (2a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}$; c'est à dire dans la cycloide l'ordonnée est à la partie de l'axe compris entre l'ordonnée et la touchante (ou bien dy est à dx) comme $2a - x$, sinus versus de l'arc parcouru FGE*) est au sinus rectus, c'est à dire CB à BT comme FB à BE. Ainsi l'analyse des lignes transcendantes estant établie, on pourra découvrir bien des proprietés, dont on ne s'avisera pas sans cela et j'en ay beaucoup d'echantillons. Je souhaite d'en avoir un jour votre jugement dont je scay le poids. Je suis avec zele en vous souhaitant beaucoup de sante pour longues années etc.

XIV.

Hugens an Leibniz.

A Voorburg ce 24 Aoust 1690.

J'ay receu Vostre tresagreable du $\frac{15}{25}$ Jul. Elle en enfermoit une pour Mr. Spener, qui n'est point venu encore la querir. Peut estre m'aura-t-il cherché en vain à la Haye, ou je ne demeure plus, mais a une maison de campagne à une lieue de là tant que dure la belle saison. J'ay pourtant laissé Vostre lettre au logis de mon frere de Zulichem, à fin qu'on la luy donnast s'il venoit la demander.

Je vous ay escrit du 9e Fevr.**) de cette année en vous envoiant un Exemplaire de mon livre de la Lumiere. Je recom-

---

*) Imo AE. Bemerkung von Hugens.

**) Der Brief selbst hat als Datum 8 Febr.

manday le pacquet à Mr. van der Heck, Agent de Mr. le Duc de Hanover, mais comme vous n'estes revenu de vestre voiage d'Italie que depuis 6 semaines, ce pacquet pourra estre resté entre les mains de celuy à qui Mr. van der Heck l'aura adressé, de quoy je vous prie de vous informer. Je vous rends grace de vos nouvelles d'Italie ou je voudrois avoir esté avec vous. Je souhaite fort de voir ce Vitruve de Mr. Auzout, qui a raison de reprendre Mr. Perrault en plusieurs choses; par exemple en la construction de la Balliste, où il nous a forgé une machine de sa teste, qui n'est point praticable, au lieu de la vraye qu'on voit dans **Heronis Belopoiecia** commentez per **Bernardinus Baldus**. J'ay estè bien aise d'apprendre des nouvelles du P. Berthet, que j'ay connu a Paris et que je trouvois fort à mon grè. Je voudrois bien scavoir pour quelle raison il est sorti de la Societé des Jesuites. J'admire ce que vous dites de sa traduction des Opera de François en Italien, en conservant le chant. Je ne croiois pas que Mr. Viviani fust encore vivant, n'ayant pas ouy parler de luy depuis qu'il nous envoya à Paris un petit ouvrage posthume de Galilee, qui ne me fut rendu que 2 ans apres par le caprice de certaines gens. Qu' est ce que pourra contenir de nouveau ce traité **de Locis Solidis**?

Je n'ay rien dit des couleurs dans mon Traité de la Lumiere, trouvant cette matiere tres difficile; sur tout a cause de tant de manieres differentes dont les couleurs sont productés. Mr. Newton, que je vis l'esté passé en Angleterre, promettoit quelque chose la dessus, et me communiqua quelques experiences fort belles de celles qu'il avoit faites. Il semble, Monsieur, que vous aiez aussi medité sur ce sujet, et apparemment ce ne sera pas en vain.

J'ay vu de temps en temps quelque chose de Vostre nouveau calcul Algebraique dans les Actes de Leipsich, mais y trouvant de l'obscurité, je ne l'ay pas assez etudié pour l'entendre, comme aussi parce que je croiois avoir quelque methode equivalente, tant pour trouver les Tangentes des Lignes courbes ou les regles ordinaires ne servent pas, ou fort difficilement, que pour plusieurs autres recherches. Mais sur ce que vous me dites maintenant de l'usage de Vostre Analyse et Algorithme dans les Lignes que des Cartes excluoit, j'ay envie de l'etudier à fond si je puis, en repassant sur tout ce que vous en avez donné dans les dits Actes. Je vois qu'entre autres utilitez de Vostre nouvelle invention vous mettez Methodus Tangentium inversa, qui seroit encore de grande importance si vous l'avez telle que la proprieté ou construction des Tangentes estant donnée, vous en puissiez deduire la proprieté de la Courbe. Comme si du point (Fig. 12.) C de la courbe ECF, ayant mené la perpendiculaire CB $\propto$ y sur la droite donnée AD, dans laquelle soit donné le point A et AB $\propto$ x; la tangente estant CD, et BD alors egale à $\frac{yy}{2x} - 2x$; si vous pouvez trouver l'Equation pui exprime la relation de AB à BC, ou bien quand BD est $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, estant a une ligne donnée. Si vostre methode sert icy et aux autres choses que vous dites, vous pouvez estre tres seur quel en sera mon jugement, et vous m'obligerez fort aussi bien que tous les geometres en l'expliquant clairement et dans un traité expres.

Dans ma lettre qui accompagnoit le traité de la Lumiere, je vous faisois response à la tresobligeante que vous m'aviez escrite il y avoit longtemps, au sujet de vostre probleme des corps également descendants qui j'avois resolu. J'y avois aussi touché quelque chose des Orbes Elliptiques des Planetes, dont vous aviez donné vos pensées dans les Acta de Leipsich, pour sçavoir si vous n'aviez pas rejetté les Tourbillons de des Cartes apres avoir vu le livre de Mr. Newton. Je demandois aussi vostre jugement sur ce que j'ay écrit au traité de la Pesanteur touchant le mouvement des corps qui sentent la resistance de l'air, ayant vu que vous aviez aussi entamé cette matiere. Mais j'attens avec impatience vos remarques sur tous les sujets differents que mon livre contient scachant que je ne scaurois avoir un juge plus competent, ni plus porté a me faire justice. Je suis avec toute l'estime possible etc.

XV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 9 Oct. 1690.

Je vous ay escrit une assez longue lettre du 24. Aoust, pour reponse à la vostre du $\frac{15}{25}$ Jul. Je n'ay point appris jusquicy si vous l'avez reçue. Monsr. Spener est venu depuis querir vostre lettre que j'avois pour luy, et je l'ay vu fort souvent pendant le sejour qu'il a fait à la Haye, et certes avec bien de la satisfaction, trouvant qu'il sçavoit beaucoup de choses singulieres, principalement en ce qui regarde la matiere ou il s'est le plus appliqué qui est celle des metaux et mineraux. Selon le compte qu'il faisoit il doit vous avoir vu depuis son retour en Allemagne, et estre passé en suite chez luy à Leipsich. J'ay tasché depuis ma dite lettre d'entendre vostre calculus differentialis, et j'ay tant fait que j'entens maintenant, mais seulement depuis 2 jours, les exemples que vous en avez donné, l'un dans la Cycloide, qui est dans vostre lettre, l'autre dans la recherche du Theoreme de Mr. Fermat, qui est dans le Journal de Leipsich de 1684. Et j'ay mesme reconnu les fondements de ce calcul, et de toute vostre methode que j'estime tresbonne et tresutile. Cependant je crois encore d'avoir quelque chose d'equivalent, comme je vous ay escrit dernierement, et la raison qui me le persuade, c'est non seulement la solution que je trouvay de vostre Probleme de la Ligne courbe pour la descente egale, mais aussi l'examen que j'ay fait de la Tangente d'une autre Courbe fort composée dont vous m'envoiastés la construction il y a desia plusieurs années. Car par ma methode je trouve cette mesme construction, et toutes les autres dans les lignes qui se forment de mesme, sans que les quantitez irrationelles m'embarassent: et à tout cela je ne me sers d'aucun calcul extraordinaire ni de nouveaux signes. Mais pour juger mieux de l'excellence de vostre Algorithme j'attens avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaine pendante, que Mr. Bernouilly vous a proposée a trouver, dont je luy scay bon gré, parce que cette ligne renferme des proprietez singulieres et remarquables. Je l'avois considerée autre fois dans ma jeunesse, n'ayant que 15 ans, et j'avois demontré au P. Mersenne, que ce n'estoit pas une Parabole, et quelle maniere de pression il faloit pour faire la parabole. Cela a fait que j'ay esté tenté maintenant d'examiner le Probleme de Mr. Bernouilly, et voicy le chifre de ce que j'y ay trouvé. Je l'ay escrit en sorte que vous pourrez a peu pres l'interpreter si vous avez fait les mesmes decouvertes, et je crois vous faire plus de plaisir d'en user ainsi, que si je vous envoiois les choses expliquées. Je vous prie de m'envoier pareillement vostre chifre, et que nous puissions en suite abbreger entre nous le terme d'un an que vous avez accordé aux Geometres, afin que j'aye d'autant plustost la satisfaction de voir ce que vostre Analyse aura produit de singulier.

$\frac{ri}{a} \propto c . \frac{ci}{a} \propto e . \frac{1}{2} rc + \frac{2}{3} ec$ *) $\propto S . \odot \sqrt{2rv} \propto s . c . 45 r \propto c$
$10000 . 8809 . 4134 . xxyy \propto a^4 - aayy . xxyy \propto aaxx - aayy$
d.h.c.q.c.p.q.i.p.c.t.i.i.p.e.r.e.i.i.i.a*.

Vous aurez vu, à ce que je crois depuis vostre derniere, mon Traité de la Lumiere et celuy de la Pesanteur, soit que l'exemplaire, qu'ensemble avec ma lettre j'avois recommandé à Mr. van der Heck, se soit trouvé ou qu'on vous en ait fait avoir d'ailleurs. Vous me ferez plaisir de m'en dire vostre sentiment, apres que vous l'aurez examiné à loisir. Je vois qu'on n'en dit rien dans les Acta de Leipsich, de quoy Mr. D. T. pourroit bien estre cause, qui depuis mon livre imprimé a fait inserer dans ce Journal quelque chose touchant la ligne de reflexion du miroir concave, qui se trouve de mesme chez moy, et que j'avois proposé dans l'Academie a Paris il y a plus de 12 ans. Il me souvient qu'en ce temps là je montray a Mr. D. T. quelques figures de ces lignes de reflexion et refraction, et je crois que de la vient la ressemblance de nos inventions, mais que cela soit dit entre nous s'il vous plait. Il est peut estre desia fasché contre moy, quoyque j'aye plus grande raison de l'estre contre luy, pour n'en avoir pas usé civilement en mon endroit, lors que je luy eus envoié quelques remarques sur sa Medicina Mentis et Corporis. Cela n'empesche pas que je n'estime son esprit et son sçavoir, et s'il peut montrer qu'il a veritablement trouvé ce qu'il a avancé touchant l'invention des quadratures, ou de leur impossibilité, je diray qu'il a fait une des belles decouvertes qu'on puisse faire dans la geometrie. Honorez moi d'un mot de response et croiez que je suis entierement etc.

---

*) Leibniz hat bemerkt; il faut écrire $\frac{1}{6}$ec au lieu de $\frac{2}{3}$ec suivant la lettre du 19 Nov. de cette année.

XVI.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{3}{13}$ d'Octobre 1690.*)

Pendant que je vous prepare une lettre assés ample, tant pour m'acquitter de mon devoir, et pour vous remercier de l'honneur que vous m'avés fait en m'envoyant vostre excellent ouvrage, que pour profiter de vos instructions sur plusieurs points, que vous avés touchés; voicy une troisieme lettre qui m'arrive aujourdhui et qui me fait prendre la plume d'abord pour satisfaire par avance à une partie de ce que je dois, et pour vous dire, qu'il y a environ deux semaines, que le pacquet adressé par M. van der Heck s'est trouvé, et m'a esté réndu enfin. Ceux qui l'avoient receu en mon absence, ne s'en estant pas souvenus à mon retour, que lorsque je l'ay fait demander.

Je conçois fort aisément, Monsieur, que vous avés une methode equivalente à celle de mon calcul des differences. Car ce que j'apelle dx ou dy, vous le pouvés designer par quelque autre lettre, ainsi rien ne vous empeche d'exprimer les choses à vostre maniere. Cependant je m'imagine qu'il y a certaines vues qui ne viennent pas aussi aisément que par mon expression, et c'est à peu près comme si, au lieu des racines et puissances, on vouloit toujours substituer des lettres, et au lieu de xx ou x^2 prendre m ou n, après avoir declaré que ce doivent estre les puissances de la grandeur x. Jugés, Mr., combien cela embarrasseroit. Il en est de meme de dx ou de ddx, et les differences ne sont pas moins des affections des grandeurs indeterminées dans leur lieux, que les puissances sont des affections d'une grandeur prise à part. Il me semble donc qu'il est plus naturel de les designer ensorte qu'elles fassent connoistre immediatement la grandeur dont elles sont les affections. Et cela paroist surtout convenable, quand il y a plusieurs lettres et plusieurs degres de differences à combiner, comme il m'est arrivé quelquefois, car il y a alors à observer une certaine loy d'homogenes toute particuliere, et la seule vue decouvre ce

*) Das Concept dieses Briefes ist bezeichnet mit: Nov. 1690.

qu'on ne deméleroit pas si aisément par des notes vagues, comme sont des simples lettres. Je voy que Mr. Newton se sert des minuscules pour les differences; mais quand on vient aux differences des differences, et ainsi de là, comme il peut arriver, il faudra encor changer, de sorte qu'il me semble qu'on fait mieux de se servir d'une expression, qui s'étend à tout.

Cependant quand on est accoustumé à une methode, on a raison de ne la pas changer aisément, quoyqu'on conseilleroit peut-estre à d'autres, qui n'en ont encor aucune, de se servir de celle qui paroist la plus naturelle. Aussi sans quelque chose d'approchant de mon expression, je ne sçay si on s'aviseroit d'exprimer les courbes trancendentes comme la cycloide ou la quadratrice, par des equations entre x et y abscisse et ordonnée, où il n'entre aucune inconnue que ces grandeurs ou leur affections. Mais peut estre qu'il y a aussi quelques avantages dans vostre expression qui me sont encore inconnus, et je seray ravi d'en estre instruit, estant plus porté à profiter de vos lumieres, qu' à vouloir contester avec vous.

Je croy d'avoir trouvé les deux lignes que vous m'aviés proposées dans vostre lettre de Voorbourg. Appellant*) AB, x, CB, y et DB devant estre $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$ je trouve $\frac{x^2y}{h} = b^{\frac{2xy}{}}$. C'est une equation transcendente, ou les inconnues entrent dans l'exposant; h est une grandeur arbitraire, qui fait varier la courbe infinites fois; a est l'unité, et le logarithme de l'unité icy est o; et b est une grandeur dont le logarithme est l'unité. J'ay parlé quelques fois dans les Actes de Leipzig de ces Equations à exposans inconnus, et quand je les puis obtenir, je les prefere à celles qui ne se forment que par le moyen des sommes ou differences. Aussi peuvent elles estre toujours reduites aux Equations differentielles, mais non pas vice versa. Je voudrois bien sçavoir si les lignes que vous m'avés proposées peuvent avoir quelque usage.

En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certains termes $xxyy = a^4 + aayy$ qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (supposita ejus constructione), d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy meme. De la maniere que vous en parlés, Monsieur, je ne doute point que vous n'ayies tout cela, et quelque chose de plus. Mais comme je me haste à present à vous repondre, je ne m'y arresteray pas presentement.

Je n'ay pas non plus que vous, Monsieur, raison d'estre trop content de Mr. D. T. car il m'est arrivé plus d'une foy qu'il a oublié d'avoir vû aupres de moy des echantillons des choses qu'il a données par apres. Je m'estois avisé de forger des courbes indeterminées, designées par une expression generale, comme $a + bx + cy + dxx + eyy + fxy$ etc. $= 0$ et de determiner par ce moyen, s'il est possible de trouver des quadratices ordinaires des courbes données, c'est à dire s'il y a moyen de trouver une quadrature generale de la courbe donnée pour toutes ses portions. J'en avois dit quelque chose à Mr. Tschirnhaus, et je fus surpris de voir plusieurs années apres, qu'il en parloit comme de son invention dans les Actes de Leipzig. Par malheur il poussa sa methode trop loin, il s'imagina de pouvoir demonstrer par là encor les impossibilités des quadratures particulieres. Mais je luy donnay une instance, qui l'obligea à chercher des faux fuyans assés estrangers, et qui n'auroient pas servi, si j'avois voulu le pousser. J'avois aussi certaines notions philosophiques, que j'ay remarquées depuis dans sa Medicina Mentis. Considerant, par exemple, autrefois la demonstration pretendue de Mr. des Cartes sur l'Existance de Dieu, qui a esté inventée premierement par S. Anselme, je voyois que l'argument est effectivement demonstratif, quand on accorde que Dieu est possible. Cela me fit remarquer, qu'on ne sçauroit se fier sur une demonstration lorsqu'on n'est pas asseuré de la possibilité du sujet. Car s'il implique contradiction, ce qu'on demonstrera de luy, pourra estre vray et faux en même temps. Cela me donna occasion de faire cette distinction entre les definitions reelles et nominelles, que les nominelles se contentent de nous donner moyen de discerner ou reconnoistre la chose definie, si elle se rencontroit; mais les reelles doivent faire connoistre de plus qu'elle est possible. Et je jugeay aussi que c'estoit là le moyen de discerner les idées vraies et fausses; ne demeurant pas d'accord du principe de Mr. des Cartes, que nous avons l'idée des choses dont nous parlons, lorsque nous nous entendons. Sur cette reflexion, qu'il faut tacher de connoistre les possibilités des notions, Mr. D. T. a basti une partie de sa Medicina Mentis. Je luy envoyay aussi des remarques, apres la publication de son ouvrage, où je luy fis voir, que sa regle de determiner les tangentes par les foyers ne pouvoit reussir que rarement, dont je luy donnay un exemple. Je remarquay aussi que son denombrement des lignes courbes de chaque degré ne va pas bien. Je me mis à chercher une meilleure regle pour determiner les tangentes par les foyers et filets; et je la trouvay; mais pour la publication j'ay esté prevenu par Mr. Facio Duillier, dont je ne suis pas fort faché; car il me semble, qu'il a bien du merite. Je vous diray pourtant ma maniere: j'avois trouvé et demonstré ce principe general, que tout mobile ayant plusieurs directions à la fois, doit aller dans la ligne de direction du centre de gravité commun d'autant de mobiles qu'il y a de directions, si on s'imaginoit le mobile unique multiplié autant de fois pour faire reussir entierement, et en mesme temps chacune; et que la vistesse du mobile dans cette direction composée doit estre à celle du centre de gravité de la fiction, comme le nombre des directions est à l'unité. Cela posé, je consideray que le stile qui tend les filets, peut estre conçu comme ayant autant de directions (egales en vistesse entre elles) qu'il y a de filets. Car comme il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée, qui doit estre dans la perpendiculaire à la courbe, passe par le centre de gravité d'autant de points, qu'il y a de filets, qui sont les intersections d'un cercle (décrit du point de la courbe) avec ces filets. Mais il est temps de finir et de me dire, comme je le puis et dois avec toute la sincerité et toute la reconnoissance etc.

P. S. Ne continuerés vous pas, Monsieur de nous donner quelque chose de temps en temps du grand nombre des belles pensées que vous avés? Ne fait-on pas quelques découvertes en Hollande ou en Angleterre? Mr. Hudde ne songe-t-il plus aux sciences? Mr. Arnaud est-il en Hollande?

XVII.

Leibniz an Hugens.

Vous aurés receu la lettre que je me suis donné l'honneur de vous écrire, et ou je reponds touchant les lignes que vous me proposés à chercher par ma methode, et touchant la ligne de la corde pendante. Je n'ay pas encore mis au net une lettre plus longue, ou je mets mes pensées sur le mouvement des planetes. Cependant vous l'aurés aussi-tost que je pourray m'y attacher assez pour cet effect, et j'en espere alors vostre jugement. Cependant je crois que par ce peu que j'avois dit de la chaine pendante, vous jugerés si je me suis rencontré avec vous sans qu'il faille d'autre chifre, et j'en espere des nouvelles quand vostre commodité le permettra.

Il m'est venu dans l'esprit cependant, que l'equation que j'avois donnée pour vostre courbe, pourroit embarasser, n'estant pas aisé de juger, si elle peut satisfaire à vostre demande, puisqu'on n'a pas encor donné moyen de trouver les tangentes par des equations où l'exposant est inconnu. Et quoyque je n'aye pas encor communiqué à d'autres la methode dont je me sers pour cet effect, je ne laisse pas de vous en envoyer ici un echantillon par lequel vous la connoistrés assés.

Soit donc x l'abcisse et y l'ordonnée de la courbe, et l'equation, comme je vous ay dit, $\frac{x^3y}{h} = b^{2xy}$. Je designeray le logarithme de x par $\log . x$ et nous aurons $3 \log . x + \log . y - \log . h = 2xy$, supposant que le log. de l'unité soit o, et le $\log . b = 1$. Donc par la quadrature de l'hyperbole nous aurons $3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} - \log . h = 2xy$, dont l'equation differentielle sera $\frac{3\,dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2x\,dy + 2y\,dx$, ou bien $3y\,dx + x\,dy = 2x^2y\,dy + 2xy^2\,dx$, et par consequent dx sera à dy, ou bien DB à y (selon la figure de la lettre precedente) comme $2x^2y - x$ est à $3y - 2xy^2$, c'est à dire DB sera $\frac{2x^2y - xa^2}{3a^2 - 2xy}$ comme vous le demandiés, a estant l'unité.

Je croy, Monsieur, que vous trouverés ce calcul nouveau, et de consequence. L'analyse transcendante serait portée à sa perfection si on la pouvoit tousjours reduire à de telles equations.

Les equations differentielles sont un acheminement pour cet effect. J'ay beaucoup medité sur ce qu'il y a à faire la dessus, et si j'avois le loisir necessaire, ou si quelque jeune mathematicien intelligent estoit proche de moy pour m'assister, je croy qu'on pourroit avancer cette science bien au delà de l'estat où elle se trouve. Plût à Dieu, qu'on put avancer en physique en proportion.

Que jugés vous, Monsieur, de l'explication du flus et reflus de Mr. Newton? et vous paroist il raisonnable, que les queues des cometes soyent une matiere effective, poussée hors de la comete à des distances immenses et qui ne laisse pas de suivre son mouvement? Je les aurois plustost pris pour un effect optique.

Un Ecossois qui estoit en Hollande, nommé Mr. Stear, dit dans sa Physiologie, d'avoir experimenté que les corps poussés dans le vuide d'air ne vont pas fort loin; j'ay de la peine à le croire.

N'a-t on rien decouvert sur les loix de la variation de l'éguille aimantée? Je m'imagine, Monsieur, que vous aurés medité la dessus aussi bien que sur beaucoup d'autres matieres de Physique, et je vous supplie de me faire quelques fois part de vos lumieres, quand même ce ne seroient que des conjectures, puisque vos conjectures mêmes valent mieux que les demonstrations de bien des gens. C'est à cet effect, que je vous ay demandé vos sentimens dans cette lettre, aussi bien que dans la precedente, sur certains points, et j'espere que vous me connoissés assez, pour ne vous pas defier de ma sincerité.

Considerant ce que j'ay dit de la resistance du milieu dans les Actes de Leipzig, Fevrier 1689, vous trouverés, Monsieur, art. 5. n. 3, qu'encor chez moy (les élemens des temps estant pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés dissimulée) les resistences sont comme les quarrés des vistesses. Et par le n. 4. et 6. de cet article, il s'ensuit aussi que la somme $a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^3$ etc. se reduit à la quadrature de l'hyperbole. Dans l'ouvrage que j'avois composé autrefois sur la quadrature Arithmetique, je trouve cette proposition generale: Secior comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 \pm \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. posito t esse portionem tangentis in vertice, inter verticem et tangentem*) alterius extremi interceptam, et rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem + in hyperbola — in ellipse vel circulo —.

Quelqu'un m'a dit qu'on scait en Hollande la carte de l'Asie septentrionale, et si l'Amérique en est divisée par la mer. Si vous en scavés quelque chose, je vous supplie de m'en dire un mot. Voila à quoy vostre bonté et vostre scavoir vous exposent. Mais il est tousjours bon d'estre riche au hazard d'estre importuné par des pauvres. Je suis avec zele etc.

XVIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 18 Nov. 1690.

Je repons a deux de vos lettres, par la premiere des quelles j'ay esté bien aise d'apprendre que le pacquet où estoit mon Traité de la Lumiere s'est enfin trouvé, et je vois dans l'autre que vous avez commencé d'en examiner le contenu, à quoy je vous prie de continuer; vous assurant que je recevray avec joye non seulement vostre approbation mais aussi vos objections. Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une methode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur Tangentes, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence a croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe dans la quelle (Fig. 13.) AB estant x, et sa perpend. BC, y, on trouve BD

*) Hugens hat bemerkt: Secantem.

distance du concours de la tangente egale à $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$; cette courbe, dis-je, a pour equation qui exprime sa nature, $x^3 + xyy \propto aay$. Car par la regle des Tangentes BD se trouve premierement $\propto \frac{2xyy - aay}{yy + 3xx}$, et si pour xx on substitue sa valeur $\frac{aay}{x} - yy$, on aura $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$. J'ay fabriqué cette ligne en mettant AE $\propto$ a, EF perpendiculaire à BAE, et en faisant que dans la droite FAC, le quarré de AC soit egal au rectangle de AE, EF; car alors C est un point dans la courbe ACH, qui a son asymptote AG perpendic. à AB. Elle n'est donc point de ces Transcendantes comme votre Equation l'a faite. Et vous examinerez s'il vous plait, comment peut subsister la demonstration que vous en donnez dans vostre derniere. Pour moy j'avoue que la nature de ces lignes supertranscendantes, où les inconnues entrent dans l'Exposant, me paroit si obscure, que je ne serois pas d'avis de les introduire dans la geometrie, a moins que vons n'y remarquiez quelque notable utilité.

De ce que vous me mandez touchant vos speculations sur la ligne de la chaine pendante, qu'on peut appeller Catenaria, sçavoir que certaines choses donées, vous en determinez les Tangentes, la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe (vous ne dites pas de quelle ligne encore, car ces deux ne comprennent point d'espace) je croirois certainement que nous aurions trouvé les mesmes choses; car tout cela est dans le chifre que je vous ay envoiè; si ce n'estoit cette difference dans nos equations d'une courbe auxiliaire, où j'ay $xxyy \propto a^4 - aayy$, au lieu que vous avez $xxyy \propto a^4 + aayy$. Cela me paroit etrange, et s'il n'y a point d'abus dans vostre calcul, il faut que vous ayez suivi quelqu'autre chemin que moy, par le quel peut estre vous serez allé plus avant. C'est pourquoy je vous prie de m'envoier vostre chifre, ou les grandeurs soient determinées comme dans le mien, afin de voir si nous differons en quelque chose. Je trouve qu'au lieu de ma courbe, que je viens de marquer, je puis substituer cette autre $xxyy \propto 4a^4 - x^4$, mais non pas la vostre. Il y a une faute à mon chifre que vous aurez la bonté de corriger, en mettant $\frac{1}{6}$ec où j'avois escrit $\frac{2}{3}$ec.

Vostre meditation pour les Tangentes par les foiers me paroit bien profonde. Elle suppose pourtant des choses qui ne peuvent estre admises comme evidentes. Et quoy que des tels raisonnements puissent quelque fois servir à inventer, l'on a besoin en suite d'autres moiens pour des demonstrations plus certaines. J'eus quelque part à la Regle de Mr. Fatio par les centres de gravité, comme il l'a avoué luy mesme dans les Journaux. Mais ce fut luy qui me montra le premier la faute de Mr. D. T.

Pour ce qui est de la Cause du Reflus que donne Mr. Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres Theories qu'il bastit sur son principe d'attraction, qui me paroit absurde, ainsi que je l'ay desia temoigné dans l'Addition au Discours de la Pesanteur. Et je me suis souvent etonnè, comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce mesme principe. Je m'accommode beaucoup mieux de son Explication des Cometes et de leur queues; Et quoy que la chose ne soit pas sans cette grande difficulté, que vous remarquez fort bien, je ne trouve encore rien de meilleur que ce qu'il en dit, qui vaut mieux incomparablement que ce qu'en a imaginé desCartes. Mr. Stair a tort, s'il dit que les corps poussez dans le vuide ne vont guere loin. Où est ce qu'il en a fait l'experience? et que peut il dire a celle, que moy et d'autres ont faite, de la plume qui tombe dans un tuyau de verre vuide d'air, aussi viste que du plomb.

J'ay quelques meditations sur l'Aimant, mais la raison de la Variation de l'Eguille m'est inconnue; qui ne suit pas des loix certaines que je scache, quoy qu'il y en a qui en ont voulu etablir. Je trouve les effets de l'Ambre encore plus difficiles à expliquer que ceux de l'Aimant, principalement a l'egard de quelques nouveaux phenomenes, que j'ay trouvez, il n'y a guere, par mes experiences. J'ay regardé ce que vous avez donné dans les Acta de Leipzich en Jan. 1689 artic. 5. n. 3, où je ne puis pas dire que je trouve que vous ayez consideré des resistences du milieu qui soient comme les quarrez des vitesses; tout vostre raisonnement dans cette matiere m'estant obscur et inintelligible. Je vois au contraire qu'a la teste de cet artic. 5. vous supposez motum retardatum proportione velocitatis, et non pas duplicata proportione velocitatis. Aussi ces Elemens egaux des temps que vous croiez que Mr. Newton et moy avons dissimulez, n'ont rien à faire, à mon avis avec les resistances, puis qu'elles dependent uniquement de la vitesse des corps. Vous me pardonnerez aussi, si aux nombres 4 et 6 de ce mesme article je ne trouve rien d'où je puisse entrevoir la quadrature de l'hyperbole par la progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. puis qu'il n'y est pas dit un mot ni de progression ni d'hyperbole. Je vous assure que je n'ay pas pris cette progression de là, et que je n'ay point sceu non plus, que vous eussiez la Proposition generale, qui comprend le cercle et l'hyperbole, qu'apres l'avoir appris dans vostre derniere lettre. Vous deviez bien l'avoir publiée en suite de vostre premiere quadrature du cercle.

Ce qu'on vous a dit de la Carte de l'Asie Septentr. n'est pas sans fondement; Mr. Witsen Bourgem. d'Amsterdam estant sur le point de donner au public celle qu'il en faite avec bien de la peine et de la depense; à quoy mesme il se trouve pressé par ce qu'on dit qu'une autre personne en promet une pareille. J'ay vu il y a plus d'un an la Carte de Mr. Witsen, mais elle n'avoit rien de certain touchant la continuité de l'Asie et de l'Amerique. Je n'ay plus sujet de me plaindre de Mrs. de Leipsich, ayant vu le raport exact qu'ils ont donné de mon Traité de la Lumiere avec des Eloges plus grands que je ne merite.

Je m'etonne de ne recevoir aucune nouvelle de Mr. Spener, qui avoit promis qu'il m'escriroit. Il est vray qu'il doit estre bien occupé a tenir ce college du quel il m'a laissé un project imprimé. Je ne scay s'il vous a debité une Experience avec du Mercure attiré par un siphon, que je ne pus croire, et que j'ay aussi trouvé fausse, et Mr. de Volder de mesme. Pour ce qui est de mes estudes dont vous demandez des nouvelles, je tasche de mettre en estat de paroitre au jour divers traitez, où la forme manque plus que la matiere, mais je ne puis pas travailler avec assiduité sans incommoder ma santé. Je ne crois pas que nous devions rien attendre de Mr. Hudde, quoy que je ne laisse pas de l'en presser quand je le vois. Mr. Arnaut est en ce pais, ou fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse. J'attens vostre lettre pour le mouvement des Planetes et suis etc.

XIX.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{14}{24}$ de Novembre 1690.

Je reponds incontinent à la vostre du 18 de Novembre, afin que vous ne me soubçonniés pas d'une vanité ridicule, comme si j'avois cru, que ce que j'avois dit dans les Actes de Leipzig vous avoit servi pour vostre series $\frac{1}{1}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. Vous estes trop sincere pour dissimuler l'usage que vous faites des pensées des autres; et vous avés marqué en cela même que celles de Mr. Newton vous avoient servi. J'avois dit seulement qu'il y a de l'accord, et cela est ainsi, car je dis en termes expres art. 5. n. 3, *resistentias esse in ratione composita elementorum temporis et quadratorum velocitatum*. De sorte que les elemens du temps estant pris egaux, comme on les prend ordinairement, les resistences sont en raison doublée des vistesses; et cela s'ensuit de ce que j'avois dit, que les resistences sont en raison composée des vistesses et des elemens de l'espace. Car les elemens de l'espace sont en raison composée des elemens du temps et des velocités. En symboles, soit resistence r, vistesse v, temps t, espace s, leurs elemens, dr, dv, dt, ds, il est tousjours vray que les ds sont comme $dt.v$, et icy r est comme $ds.v$, donc r comme $dt.v^2$. Et quoyque les resistences dependent de la vistesse, comme vous dites, elles dependent aussi de la quantité des parties du milieu qui resiste. Un globe en mouvement rencontrant un globule en repos, la perte, qu'il fait de sa velocité (les grandeurs des globes et tout le reste demeurant, hormis la velocité) comme il est aisé de demonstrer. Mais plus il rencontre des globules, et plus grande est la perte; or le milieu estant uniforme, le nombre des globules sera comme les parties de l'espace. Mais afin que vous jugiés mieux de cet accord, je dis que j'ay precisement determiné le mesme rapport entre les temps et les velocités. Il est vray qu'il y a eu une trajection ou transposition dans l'edition, qui est de ma faute, mais j'estois en voyage et bien distrait. En voicy la correction: c'est qu'il faut mettre les espaces pour les temps et vice versa dans les propositions 4 et 6 de l'article 5, et apres avoir ainsi corrigé les propositions, il faut donner la demonstration de l'une à l'autre, et vice versa. De sorte voicy comme il falloit dire dans la prop. 4 en y mettant la prop. 6 corrigée: si velocitates acquisitae sunt ut sinus, erunt tempora impensa ut logarithmi sinuum complementi, posito radium seu sinum totum esse ut velocitatem maximam. Et à cela s'ajuste la demonstration qui est mise à la prop. 4, cum enim (j'en repete les paroles) incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc ex praecedenti statim sequitur impressionem (gravitatis) esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum, quae est proportionalis assumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit, qualem in propositione hac enuntiavimus. Ce sont mes paroles precises et pour vous faire voir qu'elles s'ajustent à la proposition ainsi corrigée et transposée, aussi bien qu'avec vos découvertes, appellons comme auparavant le temps t, les velocités v, la plus grande velocité a, les resistences r. Or il est manifeste que les elemens des velocités, c'est à dire les differences de deux velocités prochaines se trouvent en adjoutant à la velocité precedente la nouvelle impression faite par la gravité et en soustrayant en mesme temps la resistence ou perte causée par le milieu, donc dv (increment de la velocité precedente pour faire la suivante) est $dt - r$. Or $r = \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$, donc $dv = dt - dt\,\frac{v^2}{a^2}$ ou bien $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire, comme parle ma demonstration: impressio gravitatis (dt) est ad incrementum velocitatis (dv) ut quadratum velocitatis maximae (a^2) ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis ($a^2 - v^2$). Car dt expriment aussi bien les elemens des temps, que les impressions de la pesanteur, qui sont proportionelles à ces elemens. Par là vous voyés, Monsieur, que $t = \int \frac{dv \cdot a^2}{a^2 - v^2}$ ou, parlant à l'ordinaire, que le temps est la somme de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire selon vostre expression, que le temps est $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. Mais solon la mienne, les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$, c'est à dire les velocités v estant comme les sinus, les temps sont comme les logarithmes sinuum complementi. Et vous trouverés que ces deux expressions s'accordent. J'avois crû mieux faire en m'exprimant ainsi. — En échange la proposition 4 corrigée (les espaces estant mis pour les temps) doit estre mise à la place de la sixieme et alors la proposition sixieme veritable sonnera ainsi: si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sunt ut numeri, spatia quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, sunt ut logarithmi. Et alors la demonstration de la proposition 6 repondra à sa proposition. En symboles les espaces estant marqués de s et les elemens de ds comme auparavant, puisque $r = \frac{ds.v}{a}$ et $dt = \frac{a}{v}ds$, substituant ces valeurs dans l'equation susdite $dv = dt - r$, on aura $ds = \frac{dv.av}{a^2 - v^2}$ ou $s = \int \frac{dv.av}{a^2 - v^2}$. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette series $s = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ etc. mais j'ay crû mieux faire en disant, que les velocités estant v, les espaces sont comme les logarithmes des raisons de $a + v$ à $a - v$. Ainsi j'ay ces expressions exponentiales (que vous appellés en riant supertranscendentes) $\sqrt{(1 - v^2)}$ comme b^t et $\frac{1 - vv}{1 + v}$ comme b^s; b estant un certain nombre constant. Je ne voy pas pourquoy vous trouvés d'obscurité dans ces expressions, car il n'y en scauroit plus avoir que dans les logarithmes ordinaires qui ne vous scauroient donner aucune peine. Et puisque vous avés adjouté quelque limitation à vostre arrest contre ces sortes de formules, en les rejettant, à moins que je n'y aye remarqué quelque utilité notable, j'acheveray d'instruire le procès, afin que vous puissiés prononcer une sentence definitive. Je crois donc que dans les lignes qui passent les equations de l'Algebre ordinaire, c'est tout ce qu'on peut souhaiter à leur egard en Analyse, que de les exprimer par ces equations nouvelles. Si on le pouvoit toujours faire, on connoistroit par là parfaitement la nature de la ligne, on pourroit donner ses tangentes, ses quadratures, extensions, centres et même ses intersections avec une courbe donnée, et resoudre par ce moyen des problemes transcendans determinés, enfin, je ne voy rien de possible, qui resteroit à faire apres cela, et le tout ne supposeroit que la construction des logarithmes, outre les constructions de la geometrie ordinaire. On pourra encor determiner les cas quand certains points demandés se peuvent donner par la geometrie commune. Si ces raisons ne valent rien, je me suis bien trompé de mon calcul. Je croyois vous avoir communiqué quelque chose de fort bon et de grand usage. Et quand j'aurois fait une beveue dans le cas, que je vous ay envoyé, cela ne pourroit rien diminuer de la force de la methode. Par les expressions susdites je donne une equation qui exprime la relation entre l'espace et le temps, car il se trouve $\frac{1-b^e}{1+b^e} = \sqrt{(1-b^t)}$. De sorte que les temps estant donnés en nombres, les espaces se trouvent par là et vice versa; en supposant la construction des logarithmes, on aura bien de la peine à arriver icy, par une autre voye, à une équation finie.

Apres avoir examiné la courbe que vous assignés pour la proprieté des Tangentes, que vous m'aviés proposée, Monsieur, je trouve que vostre courbe semble y repondre, mais qu'elle n'y repond pas de la maniere que la formule est conçue; au lieu que les miennes y repondent. Et il s'y passe quelque chose de curieux à l'égard des signes. Je trouve donc que l'équation estant $x^3 + xy^2 = a^2y$, il provient $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, au lieu que vous m'aviés proposé $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$. Et afin qu'on ne pense pas que c'est la mesme chose, et qu'il faut parler de la façon posterieure, lorsque le point D doit estre pris ad partes oppositas, et non vers A, je reponds que suivant le calcul il est toujours vray, soit que CD se mene supra ou infra, c'est à dire vers A ou ad partes oppositas, que DB est $\frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$ dans votre courbe, puisque cette valeur s'obtient par un calcul general, et cela prouve seulement, que lorsque cette valeur est une grandeur negative D doit estre pris, non supra (vers A) mais infra B. Et afin que vous jugiés mieux de la fidelité de cette remarque, et que l'analyse ne scauroit mener à vostre courbe par la proprieté que vous aviez proposée, vous trouverés que les courbes, que j'avois envoyées, satisfont rigoureusement et uniquement à la valeur $(2x^2y + a^2x):(3a^2 - 2xy)$ et ne scauroient satisfaire à la valeur $(a^2x + 3x^2y):(3a^2 - 2xy)$; car jettant les yeux sur ma derniere lettre, vous trouverés cette équation $\frac{3\,dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2\,x\,dy + 2\,y\,dx$, dont je puis venir à bout. Car la somme de $2\,x\,dy + 2\,y\,dx$ est $2\,x\,y$. Mais si la valeur est $(a^2x - 2\,x\,y^2):(3\,a^2 - 2\,x\,y)$, vous trouverés $\frac{3\,dx}{x} - \frac{dy}{y} = -2\,x\,dy + 2\,y\,dx$. Mais la somme de $-2\,x\,dy + 2\,y\,dx$ ne se trouve pas de même, et il faut avoir recours à d'autres adresses, dont je ne m'estoit pas servi, parceque j'estois devenu fort aisément à ce que vous m'aviés demandé. Aprés tout cela, je m'imagine que vostre arrest provisionnel sera addouci, et comme vous devés juger en dernier ressort et sans appel, vous serés d'autant plus porté à faire droit aux parties.

Je suis bien aise, que Mrs. de Leipzig vous ont fait justice dans leurs Actes; mais en rapportant la seconde partie de vostre traité il y a une beveue dont je suis fasché. Celui qui a donné cette relation s'est imaginé que vostre quadrature de l'hyperbole par $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. estoit la même que celle que j'avois jointe à ma quadrature arithmetique du cercle, parceque je voyois une certaine analogie assez belle. Cependant la miénne est celle de Mercator, tirée de $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. et par consequent differente de la vostre. Je vous asseure que je n'ay aucune part à ce mesentendu et même je feray en sorte que cela soit remarqué et redressé.

Je voudrois pouvoir satisfaire à tous les autres points de vostre lettre, et sur tout examiner attentivement ce que j'ay fait sur la figure de la chaine, pour faire la comparaison avec vos decouvertes. Mais je suis à present enfoncé dans des vieux papiers et parchemins de nos archives et pressé pour les depecher. Ainsi il me faut prendre du temps pour cela. J'ay demonstration de la regle de la compositon des mouvemens, qui me sert de fondement à la decouverte des tangentes par les foyers. Je suis bien aise de scavoir que c'est vous dont Mr. Fatio entendoit parler, pour joindre cette obligation aux autres, qu'on vous a. — Mr. Spener ne m'a pas écrit non plus. J'espere qu'il sera plus exact en experiences qu'en correspondences. J'avois eu autrefois la vue d'essayer, si, par le moyen du vuide, on ne pourroit tirer quelque chose des corps, entre autres en y joignant des filtres, puisque se seroit une espece de presse, plus subtile et plus uniforme que l'ordinaire. Peut estre que Mr. Spener a pensé à quelque chose de semblable avec son siphon, qui doit attirer, mais si cela estoit, il ne devroit pas avoir manqué. Ainsi je ne scay pas bien ce que c'est.

Puisque vous avés fait des experiences de consequence avec l'ambre, je vous diray que feu Mr. Gericke en avoit fait de fort considerables avec des corps electriques. Il m'en ecrivit un jour et j'en chercheray le détail. Ce qui m'a fait croire que la variation de l'éguille a quelque regle (quoyqu'inconnue encor) c'est que j'ay vu des journaux des grands voyages, ou elle estoit tres souvent observée et ou elle ne changeoit pas par sauts mais peu à peu.

Comme ma lettre sur les planetes et autres points, que je vous destinois il y a longtemps, est quasi faite, je la finiray et la mettray au net, pour la vous envoyer aussitost que je seray un peu plus libre pour pourvoir vaquer à des pensées que je n'ay plus presentes dans l'esprit. Je vous remercie de ce que vous dites de Mrs. Hudde et Witsen. Quoyque je souhaite fort de voir vos pensées publiées, je prefere l'interest de vostre santé à celui de nostre utilité. Peut-estre pourriés vous donner souvent des pensées detachées qui seroient de consequence sans vous tant attacher à la forme des ouvrages reguliers. Je suis avec tout le zele que je dois, etc.

XX.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce 25 de Novembre v. s. 1690.

J'apprehende de vous importuner trop souvent et d'interromper vos pensées que j'estime pretieuses. Mais la raison qui me fait écrire maintenant, est que ma derniere, qui, comme j'espere vous aura esté rendue maintenant, a besoin de suite pour satisfaire entierement aux deux problemes que vous m'aviés proposés. Je crois qu'il n'ya plus rien à demander à l'égard de l'une des lignes proposées, où DB devoit estre $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, car en ce cas, prenant les signes au pied de la lettre comme vous les aviés exprimés, les lignes transcendantes, dont je vous ay envoyé l'equation, y satisfont parfaitement. Mais en cas qu'on veuille $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, la ligne que vous avés donnée vous meme y satisfait. Je viens à l'autre question, scavoir quelle ligne satisfait, DB devant estre $\frac{y^2}{2x} - 2x$, ou bien $2x - \frac{y^2}{2x}$, car j'ay voulu chercher l'un et l'autre, afin qu'il ne manque rien quelque interpretation que vous puissiés donner à vostre demande. Et il est à noter que les courbes encor icy sont toutes differentes selon qu'on change les signes, bienqu'il arrive icy qu'elles deviennent toutes deux ordinaires, au lieu qu'auparavant le changement des signes a fait venir une ordinaire pour une transcendante. Je dis donc que lorsqu'on demande $DB = \frac{y^2}{2x} - 2x$, comme vous l'aviés proposé, l'équation de la courbe est $6a^6x^2y^4 = a^6y^6 + x^{12}$, d'ou la dite valeur de DB viendra incontinent par le calcul ordinaire des tangentes. Mais lorsqu'on demande $DB = 2x - \frac{y^2}{2x}$, la courbe qui satisfait est assez differente de la precedente et son equation est $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, qui est moins élevée que l'autre de deux degrés. On peut varier la courbe en changeant la proportion de r à a. Ainsi j'espere maintenant de m'estre justifié un peu et que vous reconnoistrés, Monsieur, que j'ay eu quelque raison de m'attacher aux signes de la maniere que vous les aviés marqués vous meme. Car suivant l'Analyse toute pure (comme il est necessaire de faire quand on veut chercher des solutions par son moyen) les signes doivent estre gardés tels que le calcul les fournit, sauf par apres à celui qui fait la construction de mener la ligne CD comme il faut, selon que la valeur de DB est affirmative ou negative. Ces petits changemens sont quelquefois cause des beveues, surtout en des methodes, ou l'on ne s'exerce pas souvent, comme il m'est arrivé en vous escrivant ma derniere, ou le calcul que je vous ay envoyé touchant la relation entre les espaces et velocités, item entre les temps et les velocités, est bon; mais la consequence que j'en avois tirée n'est pas bonne entierement. Car les temps estant t, espaces s, velocités v, la plus grande velocité a, il est vray, comme j'ay marqué, que les temps sont comme les sommes de $\frac{aa}{a^2 - v^2}$ et les espaces comme les sommes de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$. Mais au lieu d'en tirer cette consequence que les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$ et les espaces comme les logarithmes de la raison de $a + v$ à $a - v$, je devois dire le contraire. Et peut-estre ne seriés vous pas faché, Monsieur, d'en voir la demonstration. Soit (fig. 14.) DCG l'hyperbole, dont le centre A, le vertex C, les asymptotes AB, AH; et BC costé du carré AC soit l'unité ou a, dont le logarithme o. L'on scait que l'espace ou parallelogramme hyperbolique (comme vous l'appellés) BG sera le logarithme de AF, mais $-$BE sera le logarithme de AD, ou bien BE sera le logarithme de DE ou de $\frac{1}{AD}$. Donc il est clair que BD ou BF estant v, alors BG ou le log. de $1 + v$ sera $\frac{1}{1}v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3$ etc., et BE ou le log. de $\frac{1}{1-v}$ sera $\frac{1}{1}v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4$ etc. donc BG + BE ou le log. de $\frac{1+v}{1-v}$, sera $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5$ etc. ce qui est le double de la somme de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$; mais BG $-$ BE ou le log. $(1 + v)$ par $(1 - v)$ c'est à dire le log. de $1 - v^2$ sera $-\frac{2}{2}v^2 - \frac{2}{4}v^4 - \frac{2}{6}v^6$ etc. Ou bien le log. de $\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)}}$ sera $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ etc. Ainsi $\sqrt{(1 - v^2)}$ estant en progression geometrique decroissante, $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ (c'est à dire la somme de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$) seront en progression arithmetique croissante. Cette methode servira en beaucoup d'autres rencontres; donc les velocités estant v, les temps seront les logarithmes de $\frac{1-v}{1+v}$, et les espaces seront les logarithmes de $\sqrt{(1 - v^2)}$. Ainsi ce que j'avois dit dans les Actes imprimés n'a pas besoin de la correction que j'avois crû. Et l'equation exponentiale que je vous avois envoyée pour la relation des espaces et temps aura lieu, pourveu qu'on y change s en t et vice versa.

Je m'imagine que vous jugerés maintenant que les equations exponentiales n'ont rien d'obscur. Elles n'introduisent point de nouvelles lignes comme il semble que vous l'aviés pris, mais elles expriment mieux celles dont on a besoin, et les expriment d'une maniere au delà de laquelle il n'y a rien à pretendre. Aussi quand j'ay dit que l'equation d'une certaine ligne est

$\frac{x^3 y}{b} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$, vous voyés bien maintenant que c'est comme si j'avois dit la nature de la ligne estre telle que x^3y estant en progression geometrique, $2xy$ ou meme xy sont en progression arithmetique. On peut proposer de semblables problemes en nombres, par exemple soit $x^x + x = 30$, alors on satisfera faisant $x = 3$. Et ces problemes ne se peuvent construire geometriquement que par les lignes dont je me sers, lorsque les racines ne sont pas rationelles. Et je croirois avoir perfectionné l'Analyse, si je pouvois toujours reduire les quantités transcendantes à un tel calcul. Et je seray bien aise de sçavoir ce qui vous en semblera maintenant que le proces est assés instruit pour que vous puissiés donner arrest.

Vous reconnoitrés peut-estre aussi que je n'ay pas eu tant de tort de dire que ma maniere de calculer sert pour les problemes des tangentes données. Quand j'avois vu que vos deux lignes proposées estoient in potestate, je m'estois contenté d'en calculer l'une qui venoit plus aisement, et j'attendois pour l'autre d'apprendre si elles pouvoient servir. Mais je voy que vous les aviés proposées tentandi gratia. Néantmoins j'ay esté bien aise de voir si je vous pourrois donner satisfaction depuis que j'ay vu que la premiere n'avoit pas trouvé une audience favorable. Cependant je ne me vante pas d'avoir poussé cette methode à sa perfection. Il s'agit sans doute de ce qu'il y a de plus profond et de plus difficile dans la Geometrie et dans l'Analyse. Mais je puis dire que je n'en suis pas fort éloigné et j'espererois d'en venir à bout si j'avois le loisir qu'il faut. Ce qu'il y a de beau entre autres, dans cette methode, est qu'elle mène directement à des transcendantes, comme elle doit aussi, puisque ordinairement on y doit venir dans des questions, à peu pres comme ordinairement les racines des equations sont sourdes. Mais lorsque les courbes ordinaires peuvent satisfaire, les transcendantes memes le monstrent. J'ay une autre maniere particuliere qui reussit toutes les fois que la courbe est ordinaire, mais je ne m'en sers pas volontiers à cause de sa prolixité; il faudrait faire des tables pour la rendre aisée. J'estime bien plus la generale mais je ne l'ay pas encore portée à sa perfection. Mais vous serés las de ces bagatelles. — Il est temps que je finisse en me disant comme je puis faire avec beaucoup de zele et de sincerité etc.

P. S. Je vous envoyeray tout ce que j'ay promis lorsque je seray un peu plus en estat de mediter à des choses que je n'ay plus presentes dans l'esprit.

XXI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 19. Decembre 1690.

A cause d'un voiage de quelques jours que j'ay esté obligé de faire à Amsterdam, pour avoir soin de l'embarquement de mes horloges à Pendule dans les vaisseaux qui vont aux Indes, je n'ay pu repondre plustost à deux lettres que j'ay eu l'honneur de recevoir de vostre part.

J'estime beaucoup vostre solution pour ma seconde ligne courbe, et si vous avez une methode qui reussisse tousjours, quand ce ne seroit que lorsque la courbe est ordinaire, vous augmenterez la Geometrie d'une invention fort considerable en la donnant au public. Mais j'ay tousjours de la peine à croire que la regle universelle se puisse trouver, sur tout quand les termes algebraiques de la construction donnée pour la Tangente sont beaucoup deguisez par la substitution des valeurs. Et il faudroit encore une epreuve où il eust plus de difficulté que dans ma dite courbe. Mais je ne veux pas vous en donner la peine, si vous ne le souhaitez vous mesme. Il me semble que dans cette courbe, par un calcul retrograde on peut connoistre l'Equation d'où les termes de la construction ont esté produits, et surtout cela n'est pas difficile dans ce cas ou vous avez trouvé l'Equation de 6 dimensions, sçavoir où la soutangente estoit donnée $\frac{yy}{2x} + 2x$. Je me sers icy de vostre correction pour les signes $+$ et $-$, et j'avoue que dans toutes les deux courbes je les devois avoir mis comme vous dites, parce qu'en suivant simplement l'operation de la Regle, les termes viennent de cette façon. Mais comme j'ay accoutumé de m'en servir avec des signes contraires au numerateur, en avertissant de quel costé la Tangente doit estre prise, cela a esté cause de ce renversement. J'ay autrefois escrit la demonstration et l'origine de cette Regle des Tangentes, et Mrs. de l'Academie de Paris ont fait imprimer ce petit traité depuis peu, avec quelques autres, tant de moy que de quelques uns d'entre eux. Il y a là aussi de moy une nouvelle demonstration, et tout a fait differente de celle d'Archimede, pour l'Equilibre de la Balance, laquelle je seray bien aise que vous voyez; celle d'Archimede m'ayant tousjours paru defectueuse, ainsi qu'à bien d'autres. Mais on ne peut rien avoir de ce qu'on imprime en France.

Pour ce qui est de vostre Courbe de 4 dimensions, dont l'Equation est $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$, ou qui est la mesme chose, $2aaxx \propto aayy + y^4$, elle satisfait parfaitement, je l'avoue, à ma soutangente donnée $-\frac{yy}{2x} + 2x$. Et pourtant ce n'est pas là l'Equation de ma courbe dont j'avois tiré ces termes; ce qui peut estre vous surprendra. Mon Equation estoit $2aaxx \propto aayy - y^4$, qui donne tout une autre courbe que la vostre. Il sembleroit d'abord qu'il y aurait une mesme construction de tangente pour deux courbes differentes; mais à y prendre bien garde, on voit que les constructions different aussi, parce que dans la vostre, la quantité $-yy + 4xx$ est tousjours affirmative, et que dans la mienne elle est tousjours negative. Vostre ligne a la figure d'une croix (fig. 15.) et la mienne celle de deux demi-ovales posées à certaine distance (fig. 16.). Celle-cy se peut quadrer, ce que je ne sçay s'il convient aussi à la vostre. Je voudrois bien essaier dans toutes deux ce que pourroit faire Mr. D. T. par la methode qu'il pretend d'avoir.

Touchant la courbe Exponentiale que vous avez trouvée pour ma premiere soutangente donnée $\frac{2axy - axx}{3aa - 2xy}$, je vous prie de me dire, si vous pouvez representer la forme de cette courbe en y marquant des points, ou par quelque maniere que ce soit, ou si elle vous sert seulement à pouvoir decider qu'il n'y a point de courbe ordinaire qui y convienne, ni de transcendante non Exponentiale, comme sont les cycloides, quadratices, etc.

J'ay dit que vostre equation $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$ ne differe pas de $2aaxx \propto aayy + y^4$. Et cela paroit par ce qu'elle se reduit à $\frac{2r^4xx}{aa} \propto \frac{r^4yy}{aa} + y^4$ et que $\frac{r^4}{aa}$ est une quantité donnée. Par consequent cette courbe ne se peut point varier, comme vous avez creu, en changeant la proportion de a à r; non plus que la parabole se varie en prenant le parametre plus ou moins grand. Par la mesme raison, vostre Equation de 6 dimensions $6a^6xxy^4 \propto a^6y^6 + r^{12}$ revient à $6xxy^4 \propto y^6 + a^6$, et la courbe est de mesme invariable.

Il y a plus d'un an que j'ay receu deux lettres de Mr. Fatio, dans lesquelles il propose une Regle renversée des Tangentes, mais comme elle paroissoit d'une longue discussion, et que d'ailleurs je ne pouvois croire qu'elle fust parfaite, j'ay esté jusqu'icy sans l'examiner: ce que j'ay maintenant envie de faire, mais je n'ay pas ces lettres dans cette ville.

Je ne scay pas pourquoy vous voulez que j'aye prononcé trop severement contre les courbes Exponentiales, puis que je n'ay pretendu les rejetter qu'en cas qu'elles ne soient de nulle utilité. Car si elles servent à exprimer d'autres courbes dont on a besoin, et si par leur moyen vous trouvez les espaces des chutes par un medium resistens, lorsque les temps sont donnez, et que de plus elles vous aident à trouver les courbes par la proprieté des tangentes, je les estimeray grandement, car je n'aime rien tant que les nouveautez qui tendent à l'accroissement des sciences. Il s'agit de scavoir s'il est bien seur qu'on en puisse tirer tous ces avantages; ce que voulant me prouver, vous supposez que j'entens parfaitement tout vostre calcul des Equations Exponentiales et Logarithmiques, ce qui n'est point; et ainsi vous instruisez le proces (pour demeurer dans les termes de vostre similitude) devant un juge qui n'entend pas bien vostre langue. Je n'ose pas aussi vous demander plus d'eclaircissement, voiant bien que cela seroit trop long pour des lettres. Je souhaiterois de vous pouvoir entretenir coram sur ces matieres, et je ne desespere pas qu'à cette occasion que les Princes d'Allemagne vont venir icy à l'arrivée du Roy d'Angleterre, Mr. le Duc de Hanovre ne s'y rende aussi, et vous, Monsieur, à la suite de Son Altesse, dont certainement j'aurois bien de la joye.

Les Acta de Leipsich ne nous vienent icy que de deux en deux mois; ainsi je n'ay pas encore vu ceux de Novembre, ou vous dites qu'on a fait une bevue à l'egard de ma progression pour la quadrature de l'Hyperbole. Cependant comme cela me fait tort, vous m'obligerez si vous pouvez faire en sorte qu'il soit redressé. Vostre excuse au reste est merveilleuse, quand vous m'assurez de n'avoir aucune part a ce mesentendu. J'adjoute icy à propos de cette quadrature, que je ne vois pas que vostre progression $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. responde à la miene, parce que vous ne vous servez pas, comme moy, de la tangente du secteur hyperbolique pour en faire y lorsque le demi-axe est 1. L'application que vous en faites aux chutes des corps est encore bien obscure, et vous devez l'avouer vous mesme, apres les corrections reiterées que vous avez apportées à ce raisonnement. Et quant aux resistences de l'air, s'il est vray que vous les ayez considerées comme estant en proportion double des vitesses, il faut au moins changer l'inscription de l'article 5 de vostre derniere, en mettant proportione quadratorum velocitatis.

J'ay le livre de Mr. Guericke où il raporte ses Experiences de l'Ambre. S'il vous en a communiqué encore d'autres, je seray bien aise d'y participer. Plusieurs des mienes ont esté faites en vue de certaines hypotheses que je me suis imaginées pour expliquer cette admirable attraction et ses divers phenomenes, mais je ne suis pas encor venu à bout de cette speculation. Je vous demande pardon de vous avoir derobé du temps par une si longue lettre et vous prie de croire que je suis etc.

XXII.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce 27 de Janvier v. s. 1691.

Je n'ay pas osé vous importuner trop souvent en écrivant lettre sur lettre; de plus j'étois fort accablé depuis ma derniere ayant esté deux fois à Wolfenbuttel et une fois à Hildesheim pour chercher des memoires historiques et ayant repondu à plus de 40 lettres dont la pluspart avoient esté differées et demandoient quelque attention. Il est vray qu'il y avoit un mot dans la vostre, qui m'avoit tenté de repondre sur le champ, mais j'ay cru qu'il ne falloit pas écrire pour cela seul. En effect j'ay esté le plus surpris du monde de vous voir capable d'un soubçon aussi mal fondé que l'estoit celui qui paroissoit, lorsque vous disiés trouver mon excuse merveilleuse. Mais il n'y avoit point d'excuse, Monsieur, et je ne pouvois pas en faire d'une chose ou je vous asseure encor de n'avoir eu aucune part. Les Msr. de Leipzig ont mis dans leur journal qu'ils ont dit de la 2. partie de vosstre ouvrage, où est l'endroit dont vous vous plaignés, avant que je l'eusse sçu ou vu, ou y contribué en aucune façon. J'avois même dessein de leur envoyer quelque petit discours pour estre mis à la suite de ce qu'ils en diroient et pour comparer ce que vous et Mr. Newton avés dit de la resistance du milieu, avec ce que j'en avois publié, et je suis asseuré que vous n'auriés pas eu sujet de vous en plaindre. Mais j'appris qu'ils avoient déja depeché vostre ouvrage, et je differay mon dessein à une autre occasion pour voir premierement ce qu'ils en avoient dit. Si je ne vous honnorois pas autant que je fais, je negligerois une accusation qui n'a pas le moindre fondement. Car je ne voy pas ce qui vous a pu mouvoir à ne pas adjouter foy à une chose de fait dont je vous avois asseuré. Mais vous estimant autant que je dois, je bien aise de vous desabuser. J'ay une lettre de Mr. Mencken, Professeur de Leipzig, qui a soin des Actes, datée du 28 d'Octobre vieux stile, lorsque leur mois de Novembre étoit déja imprimé (car il paroist le premier jour de mois) ou il me mande (sur ce que je lui avois écrit à l'occasion de vôtre lettre, ou vous vous étonniés de leur silence) que j'en trouverois une relation convenable dans les mois d'Octobre et de Novembre (von des Herrn Hugenii Buch werden sie in den October und November Actorum gebührende relation finden). Il adjoute que cette fois leur Novembre avoit esté achevé trois semaines plustost qu'a l'ordinaire. Si vous en desirés voir l'original, je le vous envoyeray. Peut-estre que la vue de ce mois vous aura déja detrompé, et vous aurés remarqué aisément que ce qu'on y dit du consentement de vostre series avec celle que j'avois donnée il y a plusieurs années, estant manifestement erronnée, ne pouvoit estre attendu de moy. Je feray temoigner le contraire comme je vous l'ay promis. Mais tout ce proces importe bien peu. Car vous ou moy n'avions qu'a voir l'equation de la courbe pour connoistre la series, et vous ne l'aviés reduit à l'Hyperbole que sur la demonstration de Mr. Newton, au lieu que je l'avois fait immediatement et avois preferé l'expression par les logarithmes. Mais je n'ay garde de m'imaginer que ce que j'en avois dit vous y ait servi. Je n'avois pas pensé pour cette fois à la tangente, ny eu recours à mon theoreme general marqué dans une de mes precedentes, n'ayant eu en vue qu'une expression degagée de toute consideration de la figure, que les logarithmes me fournissoient la plus analytique que je pouvois souhaiter. C'est pourquoy je ne comprends pas comment vous dites de ne pas voir que ma progression $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. réponde à la vôtre, parceque, dites vous, je ne me sers pas de la tangente et du secteur hyperbolique. Mais qu'ay je besoin de penser à cette tangente et à ce secteur? N'est ce pas assés que je donne moyen d'exprimer la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, c'est à dire d'exprimer la grandeur de la series $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. $= t$ par les logarithmes, disant que v estant les velocités, les temps t sont comme les logarithmes de $\frac{v+1}{v-1}$ et vous trouverés tousjours que $\int \frac{dv}{1-v^2}$ ou $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. repond au logarithme de $\frac{v+1}{v-1}$; c'est à dire les $\frac{v+1}{v-1}$ estant pris en progression geometrique, les grandeurs égales à $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. seront en progression arithmetique. C'est ce que j'avois dit art. 5. n. 4. Si rationes inter ($v+1$ et $v-1$) summam et differentiam velocitatis maximae (unitatis) et minoris assumtae (v) sunt ut numeri, tempora fore ut logarithmos. Or je suppose qu'on sçache que la construction des logarithmes revient à la quadrature de l'Hyperbole. Nous avions tous deux besoin pour un même dessein (c'est à dire pour donner la relation entre les temps et les velocités) de la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, l'abscisse estant v. Vous l'avés donnée par la series, j'ay cru mieux faire en la donnant par les logarithmes. Je croyois m'estre expliqué d'une maniere dans la derniere lettre plus à n'avoir plus laissé d'obscurité. Et pour ce qui est de la correction reiterée, ce n'est que la retraction de la correction, c'est à dire la restitution du premier estat. Car en refaisant le calcul pour vous satisfaire, un abus dans les signes me fit croire que j'avois fait un échange des temps pour les espaces dans les prop. 4. et 6. de l'art. 5; mais depuis j'ay vû qu'il n'y avoit rien à changer comme je vous ay déja mandé. Et lorsque vous dites, que s'il est vray que j'aye consideré les resistances de l'air comme en proportion doublée des velocités, il faudroit au moins changer l'inscription de l'article 5, en mettant in proportione quadrata velocitatis, je reponds que si vous aviés consideré ce que je vous avois écrit, vous auriés vû qu'il n'y a rien à changer, et je n'aurois pas besoin de repetition; mais j'avoue de n'avoir point de droit de vous demander de l'attention. Je dis encore une fois motum a medio retardari proportione velocitatis, c'est à dire comme je m'estoit expliqué dans le precedent article 4 (dont l'hypothese premiere est la même avec celle du present article 5) que les resistances sont en raison composée des elemens de l'espace ou milieu, et des velocités, et prenant les elemens du milieu pour égaux, ou considerant tout comme égal à l'egard du milieu, les resistences sont comme les velocités; car si vous divisés le milieu en parties égales tres petites et le considerés comme également parsemé de globules égaux, un grand globe allant là dedans perdra à chaque choc, (c'est à dire à chaque particule du milieu) un degré de vitesse proportionel à la velocité qui luy reste. Et cette consideration a priori m'avoit mené à mon hypothese. Ainsi considerant le milieu comme la base de la division égale (ce qui est le plus naturel) les resistences sont comme les velocités; mais considerant le temps comme la base, c'est à dire divisant le temps en parties égales, tres petites, les resistences ou velocités perdues, à chaque particule de temps, seront comme les quarrés des vistesses. Et la raison est, que les resistences estant en raison composée des elemens de l'espace et des velocités; et les elemens de l'espace estant encor en raison composée des elemens des temps et des velocités, les resistences sont en raison composée des elemens des temps et des quarrés de velocité, ce que je dis en termes expres sous la prop. 3. Et comme j'avois déja marqué toutes ces choses, je m'étonne de votre conditionelle: s'il est vray que j'aye consideré la proportion doublée; car dans mes precedentes, j'avois expliqué à fonds comment elle avoit lieu, et j'avois rendu raison de mon expression. A parler exactement on ne doit pas dire que les resistences sont en raison de velocité ny en raison des quarrés des velocités, si ce n'est qu'on adjoute le temps ou le milieu, comme j'ay fait. Enfin on peut examiner à toute rigueur cet article 5, on n'y trouvera rien à dire; il y a seulement une faute à corriger. C'est que l'enontiation de la prop. 3 est toute gâtée; je ne sçay par quelle megarde; mais cette beveue n'a point d'influence sur tout le reste. Il falloit dire: resistentia est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae; ou bien je pouvois dire quelque chose de semblable à cecy: impressio nova (seu accessio velocitatis), resistentia (seu diminutio velocitatis), et incrementum velocitatis (quod est differentia impressionis et resistentiae) sunt inter se ut quadratum velocitatis maximae, quadratum velocitatis acquisitae, et excessus quadrati maximae super quadratum acquisitae. La preuve de la proposition 3 infère cecy et les preuves des propositions 4 et 6 le supposent; et je ne sçay pas d'où est venu ce quiproquo. Mais je laisse enfin ce point, sur lequel la seule consideration que j'ay pour vous m'a rendu si prolixe, afin de tacher de vous satisfaire s'il est possible; mais aussi je ne crois pas d'en pouvoir ou devoir dire davantage. Vous avés raison, Monsieur, de dire que les courbes que j'avois données pour vostre probleme sont invariables, et je n'avois pas pris garde que $\frac{n^2}{a}$ fait une seule quantité determinée. Mon calcul m'avoit pû mener aussi bien à $2a^2x^2 = a^2y^2 - y^4$ qu'à $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$, mais ayant la solution qui s'estoit offerte, je n'y avois plus pensé. Vous dites que la premiere se peut quadrer et vous doutés si la seconde se pourroit quadrer aussi. Je réponds qu'effectivement il est aussi aisé de quadrer la premiere, que de donner un plan egal à la surface décrite par un arc de cercle tourné à l'entour du diametre; mais la seconde depend de la quadrature de l'Hyperbole. Je ne vous ay pas donné la solution de vos problemes, comme une marque de la perfection de ma methode, mais comme une marque de son utilité. Je crois même de vous avoir deja dit que pour les resoudre, je ne me suis pas servi de la methode qui peut toujours reussir pour toutes les lignes ordinaires, car elle est fort prolixe, mais d'une autre, qui est bien plus courte, et bien plus directe et commune aux trancendantes et ordinaires, mais je ne l'ay pas encor mise en perfection pour la pouvoir toujours conduire jusqu'au bout parcequ'il y a encor des choses à découvrir pour applanir des difficultés qui se trouvent dans son chemin. Je n'ay garde de souhaiter qu'on me propose des problemes, dont la solution ne serve qu'à faire croire que je les puisse resoudre. Notre temps est trop pretieux, je suis trop distrait ailleurs pour le present, et la methode pour les lignes ordinaires que je crois suffisante est trop prolixe; il faudroit dresser des tables pour l'abreger; mais je n'en ay pas le loisir.

Pour ce qui est des expressions exponentiales, je les tiens pour les plus parfaites de toutes les manieres d'exprimer les transcendantes. Car les exponentiales donnent une equation finie, ou il n'entre que des grandeurs ordinaires quoyque mises dans l'exposant, au lieu que les series donnent des equations infinies; et les equations differentiales, quoyque finies, employent des grandeurs extraordinaires scavoir les differences infiniment petites. Et tout ce que je souhaite pour la perfection de la Geometrie, c'est de pouvoir reduire les autres expressions transcendantes aux exponentiales. Je ne divise donc pas les courbes transcendantes en exponentiales et non-exponentiales (comme il semble que vous l'avés pris) mais leurs expressions. Car une meme courbe peut recevoir les trois expressions, que je viens de dire. Par exemple la courbe susdite [qui exprime la relation entre les temps et les vistesses imprimées par la pesanteur (qui sont proportionelles au temps) et entre les vistesses absolues, qui en restent à cause de la resistence du milieu] c'est à dire la courbe dont les abscisses sont v et les ordonnées t se peut exprimer serialement par $t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. et differentialement par $t = \int \frac{dv}{1 - v^2}$, et enfin exponentialement par $b^t = \frac{1 + v}{1 - v}$; ce qui veut dire que $\frac{1 + v}{1 - v}$ estant comme les nombres, t sont comme les logarithmes; b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0.

Vous faites une demande, Monsieur, à laquelle il est juste que je satisfasse, scavoir si les expressions exponentiales servent à donner quelque description de la courbe et à la marquer en quelque façon par points; ou si je m'en sers seulement à decider que la courbe est transcendante. Je reponds que les expressions exponentiales servent à trouver autant de points qu'on voudra d'une telle courbe, tout comme dans les helices et dans la quadratrice, au lieu que les autres expressions ordinairement ne donnent pas des points veritables, mais seulement des points approchans; outres qu'elles ne sont pas si maniables par le calcul. Mais il sera bon d'expliquer dans un exemple la maniere de construire ou de marquer des points de la courbe susdite. Soit (fig. 17.) AC = AB = 1 representant la plus grande velocité, et BD, droite prise à discretion, soit b. Supposons AC, BD paralleles et cherchant entre elles des moyennes proportionelles RF, GH, etc. decrivons la courbe des logarithmes CFHDP. Je dis donc que prenant un point quelconque de cette courbe comme P, et en menant à l'axe AB une ordonnée PT, alors le logarithme ou l'abscisse AT sera t, et le nombre ou l'ordonnée TP sera $\frac{1+v}{1-v}$ que nous appellerons e. Or e estant assignée, il ne reste que de trouver v, ce qui est aisé, car il y aura $v = \frac{e-1}{e+1}$, c'est à dire dans la droite TP prolongée prenant TK, TQ egales à AC, et erigeant QS normale à QP et egale à AC, et joignant PS qui coupera CK (parallele à AB) en R, et enfin dans TP prenant TV egale à KR, il est manifeste que TV sera v, AT estant t; c'est à dire AT estant comme les temps, TV seront comme les velocités, et la ligne AVV asymptote à CK sera la courbe demandée. Il n'est gueres plus difficile de construire les courbes exponentialement exprimées, qui satisfont à une de vos soutangentes, et je m'imagine qu'a present vous serés plus content de ces sortes d'expressions.

Je seray bien aise de sçavoir si la regle renversée des tangentes de Mr. Facio contenuë dans les lettres que vous dites avoir receues de luy vous donne quelque contentement, et en quelle sorte de cas vous la trouvés la plus practicable, afin que je puisse juger si elle a quelque rapport à mes meditations.

Feu Mr. Gericke m'envoya ses experiences sur un globe de matiere electrique, lorsque son livre n'estoit pas encor imprimé, car je luy avois procuré un privilege de l'Empereur pour ce livre par mes amis. Mais je m'imagine que la substance de ces experiences sera dans ce livre, et comme la lettre a esté écrite il y a bien du temps, il ne me seroit pas aisé maintenant de la trouver parmy mes vieux papiers. Je seray ravi d'apprendre un jour quelque chose de vos experiences electriques.

Pour ce qui est de l'aimant, il est vray que nous ne sçavons pas la regle de declinaisons. Je crois neantmoins qu'elles sont reglées avec leurs changemens, et ne dependent pas des causes accidentaires et non liées comme seroient les fibres du globe de la terre suivant ce que Gilbert et Descartes ont cru. Si elles sont reglées et tant que nous ne sçavons pas comment et pourquoy, c'est une marque que nous n'avons pas encor la vraye hypothese.

Je seray bien aise de voir un jour ce qu'on a imprimé en France de la part de l'Academie Royale, sur tout ce qu'il y a de vous. Je me souviens d'avoir aussi remarqué autres fois des voyes de demonstrer la regle de l'equilibre differentes de celle d'Archimede. Mr. Römer me parla aussi d'une sienne et un Professeur de Jena nommé Weigelius en a aussi donné. Mais j'ay sur tout envie de voir un jour vôtre maniere, sçachant que vous avés coustume de donner quelque chose d'elegant.

J'ay honte de vous parler encore d'une lettre que je vous destine il y a longtemps touchant le systeme des planetes, et qui est demeurée imparfaite par des interruptions, sans que j'aye encor pû la finir. Cependant je m'y mettray au plustost, et il faut bien aussi que je mette en ordre mes pensées sur la courbe de la chaine pour les confronter avec les vostres. Les occupations journalieres entierement éloignées de ces choses, font que j'ay bien de la peine à reprendre le fil d'un travail interrompu, quand les idées ne me sont plus recentes.

Je souhaitte beaucoup l'honneur de vous voir; mais quand S. A. S. Monseigneur le Duc d'Hanover iroit encor à la Haye, il n'y a pas d'apparence qui je le pourrois accompagner, mon employ n'estant pas de suivre la Cour, mais de travailler à des choses dont je suis chargé. Si Dieu me donne la grace de depecher le travail qui m'occupe à present et qui est de longue haleine, je serai plus libre. Je prie Dieu de vous conserver, dont j'espere de profiter avec le public et je suis avec passion etc.

P. S. Quant à la ligne de la chaine pendante donnant une oeillade à mon calcul, je m'apperçois que pour la relation entre deux points de la chaine situés dans le même horison et entre la partie de la chaine pendante dessous, je me puis servir d'une ligne dont l'equation est de la forme de celle que vous aviés marquée $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$. Mais une autre dont je vous avois parlé et dont la forme est $x^2 y^2 = a^4 + a^2 y^2$ ne laisse pas d'avoir aussi son usage dans ce probleme.

XXIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye 23. Fevrier 1691.

J'ay vu avec bien du déplaisir dans vostre dernière lettre que vous avez entendu tout autrement et au contraire de mon intention ce que je vous avois escrit, que vostre excuse estoit merveilleuse. Car j'ay voulu dire par là que cette excuse estoit tout à fait superflue, et que j'estois fort eloigné d'avoir aucun soupçon, que vous eussiez contribué à ce qu'on avoit mis abusivement dans les Actes de Leipsich à mon prejudice. C'est la pure verité, et il me semble que par toute sorte de raison vous deviez l'avoir pris de cette manière. Je n'ay pas encore pu avoir ces Actes des mois de Novembre et Decembre de l'année dernière, de sorte que je ne sçay si la faute aura esté reparée. Cependant j'ay fort bien compris depuis ma derniere comment ma series pour l'Hyperbole se rapporte à celle de vos logarithmes, et j'ay aussi trouvé que j'aurois pu apprendre cette series du livre de Mr. Wallis qu'il a escrit de l'Algebre en Anglois p. 329, où il range la progression de Mercator et la siene l'une au dessus de l'autre conjointement, qui estant adjoutées ensemble font le double de la progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc., de mesme que vous le faites voir dans vostre lettre du 25. Nov. Je m'etonne que Mr. Wallis n'ait pas remarqué cela, ni combien cette progression doublée est plus utile, pour la quadrature de l'Hyperbole et pour trouver les Logarithmes, que n'est la siene ni celle de Mercator, car le calcul en devient plus court de la moitié.

Depuis quinze jours j'ay revu, non sans peine les brouillons que j'avois touchant les mouvements à travers un milieu qui fait resistence, sçavoir dans la vraie hypothese, et j'ay fait quelques calculs en suite, pour voir comment ils s'accorderoient avec les vostres. Je trouvé qu'une partie de nostre dispute vient de ce que vous prenez le mot de resistence dans une autre signification que moy et Mr. Newton, car vous appellez resistence la velocité perdue ou la perte de velocité causée par le milieu, et en consequence de cela, pour comparer des resistences differentes, vous voulez que la consideration des elemens du temps entre en compte, et qu'à parler exactement on ne doit pas dire que les resistences sont en raison des velocitez, ni en raison des quarrez des velocitez. En quoy il est evident que vous prenez l'effect de la resistence pour la resistence mesme. Mais à Mr. Newton et à moy la resistence est la pression du milieu contre la surface d'un corps; comme par exemple, quand on tient dans la main une feuille de carton, et qu'on l'agite à travers l'air, on sent une pression qui se peut comparer à celle d'un poids, et qui devient quatre fois plus grande lorsqu'on remue cette feuille deux fois plus viste qu'auparavant, ainsi que j'ay trouvé autre fois à Paris par des experiences fort exactes. Vous voiez, Monsieur, qu'il n'y a que la differente vitesse dont depend cette pression, sans considerer des parties egales ni inegales du temps. Et c'est sans doute la veritable et la plus naturelle notion de la resistence.

Je comprens bien pourtant comment, suivant la vostre, vous voulez conserver l'inscription de vostre article 5, mais c'est comme j'ay dit en prenant l'effet pour la cause; et toute l'obscurité de vostre discours vient principalement d'icy; laquelle, à ce que je crois, est cause que personne ne l'a assez examiné pour comprendre ce qu'il y a de vray, ni pour remarquer les abus que vous y corrigez maintenant vous mesme. J'avois fait la mesme correction mot à mot dans la prop. 3. art. 5, que vous m'envoiez dans vostre derniere lettre. A la prop. 6. du mesme article les espaces parcourus, qui à moy sont comme les logarithmes de $\frac{aa}{aa-vv}$, selon vous sont comme les logarithmes de $\sqrt{aa-vv}$, (il falloit $\frac{\sqrt{aa-vv}}{aa}$) ou de $\sqrt{1-vv}$: ce qui revient pourtant à la mesme chose (si non que vos logarithmes deviennent negatifs), car les logarithmes des racines ont entre eux la mesme raison que ceux de leurs quarrez. Vous aviez de mesme des logarithmes negatifs, en disant que les temps sont comme les logarithmes de $\frac{1-v}{1+v}$, mais dans vostre derniere vous l'avez redressé en mettant $\frac{1+v}{1-v}$. Je m'apperçois assez, Monsieur, en tout cela, qu'il ne vous manque ni habilité ni science pour demesler toute cette matiere, et d'autres plus difficiles, mais que seulement vous n'avez pas assez de loisir pour adjouter plus d'exactitude et de clarté aux choses que vous avez trouvées. Je ne sçay pas pourquoy dans tout ce discours de la Resistence vous n'avez rien voulu determiner des choses qui sont comme le fruit de cette recherche et qu'on peut souhaiter de sçavoir, comme si quaeratur tempus descensus liberi ad tempus descensus impediti donec data celeritas obtineatur, hoc est, quae ad celeritatem terminalem datam rationem habeat; aut si quaeratur ratio spatiorum sic peractorum; item quae sit ratio temporis ascensus ad tempus descensus, cum corpus recta sursum projicitur celeritate terminali. Je souhaiterois de voir comment vos calculs s'accordent aux miens dans ces problemes, et en les comparant ensemble nous pourrions estre assurez tous deux d'avoir raisonné juste. Le Traité de Mr. Newton en cecy n'est pas sans faute. Dans l'art. 6 prop. 4. vous faites la ligne du jet bien plus facile à trouver qu'elle n'est en effet, sur quoy je vous prie d'examiner la remarque que j'ay faite dans l'Addition à mon discours de la Pesanteur.

J'ay consideré vostre construction de la Courbe Exponentiale qui est fort bonne. Toutefois je ne vois pas encore que cette expression $b^{\frac{t}{a}} = \frac{1+v}{1-v}$ soit d'un grand secours pour cela. Il y a longtemps que je connois cette mesme courbe, aussi bien que sa compagne, qui sert aux jets montants, et je la construis par la ligne logarithmique en supposant les velocitez données, au lieu que vous supposez les temps.

Quoyque cette lettre soit desja bien longue, il faut que je vous responde à ce que vous souhaitez de sçavoir touchant la methode renversée des Tangentes de Mr. Fatio. Vous sçaurez donc que l'autheur est depuis quelque temps en cette ville, et qu'il me fait souvent l'honneur de me voir. J'avois examiné sa lettre dont je vous ay parlé, où la dite methode estoit amenée jusqu'à un certain point, mais depuis qu'il est icy, il l'a beaucoup perfectionée, et m'a trouvé les deux mesmes courbes dont je vous avois proposé les soutangentes, des quelles la 2. a plus de difficulté. Ses calculs ne sont pas longs, ni n'ont besoin d'aucunes tables; mais il ne sçauroit resoudre jusqu'icy les cas où il entre des racines qui contienent des inconnues et plus d'un terme; par exemple, si la soutangente est donnée $\frac{yy\sqrt{aa - xx}}{ax}$, x estant l'abscisse, y l'appliquée à angles droits, et a une ligne connue. Si vostre methode ne s'arreste pas à ces racines, vous avez quelque chose de plus que Mr. Fatio, quoyqu'il ait desia surpassé mon attente. Peut estre c'est pour ces racines que les Tables, dont vous parlez, sont necessaires dans la methode que vous dites reussir tousjours.

Cette quadrature de la $\frac{1}{16}$ de mes courbes, que vous dites estre aisée, marque aussi quelque connoissance extraordinaire. Vous me ferez plaisir de la determiner, à fin que Mr. Fatio se puisse assurer que vous l'avez trouvée, à quoy il m'a avoué ne pouvoit reüssir. La figure, au reste, de cette courbe ne consiste pas dans les seules deux demiovales, comme je vous avois marqué, mais elles sont jointes par une croix, et le tout ressemble à un 8, ce qui se connoit facilement par l'equation. Quant à la courbe exponentiale que vous trouvastes au lieu de cette ligne, lorsque les signes + et + estoient renversez, Mr. Fatio assure, et m'a demonstré en quelque façon, que cette Exponentiale est impossible, par où vous voiez que vostre demonstration pour prouver qu'elle satisfait à la soutangente donnée, ne nous est pas claire.

Vous m'obligerez, Monsieur, d'achever ce que vous avez trouvé sur la chaine pendante, afin que nous nous communiquions nos meditations. Je crois qu'il y aura bien d'autres geometres qui resoudront ce probleme, car à dire vray, il ne me paroit pas bien difficile, si ce n'est que vous en demandiez quelque chose de plus que ce que j'en ay trouvé.*)

Ce n'est pas sans regret que je perds l'esperance de vous voir icy, et je n'aurois pas esté si longtemps sans vous escrire si je ne vous avois toujours attendu. Je suis etc.

*) In der Sammlung Uylenbroek's kommt nach diesen Worten Folgendes, das in dem Briefe von Hugens, wie er ihn an Leibniz übersandte, fehlt: Mr. Spener m'a dit que, pour faire reussir la boule de souphre de Mr. Guericke, il faut adjouter pour chaque livre 16 grains salis tartari fixi; peut estre l'autheur vous aura donné la mesme recepte. — Il me dit aussi qu'il pouvoit oster au fer l'attraction vers l'aimant, mais je ne m'y fie pas trop depuis que j'ay trouvé fausse une experience avec le vif argent, qu'il debitoit comme tres certaine.

Ce n'est pas sans regret etc.

XXIV.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce $\frac{20}{30}$ de Fevrier 1691.

Je suis ravi de m'estre trompé en vous attribuant un soubçon, dont, malgré vos paroles, je ne vous devois pas juger capable. La faute de la relation de Leipzig n'aura pas encor esté redressé, mais ce sera fait au plustost, car il y a quelque temps que je n'y ay pas écrit. J'avois crû de pouvoir estimer la resistence par son effect prochain, c'est à dire par la diminution de la vistesse du corps qui la sent, et je m'estois assez expliqué la dessus dans tout mon discours, mais j'advoue qu'il demande de l'attention. Je ne sçay si vous aurés examiné ce que je dis de la resistence absolue, comme il s'en trouve dans le frottement. Il est très vray, comme vous avés remarqué, Monsieur, que dans un jet libre par un milieu resistent, la simple composition des deux mouvemens ne peut avoir lieu et pour que mon article 6 puisse trouver place, il faut une hypothese particuliere.

Ce que j'ay vu de Mr. Fatio me le fait estimer et j'attends beaucoup de sa penetration. Je suis bien aise d'entendre qu'il est à la Haye, et je luy envierois ce bonheur, dont il ne m'est pas permis de jouir, si je ne considerois, qu'il profitera beaucoup en vous voyant quelques fois, et qu'il en sera d'autant plus en estat de rendre service au public. Il n'a pas mal choisi en se mettant à chercher les courbes dont les tangentes sont d'une nature connue, c'est presque ce qu'il y a de plus difficile et de plus important en Geometrie; je contribuerois volontiers à l'aider si je puis dans cette recherche, s'il en croyoit avoir besoin. Comme il a aussi trouvé vos courbes, je m'imagine qu'il aura pris quelque biais, qui serve à abreger; comme en effect je puis fabriquer plusiers canons particuliers pour retrancher le calcul. Pour ce qui est d'une courbe dont la soutangente soit $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, j'ay trouvé qu'il y en a plusieurs, qui y peuvent satisfaire, mais les plus simples sont comme je croy celles dont les equations sont $aaxx = a^4 - y^4$, ou bien $4aaxx = 4aayy - y^4$. Le calcul fera connoistre que tant l'une que l'autre reussit. Si Mr. Fatio trouve bon de me communiquer sa methode pour vos deux lignes, je luy communiqueray la mienne pour ces deux d'à present où il a trouvé de la difficulté. J'avois cru que l'aire de la courbe dont l'equation est $2aaxx = aayy + y^4$ dépendoit de la quadrature de l'hyperbole, mais ayant revu mon calcul, je trouve qu'elle est quadrable absolument aussi bien que l'autre, dont l'equation est $2aaxx = aayy - y^4$. Et comme vous me demandés la determination de l'aire de la derniere, afin que Mr. Fatio se puisse asseurer que je l'ay trouvée, de quoy il avoit douté, parce qu'il n'y avoit pas reussi luy même, je vous donneray les aires des parties quelconques de toutes deux. Soit (fig. 18.) AC, a et AD, y, et DH, x, et $aaxx = aayy - y^4$, et soit $\sqrt{aa - yy} = z$, je dis que ADHA est $\frac{a^3 - z^3}{3a}$, et par consequent ACHA estant $\frac{a^3}{3a}$, CHDC sera $\frac{z^3}{3a}$. Caeteris iisdem positis, soit $aaxx = aayy + y^4$ et soit $\sqrt{aa + yy} = z$, je dis que (fig. 19.) CDHC est $\frac{z^3}{3a}$, comme auparavant, si au lieu de $aaxx$ on met $2aaxx$ comme vous le demandés, on n'a qu'à écrire $3a\sqrt{2}$ au lieu de $3a$.

Puisque la premiere achevée retourne en elle même, en forme de 8, on en peut juger que le theoreme de Mr. Newton p. 105. qui pretend, qu'il n'y a point de courbe recourrante (de la Geometrie ordinaire) indefiniment quadrable, ne sçauroit subsister, et qu'il y a quelque faute dans sa demonstration. Mais je ne l'en estime pas moins; opere in longo fas est obrepere somnum. Mr. Bernoulli a aussi trouvé enfin la ligne de la chaine. Je croy que la connoissance de mon calcul l'aura un peu aidé, car quoyque ce probleme ne soit pas de plus difficiles, je m'imagine qu'il n'est pas trop aisé d'y reussir sans avoir quelque chose d'equivalent à ce calcul. Je n'ay pas vu sa solution, je ne laisse pas de croire qu'il a donné dans le but. Mons. Tschirnhaus n'y a pas mordu, quoyque j'aye parlé expres d'une maniere à l'y engager, pour luy donner occasion d'exercer sa methode, dont il nous promettoit tant, jusqu'à me reprendre obliquement, de ce que j'avois dit que l'Analyse ordinaire ne suffit pas dans ces rencontres. Je croy que Mr. Fatio est allé trop viste en pretendant que mon exponentiale est impossible. Je verray un de ces jours, si je vous en pourray donner la construction. On ne donnera la solution de Mr. Bernoulli que quand j'auray envoyé la mienne; et si vous le trouvés à propos nous y joindrons la vostre, mais j'espere de la voir prealablement et de vous faire juger de la mienne.

Je voudrois bien scavoir ce que vous jugés des variations de l'eguille aimantée et des causes de l'inclination, et s'il est bien seur, que dans des lieux qui ne sont pas éloignés l'un de l'autre, il se trouve une grande difference entre les declinaisons. — Je suis disposé à croire que cela n'est point. Mais l'experience en doit juger souverainement. Je desire aussi de scavoir vostre sentiment sur la cause du flus et reflus de Mr. Descartes. Je me souviens que vous avés traité autres fois de la cause des paretlies. J'espere que vous en mettrés la demonstration dans vostre dioptrique, et que vous nous donnerés, après tant de delais cet ouvrage si desiré. Mr. Newton n'a pas traité des loix du ressort; il me semble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les aviés examinées, et que vous aviés demonstré l'isochronisme des vibrations.

N'y a-t-il personne à present qui medite en philosophe sur la medecine? Feu Mr. Crane y estoit propre, mais Messieurs les Cartesiens sont trop prevenus de leur hypotheses. J'aime mieux un Leeuwenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartesien qui me dit ce qu'il pense. Il est pourtant necessaire de joindre le raisonnement aux observations. Mais je finis en me qualifiant avec beaucoup de zele etc.

XXV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye 26 Marz 1691.

J'ay esté indisposé pendant plus de 3 semaines, et sur la fin j'ay esté aussi attaqué de la goute dont je ressens encore un reste, et cela pour la premiere fois de ma vie. Sans cet accident j'aurois respondu plustost à la derniere que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire. J'y ay vu avec beaucoup de satisfaction que vous avez si bien sceu trouver la ligne courbe, dont l'équation est $4aaxx \propto 4aayy - y^4$ pour la soutangente $yy \frac{\sqrt{aa-xx}}{ax}$. Mais j'ay de la peine à croire ce que vous dites, qu'il y a plusieurs autres courbes qui y satisfont, et j'oserois presque assurer que cela est impossible; du moins celle que vous apportez $aaxx \propto a^4 - y^4$, ne donne pas cette mesme soutangente, mais $-\frac{2yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$, qui est double de l'autre, et qui doit estre prise au delà de x, à cause du signe negatif.

J'ay proposé vostre offre à Mr. Fatio touchant l'échange de vostre methode dans cette recherche, contre la siene dont il s'est servi à trouver mes deux autres courbes par leur soutangentes; mais je vois qu'il ne desespere pas de surmonter la difficulté des Racines, et qu'il ne peut pas se resoudre à vous envoier un traité assez long qu'il a sur cette matiere. Il avoue au reste qu'elle est d'une estude penible et infinie, et il est seur, dit il, qu'on ne sçauroit venir à bout de tous les divers deguisemens possibles des soutangentes, ce que j'ay aussi tousjours creu. Je ne laisse pas de l'exhorter de donner ce qu'il en a trouvé, et je souhaiterois, Monsieur, que vous en voulussiez faire de mesme, parceque le Probleme est de grande utilité, quand bien il ne seroit pas generalement resolu. Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, sçavoir $2aaxx \propto aayy - y^4$; où j'admire certes vostre adresse, et l'excellence de vostre regle, quoyque limitée aussi bien que l'autre, comme je crois.

Il m'a falu un assez long calcul pour voir si vostre quadrature se rapportoit à la miene. Vostre figure AHC*) est le quart du 8 que forme cette courbe. Et comme en posant (fig. 20.) $AC \propto a$, $AG \propto x$, $GH \propto y$; $\sqrt{aa-yy} \propto z$, vous trouvez l'espace $AHKCA \propto \frac{a^3}{3a\sqrt{2}}$ et l'espace $AHD \propto \frac{a^3 - z^3}{3a\sqrt{2}}$, et par consequent $DHKEC \propto \frac{z^3}{3a\sqrt{2}}$, il s'ensuit que l'espace AKCA est à DHKEC comme le cube de AC au cube de EG, car cette EG est z; Et que le mesme espace AKCA est à CEF, comme le cube AC au cube HG. J'avois formé cette courbe en faisant un demi cercle BNL (fig. 21.) et, dans les droites qui coupent BL perpendiculairement, comme NGE, prenant GE egale aux soutendentes NB, NL, d'où nait aussi GH egale à leur difference,

*) Die erste Figur des vorhergehenden Briefes.

Il est aisé de voir par là que l'espace ACKL devient egal à deux espaces paraboliques, et l'espace AKL à leur difference. Je n'ay pas encore eu le temps d'examiner vostre autre quadrature de la courbe $2aaxx \bigcirc aayy + y^4$, et je doute si j'en trouveray le moyen. Car je n'ay pas penetré bien avant cette matiere, et je ne crois pas mesme que je doive m'y occuper, puisque l'espere de participer un jour à ce que vous en sçavez; qui m'avez devancé de si loin que j'aurois trop de peine à vous atteindre.

Mr. Fatio ne peut pas bien soutenir la Proposition de Mr. Newton pag. 105, sur tout quand pour son Ovale indeterminée, je luy marque deux portions egales de parabole qui aient la mesme base (fig. 22.). Il commence aussi à douter si l'impossibilité de vostre courbe Exponentiale est telle qu'il l'avoit crue.

Je verray avec plaisir comment s'accorderont vos decouvertes et celles de Mr. Bernouilly, avec les mienes, sur la chaine pendante. Mais pour faire connoitre au vray ce qu'un chacun aura trouvé, et pour prevenir toute dispute, il est absolument necessaire qu'on se communique premierement les chifres, comme j'ay fait il y a longtemps. Je ne doute pas que vous et Mr. Bernouilly n'en conveniez; car si sans cette precaution vous luy envoiez le premier vostre solution, on pourra douter s'il est autheur de la siene. Voicy mon chifre que j'ay mis d'une maniere moins embarassée qu'il n'estoit, en marquant seulement les premieres lettres des mots, ce qui se fait avec facilité et s'examine de mesme. J'y ay enfermé aussi quelque chose de plus que dans l'autre, m'estant aperçeu du depuis d'une chose qui estoit in potestate (pour me servir de vostre terme) sans que je l'eusse remarqué.

s c a p s s e f æ u a g c q c s i e a.

1. p i l i d q c p.
2. r æ c v c e p.
3. r c i v.
4. c æ s c e r c c a.
5. e o l l c e c c d.
6. n e c c d p e

p d p p q e a h

$xxyy \bigcirc a^4 - aayy$

$xxyy \bigcirc a^4 - x^4$

1. s v a c a p a q i a e d e p e v, i s t i c c a a, q i a a; e e h c æ i a c c a a; h i p a p d d t c i h p.
2. u t i c c, d a, e a a, i s a d c l.
3. a i q a a r c i u.
4. s o c e b c p c i q æ e c e a m p
i d r o i v e p a q i v c l p
5. u l e a e d i t o a a q q i r c i v a c o e e d,
6. s n e p u e æ r a e d c e s e s u c e i v;

Vous pouvez, si vous le trouvez bon, communiquer cet Enigme à Mr. Bernouilly, en luy demandant le sien. Je m'etonne du silence de Mr. D. T. sur ce Probleme, apres y avoir esté invité plus particulierement que tous les autres, mais il luy reste encore du temps. Pour ce qui est de vos demandes, je me souviens qu'en examinant dans l'Academie des Sciences la cause du flus et reflus selon Mr. des Cartes, les Astronomes n'en estoient pas contents et trouvoient des phenomenes contraires.

La declinaison de l'Eguille aimantée, et encore plus sa variation, me paroissent irreductibles à quelque regle certaine. La variation, ou bien le changement de declinaison marque assez clairement qu'au dedans de la Terre il doit arriver quelque changement.

J'ay une demonstration de l'Isochronisme des vibrations du ressort, estant supposé qu'il cede dans la mesme proportion de la force qui le presse, comme l'experience l'enseigne constamment.

La demonstration des Parelies sera dans ma Dioptrique, à laquelle je vay travailler cet esté, sans m'en laisser detourner par d'autres speculations, pourveu que j'aye de la santé.

Il y avoit un article dans ma lettre precedente touchant le calcul de quelques cas du mouvement avec resistence du milieu, au quel article vous n'avez rien respondu: ce que pourtant je vous pardonne facilement, ne vous ayant que trop fatigué par mes problemes des lignes courbes. Vous me direz aussi quelque jour comment vous trouvez mes explications de la Refraction et du Cristal d'Islande, de quoy jusqu'icy je n'ay pas appris la moindre chose. Je suis etc.

XXVI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye 24 Avril 1691.

N'ayant pas eu jusqu'icy de response à ma lettre du 26 du mois passé, que je vous adressay par la voie de Mr. Meyer, j'escris celle cy pour sçavoir si elle vous a esté rendue, ou si peutestre cette entremise aura moins bien reussi que la voie directe de la poste dont je me suis servi auparavant. J'espere du moins que ce n'est pas vostre indisposition qui est cause de ce retardement, car j'en serois incomparablement plus fasché que de la perte de ma lettre. J'y repondis a tous les articles de la vostre du $\frac{20}{30}$ Fevrier. Je vous remontray la necessité du chifre pour pouvoir connoitre, ce qu'un chacun auroit trouvé au suject du Probleme de Mr. Bernoulli, et j'adjoutay mon chifre second, contenant quelque chose de plus que le premier; auquel second je m'apperçus, incontinent apres, que j'avois laissé glisser deux fautes, l'une au nomb. 5, qui finit par r c i v a c c e c d, où au lieu des lettres r c i v, il ne faut que a. L'autre à l'article premier, qui n'est pas nombré, où j'avois oublié d'adjouter à la fin ces lettres d a i f e c p. Ce n'estoit icy qu'une omission, et l'autre un abus d'avoir pris une lettre pour une autre dans le calcul Algebraique. Et je corrigeay l'un et l'autre dans un pareil chifre que j'envoiay le jour d'après à un autre de mes amis. J'y ay encore adjouté depuis à la fin ce que contienent ces lettres v d d c g a a i p c p, et si je voulois resver d'avantage à cette question, j'y ferois peut estre encore de nouvelles decouvertes, ne pouvant pas m'assurer qu'il n'y ait plus rien à trouver.

Mr. Fatio est encore icy, et m'a communiqué sa methode au Probleme des Tangentes renversé, à laquelle il adjoute de jour en jour quelque chose à l'occasion des difficultez et des doutes que je luy propose. Cette speculation a une grande étendue et nous fournira encore pour longtemps matiere d'exercice. Il faudra voir s'il y aura moyen de demesler cette partie où il y a des racines composées à la soutangente donnée, où vous m'avez fait voir que vous estes bien avancé, et qui me paroit la plus considerable. Mais la quantité d'autres points qu'il y a à resoudre, nous a empesché jusqu'icy d'entreprendre cette recherche.

Je ne sçay, si vous aurez vu la Theorie de la Pesanteur de Mr. Varignon, qui ne me satisfait point du tout. Item les Q u a e s t i o n e s A l n e t a n a e de Mr. Huet, Evesque d'Avranches, où il y a beaucoup d'erudition, et non pas tout à fait autant de solidité de raisonnement. Il traite de s t a t u e n d i s l i m i t i b u s R a t i o n i s e t F i d e i, matiere, comme vous sçavez, tres difficile. Je vous supplie de faire response à celle cy et de me croire inviolablement etc.

P. S. Je n'ay remarqué que depuis fort peu le Paralogisme de Mr. de Tschirnhaus, là où il propose, dans les Acta de l'an 1682 sa fausse construction de la courbe par reflexion du miroir concave. Il paroit clairement qu'en ce temps là il ne connoissoit pas encore cette ligne, ni la maniere generale, dont il s'y vante, pour determiner ces lignes dans d'autres figures, et il est fort vraisemblable qu'il n'a appris la veritable construction que par ce que j'en ay donné dans mon Traité de la Lumiere.

XXVII.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{10}{20}$ d'Avril 1691.

Je suis bien aise que ma solution de vos Problemes vous a satisfait. Vous doutés de ce que j'avois dit, qu'il y a plusieurs lignes qui puissent donner la soutangente $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, et meme cela vous paroist impossible. En voicy pourtant une, dont l'equation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$. Et tant que yy sera moindre que $4aa$, la valeur de la soutangente sera affirmative et donnera $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, mais lorsqu' yy deviendra plus grande que $4aa$, alors $yy\sqrt{aa-xx}:ax$ sera une grandeur negative ou moindre que rien, et doit estre prise en sens contraire. Pour ce qui est de $aaxx = a^4 - y^4$, que je vous avois envioyé, je voy que dans mes brouillons il y a $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ (c'est à dire $4aaxx = 4a^4 - y^4$); à quoy je n'avois pas pris garde en vous écrivant. Il est vray qu'alors $yy\sqrt{aa-xx}:ax$ devient une grandeur negative, mais j'ay deja marqué que cela n'empeche point qu'elle ne satisfasse. Pourtant, si vous n'en voulés point, la precedente suffit, outre la premiere, marquée dans la lettre passée.

Vostre construction de la ligne qui donne 8 me plaist fort à cause de sa simplicité. Considerés s'il vous plaist, Monsieur, si contre vostre instance des deux portions égales de parabole sur une meme base, Monsieur Newton, pour soutenir l'impossibilité de la quadrature des ovales, ne pourroit repondre qu'une telle ovale seroit fausse et non pas composée d'une même ligne recourante, comme il semble que son raisonnement demande, puisqu'une parabole continuée ne tombe pas dans l'autre. Mais vostre ligne qui fait 8 est veritablement recourante, et son raisonnement y est applicable, quoyqu'elle n'ait pas justement la forme d'une ovale, et selon luy, elle ne devroit pas estre generalement quadrable. Il seroit bon de considerer son raisonnement en luy même pour voir où gist le manquement. Quant au cercle et à l'ellipse, l'impossibilité de leur quadrature generale est assez demonstrée, mais je n'ay pas encore vû, qu'on aye donné aucune demonstration pour prouver que le cercle entier, ou quelque portion determinée n'est pas quadrable.

Je n'avois pas fait attention à l'endroit de vostre precedente, où vous aviés parlé des calculs sur la resistence du milieu. Mais quand j'y aurois pris garde, je n'estois pas en estat d'entrer assés là dedans, estant extremement distrait et occupé à des matieres qui en sont trop éloignées et pour lesquelles je suis extremement pressé. Et le plus grand mal est que je commence à avoir les yeux incommodés.

C'est la même raison qui m'a fait tant tarder à mettre au net ce que j'ay sur la ligne de la chaine. Mr. Bernoulli a déja envoyé sa solution à Mrs. de Leipzig, qui en ont averti le public, quoyqu'ils n'ayent pas encor mis sa solution dans leur Actes. Ils m'en ont averti aussi, et je leur ay écrit que vous en aviés aussi la solution, et que je scaurois de vous si vous la voudriés envoyer pour estre publiée dans leur Actes avec les autres. Comme je n'écris pas immediatement à Mr. Bernoulli et que d'ailleurs il est à couvert de tout soubçon, ayant deja envoyé sa solution, je ne croy pas qu'il soit necessaire de luy envoyer un chifre. Et comme le terme est expiré en effect, parceque j'avois promis seulement d'attendre jusqu'à la fin de l'année précédente, Mrs. de Leipzig m'ont sommé d'envoyer ce que j'ay sur ce probleme pour ne pas trop retarder l'edition de ce que Mr. Bernoulli leur a envoyé. C'est donc ce que je dois faire bien-tost; et il depend de vous, Monsieur, comment vous en voudrés user. En cas que vous voulussiés l'envoyer à Mrs. de Leipzig, il n'y a pas lieu de douter qu'ils en usent fidelement, comme je croy qu'ils ont fait à l'egard de celle de Mr. Bernoulli, dont je n'ay rien veu, et j'aurois esté faché de la voir, pour les raisons que vous avés marquées.

Je croy qu'il sera bien difficile de trouver la regle de la declinaison de l'aimant, mais je ne voy pas pourquoy vous jugés qu'il n'y en a point, si ce n'est qu'on y trouve des sauts, c'est à dire qu'il y ait une grande difference de declinaison entre des lieux ou des temps, dont la difference n'est pas grande. Je souhaitte d'apprendre si les observations ont fait voir cela.

On avoit publié en Angleterre un petit livre sur le ressort, qui est je crois de Mr. Hook, mais il me semble que j'y trouvay quelque difficulté. Je vous supplie de me dire quelles sont les experiences que vous dites d'avoir esté faites sur cette matiere. Je m'etonne de ne vous avoir pas dit que j'ay admiré vostre explication de la refraction, puisque je l'ay écrit à d'autres. Mr. Meier, Theologien de Breme, est fort scavant et fort honnete, et qui fait gloire d'avoir receu des faveurs de feu Mr. vostre pere. Je crois que Mr. vostre frere fait tousjours la charge de secretaire d'Estat auprès du Roy de la grande Bretagne, comme auprès du prince d'Orange. Ainsi il doit estre bien occupé. C'est pourquoy je ne scay si ce seroit une demande civile de vous supplier de voir si par sa faveur on pourroit disposer quelque scavant Anglais versé dans les manuscrits et chartres et ayant accès aux Archives, de nous fournir quelques diplomes ou particularités non vulgaires concernant Henry Duc de Saxe (de la maison de Bronsvic) gendre de Henry II, Roy d'Angleterre, et touchant les enfans de ce Duc, parmy lesquels estoit Otton Duc de York et Comte du Poictou, depuis Empereur IV^e de ce nom. En tout cas j'espere que par vostre intercession il aura la bonté de me pardonner cette liberté et d'agreer mes respects à vostre exemple. Je suis etc.

XXVIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 5 Maj 1690.

J'ay reconnu qu'il est vray ce que vous me mandez de vos courbes, qui satisfont a la mesme construction de soutangente, et je tombe d'accord que la chose est possible. Je devois bien avoir remarqué qu'il y a du moins trois courbes qui satisfont a une soutangente sans racine, sçavoir une sans quantité connue, une autre avec une telle quantité affirmative et la troisieme avec une negative. Mais comme vous vous estes servi du mot de plusieurs, il semble que ce nombre de trois courbes ne vous borne point, du moins dans les soutangentes avec racine. Mr. Fatio au reste, voiant combien le probleme renversè des Tangentes est important dans ce cas où il y entre des racines composées dans la soutangente donnée, et y aiant, comme je crois trouvé plus de difficulté qu'il n'avoit pensé, veut bien que l'echange se fasse de vostre methode en cela, contre la seine, dont il a resolu mes problemes des soutangentes et plusieurs autres, ainsi que vous l'aviez souhaité, de sorte, Monsieur, qu'il ne tiendra qu'a vous que le traité s'execute, duquel je seray garand, et si tost que j'auray receu l'exposition de vostre methode, je vous feray avoir celle de Mr. Fatio, qui en verité est tres belle. Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donnerez, et de ne pas supposer que nous entendions vostre calculus differentialis.

Je vous prie d'envoier la lettre cy jointe à Messieurs les autheurs des Acta de Leipsich. Elle contient le resultat de mes meditations sur la Chaine, et je vous l'envoie fermée expres, croiant que vous ne voudriez pas voir mes decouvertes devant que d'avoir envoié les vostres, ainsi que vous l'avez tesmoigné a l'egard de celles de Mr. Bernoully, que si vous les avez desia envoiées, vous verrez les miennes dans peu avec toutes les autres. Je ne crois pas, en considerant ce que vous m'avez mandé cy devant, que j'aye rien trouvé touchant ce probleme que vous n'ayez de mesme.

Je ne vois pas qu'on puisse accorder sa proposition pag. 105 à Mr. Newton, parceque ne considerant aucunement la nature de ce qu'il appelle Ovale, mais seulement que c'est une ligne fermée tout au tour, il n'exclud pas mesme le quarré ou le triangle.

J'ay vu autrefois le traité de Hooke touchant le ressort, et j'y ay remarqué quelque paralogisme, que je pourrois trouver parmi mes papiers. L'experience principale qu'on a faite est que lors que les forces, dont un Ressort est comprimé, sont accrues d'accessions egales, aussi les espaces de son étendue diminent egalement. Ce que l'on voit bien precisement observé quand les compressions sont legeres, et ne violentent pas le ressort jusqu'au bout. Mais dans le ressort de l'air la proportion reussit tousjours parfaitement, dont il y a des experiences dans les livres de Mr. Boyle.

Pour ce qui est de la declinaison de l'aiguille aimantée, ce qui me persuade plus qu'autre chose, qu'on n'y sçauroit trouver de reglé, c'est que je sçay qu'il y en a eu qui s'en sont enquis par beaucoup d'experiences, esperant de parvenir par ce moien au secret des Longitudes, mais sans succes.

J'ay escrit a mon frere en Angleterre touchant la recherche des Archives que vous demandez, quoyque je doute s'il trouvera des gens qui s'en veuillent donner la peine parmy cette nation assez paresseuse.

Je suis extremement fasché de vostre incommodité aux yeux, qui fait que je vous demande avec scrupule la response a cellecy, et cependant je seray fort aise d'apprendre si vous demeurez d'accord du trocq que je vous ay proposé. Je suis de tout mon coeur etc.

XXIX.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{12}{22}$ de May 1691.

Il y a quatre semaines que je suis hors d'Hanover, ayant esté à Hildesheim, Wolfenbutel, puis à Zel, d'où je suis retourné à Wolfenbutel, et y ay trouvé vostre lettre, qu'on m'avoit envoyée suivant l'ordre que j'avois donné. De Zel j'ay envoyé vostre incluse à Mrs. de Leipzig avec ma solution, et il sera curieux de comparer nos solutions et celle de Mr. Bernoulli. Je n'ay pas encor reponde à vostre precedente, parceque celle que j'avois écrite avant que de la recevoir, et à laquelle repond vostre derniere, y avoit satisfait en partie.

Quand j'auray respiré un peu des distractions du voyage dont les recherches dans les archives et bibliotheques m'ont imposé la necessité, j'envoyeray ma methode en echange de celle de Mr. Fatio.

Ce que j'ay vu de la cause de la pesanteur proposée par Mr. Varignon, ne me satisfait pas non plus. C'est comme s'il disoit, qu'une riviere avec la même rapidité a plus de force quand elle est plus longue, au lieu qu'à mon avis il ne s'agit que de l'endroit où le fluide opere.

Tout ce que donne Mr. Huet est plein d'erudition, mais la matiere de concordia Rationis et Fidei est bien delicate, et il est difficile de satisfaire en même temps à la verité et à l'opinion, encor plus que de satisfaire ensemble à la foy et à la raison. J'avois esperé que quelque habile Cartesien repondroit à la censure de Mr. l'Eveque d'Avranches, mais ceux que j'ay vu rampent bien bas à mon avis et ne disent que des choses vulgaires. Peterman à Leipzig, Sulling à Breme et Schotanus chez vous. Il me semble que les Cartesiens ont fort decheu et qu'ils n'ont pas trop d'habiles gens.

Ce que vous avés remarqué, Monsieur, de la construction de la courbe faite par reflexion du miroir concave, donnée depuis peu par Mr. Tschirnhaus paroist fort vraisemblable. Car il a coutume d'aller un peu viste, ainsi il se peut qu'il n'ait pas connu au commencement la veritable construction. Dans les Actes de l'an 1682 il nous propose une methode generale d'oster les termes moyens des equations. Elle l'a trompé parce qu'elle reussit dans le 3e degré; s'il en avoit voulu faire l'essay dans le cinquième, qui n'est pas encore donné, il auroit trouvé la difficulté. Je suis avec zele etc.

XXX.

Leibniz an Hugens.

A Hanover ce $\frac{14}{24}$ de Juillet 1691.

Il y a plusieurs semaines, que je vous ay écrit de Wolfenbutel, que j'y avois receu votre lettre avec la solution de la ligne catenaire enfermée dans une lettre pour Mrs. de Leipzig, et que je n'avois pas manqué de la leur faire tenir. Depuis j'ay attendu à vous écrire de nouveau jusqu'à ce que j'ay receu le tout imprimé dans leur mois de Juin, où vous trouverés, Monsieur, vostre solution avec celle de Mr. Bernoulli et la mienne.

J'ay pris plaisir de voir qu'on s'est rencontré. Cela nous asseure de ne nous estre pas mépris au moins dans le fonds; il est vray que je n'ay pas eu le loisir de faire une comparaison exacte; neantmoins ayant vu, que plusieurs conclusions s'accordoient, j'en juge autant des autres, ou s'il y a quelque faute (quoyque je n'en aye point remarquée) il ne sera pas difficile de la redresser. J'ay aussi cherché quelques uns de vos cas particuliers par mon calcul, et il m'est venu la meme chose. Ainsi je m'imagine qu'il y a de l'accord. J'espere que Mr. Bernoulli fera une plus exacte comparaison; et comme il employe ma methode, je prends part à ce qu'il a fait. Luy et moy nous avons reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, nous avons donné tous deux non seulement les tangentes et l'extension de la courbe, mais aussi le centre de gravité de la courbe, et moy j'y ay adjouté le centre de gravité de l'espace. Nous avons donné tous trois les tangentes et l'etendue de la courbe. Mr. Bernoulli s'est rencontré avec vous, Monsieur, à penser à la courbe dont l'evolution sert à descrire la ligne catenaire, et il a remarqué la dessus de fort jolies choses. De sorte qu'il me semble qu'il a tres bien fait. Cependant il estoit bien eloigné, il y a deux ou trois ans, dese pro mettre quelque chose de cette nature, avant qu'il s'est façonné à mon calcul, comme il avoue luy même.

Avec tout cela ses constructions sont fort differentes des miennes. Car il se contente de supposer la quadrature de l'Hyperbole ou l'extension de la courbe parabolique, et moy j'ay reduit le tout aux logarithmes, tant parcequ'ainsi tout vient d'une maniere tres simple et tres naturelle (tellement que la courbe catenaire semble estre faite pour donner les logarithmes) que parcequ'ainsi je puis trouver par la Geometrie ordinaire une infinité de points veritables, ne supposant qu'une seule proportion constante une fois pour toutes, qu'on ne sçauroit donner jusqu'icy geometriquement que par l'etendue d'une courbe, ou quelque chose de semblable, au lieu qu'autrement on est obligé à chaque point de la courbe qu'on demande de recourir aux voyes extraordinaires. Ne sçachant point, Monsieur, si vous avés deja receu le mois de Juin de Leipzig, je mettray icy l'abregé de mon discours en peu de mots. (fig. 23.) FCA(C)G la catenaire, et ZξA (ξ) (Z) la logarithme. On prend AO et ZW en raison S et K constante et perpetuelle, une fois pour toutes les lignes catenaires et pour tous leur points. Faisant OW = O(W) = AO, et puis entre AO et WZ, item entre AO et (W)(Z) (supposant (W)(Z), AO et WZ en progression geometrique continuelle) on met pour ordonnées comme Nξ ou (N)(ξ) autant de moyennes proportionelles qu'on veut pour decrire la courbe logarithmique ZA(ξ)(Z). Or, posant ON et O(N) egales, NC ou OB ou OR est moyenne arithmetique entre Nξ et (N)(ξ) (dont la moyenne geometrique est AO parametre de la catenaire). Ainsi la courbe catenaire se construit fort bien par les logarithmes, et si elle se suppose construite par le moyen d'une chainette, elle sert à donner les logarithmes sans calcul, ex dato numero, ou bien numeros ex dato logarithmo. Voicy le reste des proprietés. Je suppose OR = OB et que G, P, Q soit les centres de gravité de CA(C), AC, AONCA. OR − AR = Nξ. OR + AR = (N)(ξ). Triangula OAR et CRT sunt similia (ou bien EAT, AR = AC; ψω = CA(C) = bis AC. Rectang. RAO = Spatio AONCA; OS : OA :: BC : AR; OS + OB = bis OG = quater Oβ; et AR = GP = βQ.

Je n'ay pas expliqué quelle doit estre la proportion de K à S ou de WZ à OA; mais vous jugerés aisement, Monsieur, qu'AO doit estre egale à la soustangentiale (comme vous l'appelés) de la logarithmique, et que par consequent, posant OW = AO, la raison de AO à WZ est toujours la même et determinée. Ainsi toutes les logarithmiques aussi bien que toutes les catenaires sont semblables ou d'une mesme espece.

J'ay donné encor quelque chose dans le mois precedente, ou j'ay redressé quelques fautes de mon vieux essay de resistentia medii; j'ay aussi rendu justice à vostre series pour l'Hyperbole qu'on a eu tort de dire la même avec celle que j'avois donnée autres fois. Je me suis aussi servi de l'occasion pour expliquer la ligne loxodromique, ou des rumbes par les logarithmes, ce que j'avois trouvé il y a plusieurs années. Mais la catenaire m'en avoit fait ressouvenir. Aussi sçait-on (ce me semble) que la chose se reduit à la somme des secantes appliquées à l'arc dont vous avés remarqué, Monsieur, dans vostre solution que la catenaire depend aussi. Mr. Bernoulli y a joint aussi dans ce dernier mois la consideration de la Loxodromique. Mais il ne s'estoit pas apperçu, que la Loxodromique se reduit à la quadrature de l'Hyperbole, ou aux logarithmes ou à la catenaire.

Je voulois écrire il y a plus de trois semaines, pour envoyer ma solution que Mr. Fatio demande. Mais j'ay trouvé que vos lettres estoient restées à Wolfenbutel. Car comme j'y vay souvent, j'y ay un logis, où je laisse plusieurs papiers, mais les vostres y estoient restés par megarde. Et je n'ay pas voulu me hazarder sur ma memoire. Ainsi je ne puis satisfaire à ma promesse que dans quelques semaines quand je serai à Wolfenbutel. Cependant je suis avec ardeur etc.

XXXI.

Hugens an Leibniz.

à la Haye ce 4 Sept. 1691.

Peu de jours apres que j'eus receu vostre lettre du 24 Jul. l'on m'apporta les Acta de Leipsich de May et Juin, où je vis avec bien du plaisir outre vos inventions touchant la Catenaria, lesquelles vous veniez de me communiquer, celles de Mr. Jo. Bernouilly. Je vous admiray tous deux, et vous, Monsieur, surtout, d'avoir si bien reussi à decouvrir les proprietez de cette Courbe, et ayant examiné vos constructions et vos Theoremes, je trouvay, que tout quadroit ensemble, comme aussi avec ce que j'ay donné en ce que nous avons de commun, et qu'il n'y avoit aucune erreur. Je consideray en suite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient échappées, et je jugeay que ce devoit estre un effet de votre nouvelle façon de calculer, qui vous offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes, vous m'aviez dit, en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant la Catenaria, que le calcul vous offroit cela comme de soy mesme, ce qui certainement est fort beau. Pour moy je puis dire que j'ay trouvé tout ce que j'ay cherché et plus, mais je n'ay point cherché ni vostre dimension de l'espace ni les deux centres de gravité, n'ayant pas esperé qu'ils fussent trouvables. Ainsi ils me sont echappez, quoyque j'en aye esté fort pres. Car j'ay assez reconnu, en examinant vos Theoremes là dessus, par quelle voie j'y aurois pu parvenir, et que ces Theoremes ont une mesme origine. J'ay aussi remarqué en passant que Mr. Bernoully, pour avoir le centre de gravité L de la courbe EBF (fig. 24), au lieu qu'il prend BL égale à IK, n'avoit qu'à prendre AL égale à GK, et qu'ainsi le rectangle de GA, AL est tousjours égal à l'espace hyperbolique BGA. Par où il auroit encore facilement trouvé le centre de gravité de l'espace EBF, ou, qui vaut autant, de vostre espace AONC.

Ses propositions 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sont en partie les mesmes et en partie aisées à deduire des choses que j'avois trouvées, en estant comme des corollaires, quoy qu'il en ait de fort jolies, dont peutestre je ne me serois jamais avisé. Pour ce qui est de la surface du Conoide, je vois qu'il n'en dit rien, ni vous, Monsieur, touchant la courbe dont la Catenaria s'engendre par evolution, apparemment parce que vous n'y avez pas songé. Apres ma dimension de l'espace BMOE, et la vostre de l'espace BEA dans la 2e fig. de Mr. Bernoully, l'on peut aussi trouver celle de l'espace MOR, que la courbe MO retranche du rectangle MPOR, lequel espace devient egal au rectangle FG, lorsque BE est egal à BM ou BO; mais qu'a-t-on à faire, direz vous, de chercher si avant.

J'avois fait tout cet examen, et les remarques dont je viens de parler sans beaucoup de peine, et dés les premiers jours, mais je n'ay pas trouvé la Reduction de la construction de la Courbe à la quadrature de l'Hyperbole, et c'est ce qui m'a fait differer de vous faire response. Car cette reduction me paroissant fort belle, puisqu'elle donne la maniere de trouver avec facilité des points dans la courbe, j'aurois esté bien aise d'en decouvrir aussi la methode, par ma propre meditation, qui, à dire vray, a esté interrompue par plusieurs affaires et distractions de toute sorte. Enfin je n'y vois point de jour encore, et puisque Mr. Bernoulli, aussi bien que vous, a reussi en ce point, je conclus qu'il faut que vostre nouveau calcul vous ait conduit tous deux, ou bien une plus grande connoissance que vous n'ayez acquise l'un et l'autre en ce qui est des quadratures et leurs relations ou dependances mutuelles. J'ay recherché la dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les oeuvres posthumes de Mr. Fermat, mais ce Traité est imprimé avec tant de fautes et de plus si obscur, et avec des demonstrations si embrouillées que je n'en ay pas sceu profiter. Vous me ferez donc tres grand plaisir, Monsieur, si vous me voulez donner quelque lumiere en cecy, ce que peut estre vous pouvez en fort peu de paroles. J'avois reduit cette construction, comme vous sçavez, à la dimension de la Courbe $xxyy = aayy - a^4$ et je vois maintenant quel espace hyperbolique est egal à un espace de cette courbe, mais je ne sçay pas comment j'aurois pû trouver cela; et il se peut que vostre Reduction est fondée sur autre chose, ce que je seray bien aise d'apprendre. Si Mr. Bernoulli en examinant le rapport entre nos inventions (ainsi que vous le souhaitez) vouloit en mesme temps expliquer les fondements de ses decouvertes, il ne seroit pas besoin que vous prissiez la peine de m'instruire, et il m'aideroit par là à entendre vostre calculus differentialis, dont je commence avoir grande envie; mais peut estre il nous fera attendre encore longtemps.

Je ne voudrois jamais m'amuser à ces differentes natures de chaines que Mr. Jo. Bernoulli propose, comme devant achever ou pousser plus loin cette speculation. Il y a de certaines lignes courbes que la nature presente souvent à nostre veue, et qu'elle decrit pour ainsi dire elle mesme, lesquelles j'estime dignes d'estre recherchées, et qui d'ordinaire renferment plusieurs proprietez remarquables, comme l'on voit au Cercle, aux Sections coniques, à la Cycloide, aux premiers Paraboloides, et à cette Catenaria. Mais d'en forger de nouvelles seulement pour y exercer sa Geometrie, sans y prevoir d'autre utilité, il me semble que c'est difficiles agitare nugas, et j'ay la mesme opinion de tous les Problemes touchant les nombres. Calculis ludimus, in supervacuis subtilitas teritur, dit quelque part Seneque, en parlant de certaines disputes frivoles des philosophes grecs.

Pour ce qui est de la courbure du Ressort, dont l'autre Mr. Bernoulli fait mention, elle peut meriter quelque attention, estant encore une de ces lignes que la nature decrit; quoyque je doute fort si on trouvera des Principes aussi surs que ceux qui servent à la speculation de la Chainette. Il parle outre cela de la courbe que produit une voile tendue par le vent, comme estant d'une meditation tres sublime. En quoy je veux croire que je n'entens pas ce qu'il veut dire, parce que cette courbure en arc de cercle, qu'il donne à une partie de la voile, me paroist trop absurde (en l'interpretant simplement) pour qu'il se puisse estre trompé si grossierement.

Voicy à peu pres la fig. 2e de Mr. Bernoulli (fig. 25) à laquelle se rapportent les deux remarques precedentes. Vous avez fort bien fait de m'advertir dans vostre lettre que B C, ou bien A O dans vostre figure, doit estre la soutangente de la Logarithmique, car j'aurois eu de la peine à le deviner, et il me semble que vous en deviez informer vos lecteurs dans les Actes. Dans cette construction par la Logarithmique, qui est tres ingenieuse, la proprieté de sa soutangente que j'ay remarquée pag. 179. de mon Traité de la Lumiere, est venue fort à propos, car il a fallu la supposer pour y parvenir, si je ne me trompe.

J'espere que vous aurez trouvé du temps pour achever ce que vous m'avez promis touchant les Tangentes, et je l'attends avec impatience; mais je ne souhaite pas moins d'apprendre la Reduction dont je vous ay parlé, et dont je vous auray l'obligation toute entiere. Je suis avec beaucoup d'estime etc.

Je ne sçay pas pourquoy ces Mrs. de Leipsich m'ont donné cette fois le titre de Dn. à Zulichem au lieu de Zeelhem, qu'ils ont mis devant et qui estoit le vray. Il faut que ce soit qu'ils ont confondu les deux Christian Hugens, dont vous pourrez par occasion, Monsieur, les detromper.

XXXII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 4 Septembre 1691.

Il y a 8 jours que je me donnay l'honneur de vous escrire une assez longue lettre. A peine une demie heure apres que je l'eus envoiée à la poste, je trouvay avec plaisir ce que jusqu'alors je n'avois pu penetrer, sçavoir la Reduction de la Construction de la Chainette à la quadrature de l'Hyperbole, de sorte que je souhaitois fort de faire revenir ma lettre pour y adjouter cela; mais comme je demeure hors de ma maison de campagne, à une lieue de la Haye, le courier auroit esté parti devant que j'eusse pu contremander celuy que j'en avois chargé. Je n'ay donc pu m'empescher de vous escrire cette autre, non seulement pour vous espargner la peine de me monstrer ce qui en cecy m'avoit semblé trop difficile, comme je vous en avois prié, mais aussi pour vous faire voir la Construction qui m'est venue, afin que je puisse sçavoir si je n'ay pas tenu la mesme m'interesse beaucoup. Je suis bien aise aussi d'apprendre par l'examen que vous avés fait, que nos solutions s'accordent. Je n'avois pas songé à la courbe qui par son evolution peut produire la chainette. Cependant je voy, qu'il est bon d'y songer dans les rencontres. Je ne scay, Monsieur, si vous aves remarqué un petit discours de Angulo Contactus et Osculi, que j'avois mis dans les actes de Leipzig mois de Juin 1686, où je considere, que la direction de la courbe se doit exprimer par la droite, qui la touche, parceque la droite a par tout la même direction. Et la droite qui touche ne fait avec la courbe qu'un angle de contact, qui est moindre que tout angle de droite à droite. Mais la courbure ou flexion de la courbe en chaque point se doit exprimer par le cercle qui l'y touche le plus exactement, ou qui la baise, car le cercle a par tout la même courbure; et le cercle qui baise ne fait avec la courbe qu'angulum osculi, comme je l'appelle, qui est moindre que tout angle de contact de cercle à cercle. Et ce cercle sera la mesure de la courbure. Ce qui s'accorde avec ce que vous dites Monsieur, du Rayon de la curvité. C'est pourquoy on fait bien de considerer cecy en examinant les courbes, et les centres des cercles mesurans la courbure tombent dans vôtre generatrice par evolution. Il seroit peut estre bon de continuer la progression et d'examiner quelle courbe seroit la plus propre à estre la mesure de l'osculation du second degré. Il est vray qu'on ne trouvera point d'autres courbes uniformes. Cependant comme deux contacts coincidans font l'osculation, on pourroit encore considerer la coincidence de trois contacts, et même de 4 contacts, ou de deux osculations etc. Je suis bien aise que par vos decouvertes jointes aux nostres, nous avons la quadrature de la generatrice de la chainette.

Il est vray, Monsieur, comme vous jugés fort bien, que ce qu'il y a de meilleur et de plus commode dans mon nouveau calcul, c'est qu'il offre des verités par une espece d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, qui souvent ne reussit que par hazard, et il nous donne sur Archimede tous les avantages que Viete et des Cartes nous avoient donnés sur Apollonius. J'avoue que je ne l'ay pas encor portée à sa perfection, et je ne scay si d'autres occupations me le permettront. Cependant je ne croy pas que jusqu'icy on ait esté en meilleur chemin, ny plus avant. Depuis que vous avés trouvé vous même la reduction de la Catenaire à la quadrature de l'Hyperbole, vous aviés eu quelque raison, Monsieur, de croire, que j'y pouvois être arrivé aussi par une semblable remarque particuliere. Et même vôtre soubçon est allé un peu trop avant, jusqu'à me faire une petite querelle. Mais je n'ay pas trouvé necessaire de m'en emouvoir. Vous ajoutés, Monsieur, que Mrs. de Leipzig ont gardé à Mr. Bernoully une entiere fidelité, et bien loin de me decouvrir sa solution, ils ne m'ont pas même mandé qu'elle procedoit par la quadrature de l'Hyperbole. Je ne sçay s'il leur a recommandé le secret, mais ils ont bien jugé qu'ils le luy devoient, et c'est moy qui le leur ay recommandé moy même, de peur que Mr. Tschirnhaus n'en sçut quelque chose, car lorsque j'avois proposé le probleme, je l'avois eu en vue, à cause des grands bruits qu'il faisoit de ses methodes. Mais si vous ne nous voulés pas croire, ny ces Mrs. de Leipzig, ny moy, sur notre parole, j'ay en main une preuve, aussi bonne qu'auroit pû estre le chifre que vous m'aviés conseillé à la fin, et dont je me suis dispensé par paresse, et par distraction, ne le jugeant plus necessaire. Elle ne vous permettra point de douter que j'aye sçu la reduction à la quadrature de l'Hyperbole avant l'arrivée de la solution de Mr. Bernoulli à Leipzig. C'est que je l'ay mandée à un amy de Florence dans une de mes lettres du 26. d'Octobre ou du 9. de Novembre, car il repond à la fois à ces deux, et je ne me souviens pas dans laquelle j'ay touché ce point, et il m'y promet la dessus le silence que je luy avois recommandé. Il me semble aussi, que vous pervertissés un peu le sens des paroles de Mr. Bernoulli. Et je croy que vous voulés railler. Je pense, que le terme que j'avois donné pour la solution expirant avec l'année, il s'imagina que la mienne seroit bientost, ou pourroit estre déja entre les mains de Mrs. de Leipsig, pour estre imprimée, et qu'en ce cas, ils ne feroient peut estre pas difficulté de me communiquer la sienne, ny moy de la voir, et qu'elle me pourroit rebuter, s'il m'estoit la matiere de dire quelque chose de nouveau et s'il me ravissoit jusqu'aux demonstrations. Mais cette apprehension n'estoit pas necessaire. D'ailleurs je ne me presseois pas lors même que je sçus que la solution de Mr. Bernoully estoit arrivée, parceque je voulus encor donner du temps à des sçavans hors de l'Allemagne d'y essayer leur Analyse. Car j'ay ecrit pour ce sujet en France et en Italie, mais sans en rien tirer. Pour vous dire la verité je n'avois pas crû que M. Bernoulli auroit reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, et je ne l'ay sçû que lorsque j'ay vû sa solution imprimée, et j'ay trouvé qu'il avoit surpassé mon attente; je ne sçay pas bien comment il est arrivé à cette reduction, et je veux bien croire que c'estoit par une remarque particuliere, mais que l'usage de nostre calcul luy avoit peut estre rendue aisée. Car s'il l'avoit obtenue par une voye plus generale, il n'auroit pas ignoré que la construction de la ligne des Rhumbes ou la loxodromique depend de cette même quadrature de l'Hyperbole et de la même façon; car il s'est contenté de la construire par une quadrature plus composée dans les Actes du mois de Juin dernier pag. 284. 285. au lieu que je l'ay reduite à la quadrature de l'Hyperbole, Actes du mois d'Avril p. [illegible]. Ce que j'y dis suffit aussi pour donner la reduction de la Chainette, quoyque je l'aye dissimulé; car j'y dis expressement que la ligne des Rhumbes se construit par la somme des secantes, et je crois que Snellius l'avoit déja remarqué. Or j'y monstre, comment cette somme des secantes se reduit à la somme de l'Hyperbole et j'en donne le fondement. Et vous sçavés que cette même somme des secantes sert aussi pour la chainette. Il y a plus de [illegible] ans que j'ay trouvé la construction de la Loxodromique, mais la recherche de la chainette m'en fit ressouvenir. Vous parlés, Monsieur, dans vostre solution d'une maniere fort bonne de trouver les sommes des secantes par les Tables. Est il permis de l'apprendre? Cependant je vous avoueray bien que ce n'est pas par la voye de la figure, suivant ce que je dis p. [illegible], que je suis arrivé à la reduction de la loxodromique ou de la chainette, quoyque j'aye esté bien aise de m'en servir pour les autres.

Vous vous souviendrés peut être, Monsieur, de mes lettres, où je recommande les expressions exponentiales, ou (qui est la même chose) logarithmiques. Vous en voyés maintenant l'usage dans la chainette, car c'est ainsi qu'on donne des veritables points des lignes transcendantes. Et je croy que c'est ultimum quod in illis humano ingenio praestari potest. Il est vray que ce n'est pas tousjours si aisément. Cependant icy le calcul m'a mené tout d'un coup à la consideration des Logarithmes, sans que j'aye eu besoin d'y aller par detour. Ce que j'avois dit que je faisois dans la courbe, supposita ejus constructione, ne vous doit point troubler. Je le diray bien encor, comme si je disois que ducere minimam a puncto d a t o a d p a r a b o l a m, est un probleme resolu le plus absolument, suivant le style des anciens, mais s u p p o s i t a p a r a b o l a e c o n s t r u c t i o n e. Car alors on n'a besoin que de la regle et du compas. Quoyque j'aye la construction de la chainette aussi bonne qu'il est possible d'avoir, ce n'est pas tout à fait suivant la Geometrie ordinaire. Voudriés vous que j'eusse dit en vous écrivant s u p p o s i t i s l o g a r i t h m i s e t s u p p o s i t a q u a d r a t u r a H y p e r b o l a e, ou quelque chose de semblable? En parlant comme j'ay fait, je me tenois dans la generalité et je ne voulois pas faire penser que j'avois quelque chose de plus qu'on n'auroit pû attendre. Mais c'est assés de ce procès.

Vous avés raison d'estimer la methode de reduire les quadratures à celles de l'Hyperbole ou du cercle quand cela se peut. J'ay quelque chose la dessus, et ce que j'estime beaucoup la dedans, c'est qu'une même methode me mene à une solution absolue, ou au cercle ou à l'Hyperbole, selon la nature de la chose. Mais je n'ay pas encor passé certains limites. Il me faudrait de l'assistance, car je suis rebuté des calculs. Je souhaitterois aussi de pouvoir tousjours reduire les quadratures aux dimensions des lignes courbes, ce que je tiens plus simple. Avés-vous peut-estre pensé à ce point, Monsieur?

Lorsque j'ay donné mon calcul Octob. 1684, j'ay aussi remarqué p. 473 que la soutangente de la logarithmique est constante. Je l'avois même deja mis dans mon traité de la quadrature Arithmetique, où je m'en servois à la quadrature de l'espace de la Logarithmique. Mais j'ay quitté la pensée de publier ce traité.

A l'egard des lignes de Mr. Bernoulli, vous avés raison, Monsieur, de ne pas approuver qu'on s'amuse à rechercher des lignes forgées à plaisir. J'y adjoute pourtant une limitation: si ce n'est que cela puisse servir à perfectionner l'art d'inventer. C'est pourquoy je ne desapprouve pas que des personnes qui ont du loisir et de l'inclination, et surtout des jeunes gens, s'y exercent. Et c'est pour cela que je ne veux pas decourager non plus ceux qui s'exercent dans les nombres, parceque c'est encore en cela que je trouve l'Analyse imparfaite. Je souhaitte que nous puissions encor dans ce siecle porter l'analyse des nombres et des lignes à sa perfection, au moins quant au principal, ut hac c u r a g e n u s h u m a n u m a b s o l v a m u s, afin que doresnavant on tourne toute la subtilité de l'esprit humain à la physique. Je croy qu'on pourroit voir ce souhait accompli si quelques personnes propres à cela s'entendoient. Du reste je n'ay pas entendu non plûs ce que Mr. Bernoulli veut dire avec son arc de cercle dans la voile. Les occupations que j'ay m'ont fait resister à la tentation de penser aux choses qu'il propose. Si M. Fatio le veut, nous envoyerons à Mr. Meyer à Breme nos methodes promises pour les Tangentes, afin qu'il en fasse l'echange quand il les aura receues toutes deux.

Je remarque plusieurs fautes d'impression dans mon discours sur la loxodromie, actes de Leipzig du mois d'Avril p. 181. Car ligne 12, au lieu de [illegible], il faut mettre [illegible], et ligne 20 au lieu de [illegible] il faut mettre [illegible], et ligne 25 au lieu de [illegible], il faut mettre [illegible]; et pag. 182 ligne 30, j'ay manqué moy même par inadvertance, mettant $\frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5}$ etc. au lieu de mettre comme j'avois deja mis auparavant $\frac{e-(e)}{1} + \frac{e^3-(e)^3}{3} + \frac{e^5-(e)^5}{5}$ etc. ce que le discours fait assez voir. Je remarque cela afin que si vous vouliés daigner de lire ces choses vous n'en soyés point arresté. Je crois d'avoir deja indiqué quelque chose dans ma precedente touchant ce rapport de la loxodromique à la chainette. Du moins puisque vous aviés reduit la chainette à la somme des sécantes selon les arcs dans votre solution, et que j'avois reduit cette somme aux logarithmes, dans les actes d'avril 1691, vous y pouviez déja voir le rapport de la chainette à la quadrature de l'Hyperbole. L'equation de la courbe auxiliaire (selon vous) estant $xxyy = a^4 - aayy$, je ne sçais comment vous vient $xxyy = 4a^4 - x^4$, la quadrature, ou $\int x\,dy$ est la somme des tangentes, selon les sinus de complement, laquelle se trouve égale à la difference entre la somme des secantes selon les arcs et la somme des sinus de complement selon les arcs. Or cette derniere somme est trouvable absolument, donc la quadrature à laquelle vous reduisés la chainette, depend de la somme des secantes selon les arcs, que j'ay reduite aux logarithmes. Et pour appliquer vostre equation à la chainette, x estant la longeur de la chainette, depuis le sommet, la somme des y (selon les x) sera l'ordonnée de la chainette, a estant l'unité ou le parametre. C'est ainsi que la quadrature de vostre courbe donne la chainette. Je ne sçay si j'ay deviné vos raisonnemens. Je suis avec zele etc.

XXXIV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye le 16 Novembre 1691.

Je me suis ces deux derniers mois abstenu de l'étude et du travail, ayant de la peine à conserver ma santé dans un temps où une infinité de monde dans ce pais est tombée malade. C'est ce qui est cause que je respons si tard à vostre derniere lettre du $\frac{1}{11}$ Sept. Je m'en vais maintenant le faire par ordre pour ne rien oublier; mais auparavant je vous remercieray d'avoir reparé l'erreur de Mrs. de Leipsich, touchant ma Progression dans l'Hyperbole, et sourtout de l'honneur que vous m'avez fait dans les Acta de Sept. dernier en publiant que mes escrits autrefois vous ont esté de quelque utilité.

Vous me parlez, à propos de la courbure de la Chaine, de vostre discours de Angulo Contactus et Osculi. Vous pouvez bien croire qu'en le lisant je ne trouvay pas cette consideration nouvelle, parce que ces sortes de contact entrent naturellement dans mes Evolutions des Lignes courbes. Je me souviens aussi que longtemps devant que de publier ce Traité j'avois communiqué à van Schooten quelque remarque la dessus, sçavoir de la circonference, qui coupant une parabole, semble la toucher au mesme point, c'est à dire que dans la parabole comme aussi dans les autres sections coniques il n'y a que le point du sommet ou une circonference la puisse baiser; cela arrive encore en plusieurs cas d'autres lignes courbes, quoyqu'il me semble que vous n'en avez rien dit.

Puisque j'ay bien jugé en quoy doit consister l'avantage que donne vostre nouveau calcul, je souhaiterois fort de voir comment il vous a fait trouver directement et sans effort d'imagination l'ἀπαγωγὴ de la Construction de la Chainette à la quadrature de l'Hyperbole ou aux Logarithmes. En effet vous devez donner au public l'exemple de vostre methode afin qu'on voie de plus en plus son utilité et que les geometres puissent profiter de vostre exercitation. Pour moy si je trouve en suite que j'aye quelque chose de different dans mes recherches et qui merite d'estre sçu, je le publieray aussi tres volontiers. Cela sera peu, mais il y aura pourtant une maniere fort belle pour parvenir à la construction de la Courbe, et que je sçay estre differente de la vostre par les choses que vous me mandez; comme aussi differente de celle de Mr. Bernoully, par ce que je conjecture de son escrit inseré aux Acta.

Pour ce qui est du doute que j'avois proposé, je me tiens plus que satisfait apres avoir vu vostre exacte justification. Il est vray que quand j'ay lu ces mots de querelle et d'avoir perverti le sens des paroles de Mr. Bernoulli, j'ay dit bona verba, car en effet j'y estois allé de bonne foy, et le soupçon qui m'estoit resté estoit de trop peu d'importance pour que vous usassiez de tels termes en le refutant. Quand je vous en parlay, c'estoit que j'aurois esté bien aise que vous eussiez esté aussi peu clairvoiant que moy, dans cette question. Socium tarditatis meae quaerebam. Ce que vous me dites de n'avoir rien pu tirer de France ni d'Italie, peut servir à me consoler, et marque qu'il n'est pas des plus faciles.

Ce n'est pas le jeune Bernoulli, mais l'ainé qui a travaillé sur la Ligne Loxodromique, et j'ay trouvé estrange qu'apres que vous eussiez donné la bonne Construction pour trouver la longitude par la quadrature de l'Hyperbole, il se soit avisé trois mois apres, d'en donner une qui demande la dimension d'un espace inconnu et qui comprend une etendue infinie; cela s'appelle expliquer ignotum per ignotius.

J'ay regardé dans le Tiphys Batavus de Snellius, depuis que vous m'en avez averti, comment il demontre par des propositions aisées, que cette invention des longitudes, scavoir quand la latitude et l'angle loxodromique est donné, depend de la somme des secantes. Il n'est pas allé plus loin, mais sçaviez vous, Monsieur, que Jac. Gregorius dans ses Exercitations geometriques a reduit cette somme à l'espace qui chez vous est VMCA, et qu'il a egalé cet espace à un espace hyperbolique? Je crois certainement que vous ne vous en estes point souvenu, non plus que moy, car j'aurois pu par là achever de trouver la construction de la Chainette, et plus facilement que par nostre calcul sur la Loxodromique, que je n'entendois pas, et que je n'ay demeslé que longtemps apres. Il paroit par un passage dans les notes de Albert Girard sur Stevin, qu'il doit avoir sçeu la solution de cette mesme question des longitudes, car il parle de la difference entre la methode de Snellius par la Table des sommes des secantes et la methode parfaite, qu'il dit estre beaucoup plus courte; et il propose la dessus ce probleme, dont il promet la solution; sçavoir quand l'angle loxodromique est donné de 89 degrés, combien de tours entiers, et de degrez de longitude par dessus, fera un vaisseau en partant d'un point sous l'Equateur, pour arriver à la latitude de 89 degrez, et combien le point ou il entrera dans ce parallele sera distant du lieu de son depart, le tout sans Tables. Je l'ay calculé par plaisir et j'y trouve 43 tours 85° 57'. On ne connoissoit pas en ce temps là la quadrature de l'Hyperbole; mais ce Girard avoit penetré bien avant en plusieurs matieres de Geometrie, comme je vois par quelques endroits de ces mêmes notes. Il se trompe pourtant au commentaire sur la Statique, par cordages, au sujet de la courbure de la ligne qui plie par son poids, laquelle courbure il pretend estre parabolique, et qu'il en a la demonstration.....

Ma maniere pour trouver les sommes des secantes, que vous voulez sçavoir, est telle. J'ajoute ensemble les secantes des arcs croissant par degrez entiers, ou par demi-degrez, jusques à l'angle donné. De leur somme je soustrais la moitié de l'excès dont la plus grande de ces secantes surpasse le raion. Alors le reste aura à la somme d'autant de rayons, fort pres la mesme raison (toutefois un peu plus grande) que la somme du nombre infini de secantes comprises dans l'angle donné à la somme d'un pareil nombre de rayons. Par exemple au raion 10000, la somme des secantes par demi-degrez jusques à 45 degrez inclusivement, est 1012061, d'où j'oste 2071, moitié de l'excès de la secante de 45° par dessus le rayon, reste 1009990, qui aura à la somme de 90 rayons, qui fait 900000, un peu plus grande raison que le nombre infini des secantes à pareil nombre de rayons. Je trouve aussi un terme mineur qui est 1009976, et qui est plus près du vray, mais il y a une regle de trois à faire. Suivant la Table de Snellius la somme des secantes jusqu'à 45 degrez par minutes est 30297330, quand le rayon est 10000. Il l'a posé de 10000000, pour faire le calcul de la somme plus juste, mais apres il a retranché 3 chifres. Or je trouve par ma regle que sa Table est fautive; car non seulement la raison de la somme de Secantes 30297330, à autant de rayons, qui font 27000000, mais aussi la raison de 30297330 moins 2071 à 27000000 devroit estre plus grande que celle des secantes infinies à autant de rayons. Laquelle par la regle parfaite des Logarithmes je trouve estre comme de 30299392 à

27000000. Donc la somme de Snellius est trop petite, et devroit avoir esté 30301463, scavoir 30299392 plus 2071. En supputant selon ma regle, et par demi-degrez, je trouve 30299700 pour le terme majeur, et 30299295 pour le mineur, ce qui confirme mon calcul, quoyque Snellius dit qu'il a fait le sien deux fois. Il y a peut-estre quelque faute dans la Table des Secantes. J'ay la demonstration de ma Regle, mais cecy est desia trop long. De quoy au reste peut servir le calcul de ces sommes, ou leur Table, puisque par les logarithmes les Problemes se resolvent beaucoup plus parfaitement.

Ce sera quelque chose de fort beau que vostre reduction des quadratures à celle du Cercle ou de l'Hyperbole, quand cela est possible, et j'espere que vous nous la communiquerez quand vous l'aurez perfectionnée, ou quand mesme il y manqueroit quelque chose. J'aimerois bien aussi de pouvoir reduire les dimensions des espaces inconnus à la mesure de quelque ligne courbe, quand ces deux quadratures n'ont point de lieu, mais je le crois le plus souvent tres difficile.

Vous aviez remarqué que la soutangente de la Logarithmique est constante, mais non pas, que je sçache, qu'elle representoit le quarré de l'Hyperbole.

Il me tarde de voir ce que produira Mr. Bernouilli l'ainé touchant la courbure du ressort. Je n'ay pas osé esperer qu'on y aboutist à rien de clair ni d'elegant; c'est pourquoy je n'ay rien tenté. Dans la recherche des nombres, le plus utile seroit de s'arrester aux Theoremes, dont il y en a des beaux, et qui peuvent servir dans des rencontres. Un nommé Rolle de l'Academie des Sciences à Paris a fait imprimer quelque traité en cette matiere, que je tascheray d'avoir, car on dit qu'il est fort habile.

Vous croiez à ce qu'il semble qu'il ne seroit pas extremement difficile d'achever de tout point la Science des Lignes et des Nombres. En quoy je ne suis pas jusqu'icy de vostre avis, ni mesme qu'il seroit à souhaiter qu'il ne restast plus rien à chercher en matiere de Geometrie. Mais cette etude ne doit pas nous empescher de travailler à la physique, pour laquelle je crois que nous scavons assez et plus de geometrie qu'il n'est besoin; mais il faudroit raisonner avec methode sur les experiences, et en amasser de nouvelles, à peu pres suivant le projet de Verulamius.

J'attendois depuis longtemps, selon ce que vous aviez promis, vostre methode pour les Tangentes, et je vois avec deplaisir que vous prenez à cette heure des precautions, comme doutant que je ne tiene pas ma parole. Mais quand nous envoierions en mesme temps nos escrits à Mr. Meier, comment serez vous assuré que j'auray dressé le mien de bonne foy? Si vous fuiez peut estre le travail, j'ay encore plus de raison de l'apprehender. Car Mr. Fatio, en partant il y a deux mois pour l'Angleterre, a repris la longue lettre où il m'avoit expliqué son invention; cette lettre aiant esté si fort changée et repetassée depuis que nous avions travaillé ensemble sur cette matiere, qu'elle estoit devenue tout autre. Ainsi je n'ay plus que les solutions des questions que nous nous proposames, et il faudra que de là je tire la regle. Il faut donc s'il vous plait m'exciter par vostre exemple et m'envoier sans defiance ce que vous avez promis, ou laissons là nostre marché.

Vous aurez vu ce que M. Bernoulli a annoncé dans le mois de Jul. de la part de son frere, qui auroit trouvé, qu'outre ma Cycloide il y a une infinité de courbes qui servent aux reciprocations isochrones. Je n'y vois pas d'impossibilité, mais je ne sçaurois croire qu'il nous construise aucune de ces courbes, si ce n'est peut estre par des espaces d'etendue infinie et inconnue, ce qui vaut autant que rien. Je le tiens cependant fort habile ce frere, et il me revient mieux que son ainé, qui est grandement obstiné à soutenir ce qu'il a une fois avancé. Temoin ce dernier escrit du mois de Jul, où il nous voudroit faire accroire que sa demonstration du Centre d'Oscillation (qui apres tout ne regarde que des poids enfilez en ligne droite) est plus evidente que la miene. Je vous en fais juge et demeure de tout mon coeur etc.

XXXV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 1 Janvier 1692.

Vous aurez receu sans doute ma lettre du 16 Novembre, puisque Mr. Meier m'a mandé qu'elle avoit passé par ses mains. J'ay attendu jusqu'icy vostre response, mais songeant que vous attendez peut-estre ce que j'auray à dire touchant vostre Escrit *) qu'il m'a envoié, je ne veux pas laisser une plus longue interruption à nostre correspondance, dont je tire du plaisir et de l'avantage. Vous sçaurez donc touchant cet Escrit que j'ay eu de la peine d'abord à l'entendre, estant encore peu accoutumé à vostre maniere de calcul, et ne demeslant pas assez bien les constructions qui resultent de vos solutions. Pourtant y estant retourné avec plus de loisir j'en suis venu à bout. Mais qu'ay je trouvé? J'ay vu, qu'en reduisant le Probleme renversé des Tangentes aux quadratures, vostre methode ne me donnoit pas ce que j'en esperois d'avantage, qui estoit de m'en pouvoir servir pour trouver les quadratures. Je sçavois fort bien celle de la Courbe que vous expliquez et demontrez, et comment par là on pouvoit construire la courbe dont la soutangente est $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, mais je croiois que par vostre methode on trouveroit cette courbe independament, et par elle la quadratrice de l'autre, ce qui n'est point. J'ay vu de plus, en essaiant vostre methode sur plusieurs courbes connues, faignant qu'elles ne le fussent point, mais seulement les proprietez de leurs tangentes, que toujours j'estois reduit à des quadratures impossibles, comme de l'Hyperbole ou du Cercle et autres, au lieu que par la methode de Mr. Fatio, l'on trouve l'Equation de la ligne cherchée sans aucune necessité d'en quadrer d'autres. Vous n'enseignez donc pas à discerner si la ligne cherchée est geometrique ou non, et s'il faut ces quadratures de l'Hyperbole et autres pour la construire. Par exemple, si la soutangente est $\frac{aax}{aa+yy}$, la construction de la courbe se reduit par vostre methode à la quadrature de l'Hyperbole, et à celle de la courbe $z \asymp \frac{a^4}{y^3+aay}$. Et de mesme si la soutangente est $\frac{bx+xx}{2b+x}$, vous viendrez derechef à la quadrature de l'Hyperbole et à celle d'une autre courbe, au lieu que Mr. Fatio n'a besoin d'aucune. On ne tient donc rien par vostre methode, si on ne sçait trouver les quadratures quand elles sont possibles, et connoitre quand elles sont impossibles en quoy je sçay par experience que vous avez quelque chose de beau; et cela paroit dans l'exemple que vous avez

*) Siehe am Ende dieses Briefes.

mis à la fin, où vous quadrez la courbe $aaxx + xxyy - aayy \bigcirc 0$. Je l'avois aussi trouvée, comme j'ay dit, mais c'avoit esté par rencontre, et mesme par cette quadrature que je donnay à Mr. Fatio, il trouva l'equation de la courbe à qui elle convenoit. Considerant tout ce que je viens de dire, et voiant de plus, Monsieur, que vous appellez cette methode qui reduit aux quadratures la meilleure des vostres pour ce probleme, il m'est aisé de conclure que vous ne m'en avez envoié qu'une petite partie, vous reservant d'y joindre par apres le reste, et qui fait presque le tout. Si je pouvois en faire de mesme en ce qui est de la methode de Mr. Fatio, je vous imiterois, mais elle est telle que vous en decouvrant une partie, ce seroit vous apprendre tout. Resoluez vous donc je vous prie à m'envoyer cette principale partie, afin que Mr. Fatio ne puisse pas me reprocher d'avoir troqué χρύσεα χαλκείων, car vous voiez bien apres tout que je ne suis pas seul maître de la chose.

En etudiant les exemples que vous donnez de vostre reduction, je me suis rendu vostre maniere de calcul un peu plus familiere qu'elle ne m'estoit, et je la trouve excellente pour representer avec facilité et clarté ces summas minimorum qui servent en beaucoup d'occasions. Mais je ne vois pas encore en considerant vostre equation de la Cycloide de quel secours elle seroit pour en deduire omnia circa Cycloidem inventa, comme vous dites. Car quand ce ne seroit que pour trouver l'espace compris de cette ligne et sa base, ne faudroit il pas emploier à peu pres les mesmes biais dont on s'est servi pour cette dimension. Et s'il faloit trouver le centre de gravité de la demie Cycloide, vostre calcul vous y meneroit sans ces profondes speculations de Mrs. Pascal ou Wallis? Vos expressions pourroient estre plus courtes, mais pour l'invention je crois qu'il faudroit passer à peu pres par les mesmes chemins. Si cela est autrement, vous me ferez plaisir de me detromper, afin que j'aye toute la bonne opinion de vostre calculus differentialis qu'il merite.

Si vous lisez l'Histoire des Ouvrages des Scavants qu'on publie icy de 3 en 3 mois, vous y trouverez quelque chose de moy en matiere de Musique, et qui regarde un nouveau systeme des Tons. Si Mrs. de Leipsich avoient envie de le mettre dans leurs Acta, je pourrois y adjouter encore quelques nouvelles considerations.

Je vous souhaite l'année nouvelle heureuse et suis etc.

Methodus, qua innummerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur.

Ex omnibus, quae nobis inquirenda restant in Geometria, nihil est majoris momenti, quam Methodus Tangentium Inversa, seu data tangentium lineae curvae proprietate, ipsam lineae constructionem posse invenire. Nam in applicatione Geometriae ad Physicam saepissime contingit, ut linea ex tangentium proprietate noscatur, unde constructio ejus aliaeque proprietates investigari debent. Datur autem, (fig. 27.) constructio lineae, quoties datur aequatio exprimens relationem inter AB abscissam in directrice inde a puncto fixo A, et BG ordinatim applicatam, normalem ad directricem; ita enim cuicunque puncto rectae directricis B assignari potest respondens punctum curvae G(G).

Porro data proprietate tangentium lineae curvae quaesitae, solet dari vel haberi aequatio exprimens relationem inter BT subtangentialem et AB vel BG abscissam vel ordinatam, aut ambas simul. Vocemus autem subtangentialem ipsam BT, partem axis cadentem inter ordinatam BG et tangentem GT. Itaque, si AB vocetur x et BG, y, et BT, t, res redibit ad aequationem, quam ex indeterminatis solae ingrediuntur x, y, t. Quo facto, quaeritur aequatio, quam, sublata t, duae tantum indeterminatae x et y ingrediantur. Ita ex data proprietate tangentium habebitur curvae constructio.

Ex aequationibus autem illis, quae exprimunt relationem ipsius t ad reliquas, eligamus illas simpliciores, in quibus valor ipsius t per x et y habetur pure; ut si sit $t = aa : x$, vel $t = ax : y$, vel $t = y\sqrt{(aa - xx)}$, vel $t = yy\sqrt{(aa + xx)} : ax$, aliisque modis infinitis. Itaque id nunc agitur ut ex dato valore subtangentialis per abscissam, vel ordinatam, vel ambas, detur aequatio exprimens relationem inter ordinatam et abscissam.

Habeo autem diversas vias, quibus magnum hoc problema in oblatis casibus aggredior; sed hanc optimam esse judico (quoties ea uti licet), ut problema tangentium inversum revocetur ad quadraturas. Analysis enim duorum est generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reduci-mus ad aliud facilius. Et quia saepe fit, ut prior methodus prolixis nimis calculis indigeat, confugiendum est non raro ad secundam; tametsi enim prior sit absolutior nec aliis indigeat praecognitis, commodior tamen est posterior, quia laborem minuit, jam inventis utendo.

Uti vero intelligatur, quomodo persaepe problema tangentium inversum ad quadraturas revocari nullo negotio possit, dicendum est aliquid de quodam calculi genere a me introducto, notisque novis in eo adhibitis; ita enim efficio, ut multa primo obtutu appareant, et ipso calculi lusu nascantur, quae alias vi ingenii aut labore imaginationis assequi necesse est. Nec aliam ego causam video, cur cl. Fatius, qui jam dudum praeclari ingenii specimina nobis dedit, haeserit ubi irrationales subtangentialis valorem ingrediuntur, velut in casu per Celeberrimum Hugenium mihi proposito, ubi $t = yy\sqrt{(aa - xx)} : ax$, quam quod hujusmodi expressio non aeque calculo analytico apta est, ac mea, per quem ipsius t relatio ad y et x aliquo modo generali exprimitur. Ita enim judico, cum mens humana ad cogitandum notis indigeat, eo posse nos ratiocinari melius, quo magis notae ipsae exprimunt rerum relationes.

Consideravi igitur tam abscissas quam ordinatas habere elementa quaedam momentanea, seu differentias indefinite parvas; et elementum abscissae esse ad elementum ordinatae, ut subtangentialis est ad ordinatam. Nam si cogitemus punctum mobile B ex fixo A egrediens percurrere axem AB(B), et adeo abscissas AB nihil aliud esse quam distantias puncti B mobilis a puncto fixo A, patet incrementa abscissarum momentanea B(B) esse ut velocitates, quas punctum B in quovis axis loco, aut quovis temporis momento habet, adeoque inassignabilis parvitatis; et similiter se rem habere cum ipsis GL incrementis ordinatarum, seu excessu ordinatae (B)(G) super proxime (id est inassignabili intervallo) praecedentem BG.

Haec incrementa, aut (si contrarium motum finges) decrementa, vel, ut generalius loquamur, elementa ordinatarum vel abscissarum, aut (si malis) differentias inassignabiles (quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio) notis designare volui, exprimentibus relationem ad id cujus sunt differentiae; itaque, quia abscissas AB vocavimus x, et ordinatas BC, y; elementa abscissarum seu differentias minimas B(B) vocabimus dx; et elementa ordinatarum seu differentias minimas GL vocabimus dy. Possemus ipsas dx vel dy peculiaribus exprimere literis, ut e, v, vel ut lubet, sed ita non appareret relatio ad x et y, quae tamen ipsis notis expressa plurimum juvat, modumque dedit mihi curvas transcendentes exprimendi per aequationes finitas, non alias adhibendo indefinitas quam x et y et harum affectiones, inter quas non tantum potentias aut (his reciprocas) radices, ut x^2, $\sqrt[3]{x}$, etc. sed et differentias et (his reciprocas) summas refero, harumque notas ad supplendum calculum promovendamque ad Transcendentes Analysin omnino aptas judico. Et quemadmodum non optime faceret qui pro x^2, x^3 etc. semper vellet adhibere literas e, v, ad evitandum hoc notationis genus, licet admoneret se per e et v quadratum aut cubum intelligere, ita similiter praestat saepe dx aut ddx (differentiam, aut differentiam differentiarum ipsarum x) adhibere, quam pro ipsis uti literis e aut v vel similibus. Sic cycloidem exprimo per hanc aequationem $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int dx : \sqrt{(2x - xx)}$, posito radium circuli generatoris esse 1, et x esse abscissam in axe inde a vertice, et y esse ordinatam ad axem, et dx esse incrementa abscissarum, et $\int dx : \sqrt{(2x - xx)}$ esse summam omnium $dx : \sqrt{(2x - xx)}$, seu quantitatem, cujus differentialis est ad differentialem abscissae, ut radius ad sinum, quae summa vel quantitas revera est arcus. Et hinc facillimo calculo, sine ullo figurae respectu, derivatur proprietas tangentium cycloidis nota, quae nostro modo expressa ita habet, $dx : dy = \sqrt{\overline{2x - xx}} : \overline{2 - x}$. Caeteraque omnia circa cycloidem inventa, pluraque alia similiter ex tali calculo analytice derivantur.

Sed ut nostrum institutum prosequamur; Producatur (B)(G) dum tangenti TG itidem productae occurrat in E, constat puncta (G) et E haberi posse pro coincidentibus, seu rectam (G)G, quae jungat duo curvae puncta inassignabiliter distantia, productam esse ipsam curvae tangentem. Cum dudum ab aliis explicatum sit, rectam, quae curvam secat, in duobus punctis, transire in tangentem eo casu, quo duo sectionis puncta coincidunt. Itaque EL non minus quam (G)L poterit vocari dy, et ob triangula TBG et GLE similia, fiet TB ad BG, ut GL ad LE, seu $t : y :: dx : dy$, idque ipsum est quod diximus, subtangentialem t esse ad ordinatam y, ut dx elementum abscissae ad dy elementum ordinatae; et quia prout de $t : y = dx : dy$, fiet $t = y\,dx : dy$, qui est generalis valor subtangentialis. Et hunc conjungendo cum speciali valore, quem natura problematis offert, perveniatur ad aequationem differentialem, quam ubi convertere licet in summatricem puram, habetur reductio problematis tangentium inversi ad quadraturas.

Quae reductio ut intelligatur melius, ostendam (quod momenti est maximi), quandocunque proprietas tangentium data exhibet valorem subtangentialis per solam (ex indeterminatis) abscissam vel per solam ordinatam, problema reducitur ad quadraturas. Ponamus enim t dari per x, utique quia $t = ydx : dy$, fiet $dy : y = dx : t$, adeoque $\int dy : y = \int dx : t$. Jam $\int dy : y$ pendet ex quadratura hyperbolae, et $\int dx : t$ etiam pendet ex aliqua quadratura, ejus nempe figurae, cujus ordinata est $1 : t$, posito nempe pro t poni ejus valorem per x. Itaque res reducta est ad quadraturas. Exempli causa, si esset $t = 1 : x$, fieret $\int dy : y = \int x\,dx = \frac{1}{2}xx$; et ita curva proposita haberetur ex quadratura hyperbolae. Si esset $t = 1 : \sqrt{1 - xx}$, fieret $\int dy : y = \int dx \sqrt{1 - xx}$, atque ita curva quaesita haberetur ex supposita quadratura tam circuli quam hyperbolae.

Similiter si t detur per y, quia $t = ydx : dy$, fiet $dx = dy \,.\, t : y$ adeoque $x = \int dy \,.\, t : y$. Quod si jam ex problemate detur valor ipsius t per y, intelligi poterit cujusnam figurae quadratura sit opus: nam ponamus esse $t = y$, fiet $x = \int dy$ id est $x = y$, et linea quaesita est recta. Si sit $t = yy$, fiet $x = \int dy \,.\, y$, seu $x = yy : 2$, et linea quaesita est parabola. Si $t = y^3$, fiet $x = \int dy \,.\, yy$, seu $x = y^3 : 3$ et linea est parabola cubica. Si t sit constans, verb. gr. si $t = 1$, fiet $x = \int dy : y$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura hyperbolae. Si t sit irrationalis, res itidem procedet, nam si ponatur $t = y\sqrt{1 - yy}$, fiet $x = \int dy \sqrt{1 - yy}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura circuli.

Sed si valor ipsius t detur per x et y simul, tunc non semper facile est problema reducere ad quadraturas. Infiniti tamen sunt casus ubi res procedit. Et generaliter hoc pronunciari potest: quandocunque valor subtangentialis t est productum ex duabus quantitatibus seu formulis, quarum una datur per solam (indeterminatarum) abscissam x, altera per solam (indeterminatarum) ordinata-tam y, tunc problema reducitur ad quadraturas. Exempli causa si sit $t = xy$, seu factum ex x in y, fiet $xy = ydx : dy$, seu $dy = dx : x$, seu $y = \int \overline{dx : x}$, quod pendet ex quadratura hyperbolae. Si sit $t = y : x$ seu factum ex y in $1 : x$, fiet $y : x = ydx : dy$, seu $dy = xdx$, seu $y = \int \overline{xdx}$; seu $y = xx : 2$, quae est aequatio ad parabolam. Si sit $t = x : y$, seu factum ex x in $1 : y$, fiet $x : y = ydx : dy$, seu $xdy = yydx$ seu $dy : yy = dx : x$ seu $\int \overline{dy : yy} = \int \overline{dx : x}$, quae datur ex quadratura hyperbolae, nam $\int \overline{dy : yy}$ datur absolute, nihil aliud enim est quam quadratura hyperboloidis secundi gradus. Sic si sit $t = y : \sqrt{1 - xx}$, seu factum ex y in $1 : \sqrt{1 - xx}$, fiet $y : \sqrt{1 - xx} = ydx : dy$, seu fiet $dy = dx\sqrt{1 - xx}$, seu $y = \int \overline{dx\sqrt{1 - xx}}$, quae pendet ex quadratura circuli.

Ad hanc jam classem revocatur et curva mihi proposita, cujus subtangentialis rectae valor praescriptus erat $t = yy\sqrt{aa - xx} : ax (1)$. Nam quia semper est $t = ydx : dy (2)$, fiet $y\sqrt{aa - xx} : ax = dx : dy (3)$ per (1) et (2). Sit $a = 1 (4)$. Ergo ex (3) et (4) fit $ydy = xdx : \sqrt{1 - xx}$ (5), et aequationem (5) utrinque summando, quia $\int \overline{ydy} = yy : 2 (6)$, fiet per (5) et (6) $yy : 2 = \int \overline{xdx : \sqrt{1 - xx}}$ (7). Id est, opus est tantum ut reperiatur quadratura generalis, seu indefinita, figurae cujus ordinata est $x : \sqrt{1 - xx}$, abscissa existente x. Haec autem quadratura habetur absolute. Nimirum $x : \sqrt{1 - xx}$ vocetur z (8). Jam centro (fig. 28) A radio AK, qui sit a vel 1, describatur circulus, in cujus circumferentia sumto arcu NC, et x seu AB sumta in normali ad AK, quae sit arcus sinui aequalis, jungatur radius AC et tangens arcus CF, ipsi AK productae occurrens in F, erit z. Nam ob triangula similia CBA et ACF fiet z seu FC ad AC seu 1, ut AB seu x ad BC seu $\sqrt{1 - xx}$; unde z seu FC est $x : \sqrt{1 - xx}$, ut jubet aequatio (8). Si ergo FC translata in BH ordinatim applicetur ad AB angulo recto, ut fiat linea curva AHH, habebitur figura ABHA, per cujus quadraturam reperietur quaesita y.

Porro ex C in AK agatur normalis CM, ajo rectangulum MKA aequari trilineo ABHA, adeoque infinitum spatium AN etc. HA aequari quadrato radii. Quod sic ostendo. Per punctum Q in CF indefinite vicinum ipsi C, agatur in CM et AB normalis QPR et alia Qβ normalis ad AK, et MC producatur in S, ut sit MS aequ. AK radio; et, ob triangula CPQ et ACF similia, fiet AC : CF :: CP : PQ, seu AC in PQ = CF in CP. Jam est AC in PQ = SM in $M\beta$, et CF in CP = HB in BR; ergo SM in $M\beta$ = HB in BR, adeoque et summa omnium rectangulorum SM in $M\beta$, id est rect. SMK aequatur summae omnium rectangulorum HB in BR, seu areae ABHA, quod asserebatur. Habetur ergo quadratura proposita.

Hinc jam constructionem lineae quaesitae ita ducemus. Area ABHA seu $\int \overline{xdx : \sqrt{1-xx}}$ = rect. SMK seu $1 - \sqrt{1-xx}$ (9). Ergo ex aeq. (7) per (9) fit $yy : 2 = 1 - \sqrt{1-xx}$ (10), quae aequatio est ad curvam quaesitam. Unde si tollamus irrationalitatem, fiet $y^4 : 4 - yy + 1 = 1 - xx$ (11), et ad supplendos gradus ex lege homogeneorum, pro 1 restituendo a, fiet $y^4 = 4aayy - 4aaxx$ (11). Constructio autem erit talis. Inter duplam MK et radium AK sumatur media proportionalis, quae erit y quaesita (ex aequ. 10) eique aequalis BG ordinatim applicata ad AB angulo recto dabit curvam AGV quaesitam, cujus ultima ordinata NV aequabitur rectae KN seu lateri quadrati circulo inscripti. Et in hac linea, si sit AB,x et BG,y, et AN,a, tunc subtangentialis BT, seu t, erit $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, ut desiderabatur*).

XXXVI.

Leibniz an Hugens.

A Hannover 29 Decembre (V. S.) 1691.

Vous jugés bien que la lecture de votre lettre me devoit surprendre, aussi n'y manquait-elle pas. Neantmoins je m'avisay qu'il est plus commode de rire de la malice de quelque esprit malin, qui nous veut donner tousjours de quoy contester, que s'en fascher. Et puisque j'espere que vous n'aurés pas encor communiqué à Mr. Fatio, il nous est aisé de sortir d'affaire. Vous et luy

*) Die Methode Fatio's, von der in diesen Briefen die Rede ist, entwickelt Hugens in einem Briefe an den M. de l'Hospital vom 23 Jul. 1693 (Sieh. Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae ed. Uylenbroek. Fasc. I. p. 269 sqq).

vous garderés sa methode, d'où, excepté quelque canon ou abregé, que je pourray bien tirer moy mesme de ma regle generale quand j'y voudray penser, je ne croy pas de pouvoir apprendre beaucoup; et bien que je n'aye pas gardé la mienne, vous aurés la bonté de ne la point communiquer. Il est vray que vous aurés l'avantage sur moy de garder l'une et l'autre; mais il n'y a pas grand mal, et je vous laisse juger vous même, si vous y avés appris quelque chose qui merite que vous me fassiés quelque autre communication reciproque. Je ne crois pas d'en pouvoir user plus honnêtement; quelque sujet qu'un autre croiroit avoir de se plaindre, j'aime mieux d'estre creancier, que de donner sujet aux autres de se plaindre de moy avec ou sans raison. C'est ce qui fait que je ne suis pas trop faché de n'avoir pas receu l'écrit de Mr. Fatio en echange du mien. Vous m'auriés fait un procès, pour m'obliger à donner d'avantage, maintenant je suis à couvert de tout reproche. Et comme mon malheur n'est pas fort grand, il m'est aisé de practiquer en cette rencontre les regles de Cardan de *utilitate ex adversis capienda*.

Je veux pourtant dire quelque chose à vos raisons. J'avois promis de vous donner la solution d'un certain probleme, et vous me promistes en échange la solution d'un autre par la methode de Mr. Fatio. J'ay satisfait à ma promesse, car je puis dire en verité que pour le resoudre, je n'eus besoin que precisement de ce que j'ay mis dans mon papier, car je reduisis le probleme à une quadrature qui me paroissoit sauter aux yeux, sans avoir besoin d'une methode particuliere pour les quadratures, je devois donc attendre quelque chose de reciproque. Il est vray que cette methode est bonne. Mais ne mandâtes vous pas, Monsieur, que celle de Mr. Fatio l'est aussi? Si on me donnoit un probleme du 6e degré à resoudre, et que je l'eusse reduit à une equation du 5e degré, qui fut divisible en cette rencontre, on auroit tort de me demander une methode generale de donner les racines du cinquième degré, parcequ'elles ne sont pas tousjours divisibles. Il me semble qu'on devroit se contenter de la methode que j'aurois donnée, de reduire au 5e degré une infinité des cas du 6e. Si vous ou Mr. Fatio avés deja sçu avant mon papier cette methode de reduire aux quadratures tous les problemes qui j'y enseigne d'y reduire, j'avoue que vous n'aurés rien appris de nouveau. Mais il me semble que vous ne dites pas cela. Et moy j'estime assés cette methode pour quitter de bon coeur la pensée de la troquer contre celle de Mr. Fatio. Si quelqu'un peut donner l'art de reduire tousjours la converse des tangentes aux quadratures, il donnera ce que je souhaitte de plus en cette matière, et je donneray volontiers en échange ma methode des quadratures. Quoyque j'aye une autre methode qui reussit, lorsque la courbe, dont la proprieté des tangentes est donnée, depend de la Geometrie ordinaire, j'aime pourtant mieux la voye des quadratures, parcequ'elle sert tant pour les courbes transcendantes que pour les ordinaires. Je m'estonne que mes caracteres vous pouvoient encor paroistre difficiles, puisque vous aviés déja compris les elemens de ce calcul, que j'avois donné dans les actes de Leipzig. Je m'etonne aussi que vous avés cru d'apprendre de moy la methode de trouver la courbe dont il s'agissoit independamment des quadratures, puisque vous sçaviés déja par mes precedentes que j'aimois à me servir de la voye des quadratures. Et puisque vous avés voulu vous charger de recevoir quelque chose de la part de Mr. Fatio, j'avois droit de croire que vous seriés autorisé de donner reciproquement. Et c'est pour tout cela que cet échange par l'entremise d'un tiers auroit esté le plus raisonnable. Enfin vous dites que, puisque je ne donne qu'une partie de ma methode, il n'est pas juste que je reçoive celle de M. Fatio tout entiere. Mais je reponds que cette partie de la mienne vaut peut estre bien la sienne toute entiere, et c'est assés qu'elle suffit dans une infinité de rencontres et mêsmes dans les transcendantes, ou la sienne et aucune autre donnée jusqu'icy n'avoit servi. Pour ne pas dire, qu'encore la methode de Mr. Fatio est divisible en parties, puisque vous me mandâtes qu'a force d'y mediter depuis il l'avoit poussée bien avant. Mais quelle qu'elle puisse estre, je desire que la mienne ne soit plus communiquée en échange.

Je me souviens qu'autres fois, lorsque je consideray la cycloide, mon calcul me presenta presque sans meditation la pluspart des decouvertes qu'on a faites la dessus. Car ce que j'aime le plus dans ce calcul, c'est qu'il nous donne le même avantage sur les anciens dans la Geometrie d'Archimede, que Viete et des Cartes nous ont donné dans la Geometrie d'Euclide ou d'Apollonius; en nous dispensant de travailler avec l'imagination.

Je viens maintenant à vôtre precedente, je crois bien que vous avés vû que le cercle qui se decrit du point de la courbe evolue, et dont le rayon est la moindre droite qu'on peut mener de ce point à la courbe decrite; mais peut-estre n'aviés vous pas songé d'abord à le considerer comme la mesure de la courbure, et moy, lorsque j'avois consideré le plus grand cercle qui touche la courbe interieurement, comme la mesure de la courbure ou de l'angle de contact, je ne m'etois pas avisé de songer aux evolutions. Je conçois fort bien que vôtre maniere de reduire la chainette à la quadrature de l'Hyperbole est differente des nostres. Je tacheray de publier un jour ma methode des reductions, qui est generale intra certos limites. Je les ay déja franchis, mais je n'ay pas encore eu le loisir de pousser la chose, et c'est ce que je souhaiterois de faire avant que la publier.

Quand j'avois parlé de querelle, il me semble que mes paroles marquoient assés que je ne la mettois pas au nombre de celles qu'on prend à coeur; aussi l'appellay-je (ce me semble) petite querelle.

Quand Mr. Bernoulli avoit envoyé à Mrs. de Leipzig ce qu'il donnoit sur la Loxodromie, il n'avoit pas encore vû ce que j'avois donné la dessus.

J'ay vû autres fois les Exercitations de Jacobus Gregorius, et peut-estre que vous me les aviés monstrées vous même. Mais il faut que je n'aye pas consideré alors avec attention ce qu'il avoit dit de la loxodromie, car il ne m'en esté resté aucune idée. Il est seur qu'Albert Girard estoit un grand Geometre pour son temps, et il se peut qu'il ait remarqué quelque rapport entre les logarithmes et les loxodromies.

Quand même on a trouvé les regles parfaites, je ne laisse pas d'estimer les moins parfaites sur des matieres difficiles, parce qu'elles peuvent servir en d'autres cas, c'est pourquoy je trouve que vôtre methode pour la somme des secantes meriteroit encor d'être publiée avec sa demonstration.

La remarque du defaut des tables de Snellius est considerable. J'avois mis autres fois dans mon traité de la quadrature arithmetique la quadrature de l'espace de la Logarithmique pour la soutangente ou par le quarré de l'Hyperbole qui en resulte. Mais suivant mon calcul il me semble que ce sont des choses qui s'entendent presque d'elles mêmes. Car dans la logarithmique, est $dy = \frac{y}{a} dx$; donc les dx (elemens de l'abscisse x) estant constantes, les dy (elemens de l'ordonnée y) sont proportionelles aux y, et par consequent les y sont en progression geometrique lorsque les x sont en progression arithmetique. C'est à dire les x sont les logarithmes des y. Donc la courbe est la Logarithmique. Or cette même equation fait connoistre, que $dx = \frac{a\,dy}{y}$, ou $x = a\int\frac{dy}{y}$ ou $= a\int(dy : y)$, ce qui fait voir comment cette même logarithmique depend encor de la quadrature de l'hyperbole et comment sa soutangente a se rapporte à cette hyperbole.

Quand je parle de la perfection de la Geometrie et de l'Arithmetique, je l'entends avec quelque latitude. Je crois qu'on pourroit parvenir à pouvoir donner tousjours la methode des solutions, ou à en demontrer l'impossibilité, mais ce ne sera pas tousjours par les meilleures voyes. Par exemple il faudroit qu'on pût tousjours trouver s'il est possible de resoudre les problemes semblables à ceux de Diophante en nombres rationaux, ou de donner des quadratures par la Geometrie ordinaire. Et je croy que cela se peut tousjours. Mais quant au point de trouver les chemins les plus courts, je croy que les hommes auront encor à chercher pour longtemps. Je n'ay rien encor vu de Mr. Rolle, si non dans le Journal des Scavans. Je suis de vôtre sentiment, Monsieur, qu'il faudroit suivre les projets de Verulamius sur la Physique, en y joignant pourtant un certain art de deviner, car autrement on n'avancera gueres. Je m'etonnerois si Mr. Boyle, qui a tant de belles experiences, ne seroit arrivé à quelque theorie sur la chymie, apres y avoir tant medité. Cependant dans ses livres et pour toutes consequences qu'il tire de ses observations, il ne conclut que ce que nous scavons tous, scavoir tout se fait mecaniquement. Il est peut-estre trop reservé. Les hommes excellens nous doivent laisser jusqu'à leur conjectures, et ils ont tort, s'ils ne veuillent donner que des verités certaines. Cela soit encor dit à vous même, Monsieur, qui avés sans doute une infinité de belles pensées sur la Physique. Il me tarde de voir dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans ce que vous y donnés sur la Musique, et je vous repond, que Mrs. de Leipzig seront ravis de mettre dans leur actes ce que vous leur donnerés sur quelque matiere que ce soit.

Il me semble que Mr. Bernoulli a des pensées un peu embarrassées sur le centre d'oscillation, et je m'etonne qu'il se peut figurer que cette perte du mouvement, qu'il y trouve, est employée sur l'axe, bien que cette perte doit avoir lieu, quand on suppose l'axe absolument inébranlable, ou il ne petit point. Je ne crois pas qu'après ce que vous avés donné sur cette matiere on ait besoin de chercher d'autres demonstrations. Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle Mr. Bernoulli?

Que dites vous, Monsieur, d'un petit livre d'un nommé M. Eisenschmid de la figure de la terre? Il pretend prouver en comparant les differentes mesures de la terre données en des latitudes differentes (qu'il juge n'estre pas si fautives qu'on croyoit) que l'axe de la terre est le plus long diametre de la sphaeroide, au lieu que, selon vous et Mr. Newton, elle seroit plus enflée sous l'equateur.

On m'a dit qu'un certain homme avoit proposé les longitudes et que vous aviés esté commis pour examiner sa proposition. Il me semble qu'on devroit surtout songer à pousser à bout ce qui se peut faire par vos horloges.

Je vous avois prié un jour de quelques observations sur les couleurs, que Mr. Newton vous avoit communiquées. Au reste je souhaitte que cette année vous soit heureuse avec une longue suite d'autres. Je suis faché que Mr. Roberval a plus vecu que Mr. des Cartes; c'est pourquoy vous devés songer, Monsieur, combien il nous importe de vous garder. Je suis avec passion, etc.

XXXVII.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce 31 Dec. V. S. 1691.

Ma derniere vous aura esté rendue, ou j'ay reponde aux vostres, et je m'y rapporte; repetant les bons souhaits que j'ay faits.

Maintenant j'oserois bien vous supplier de me faire la grace de faire tenir la cy-jointe à M. le Comte de Windischgraz Ambassadeur de l'Empereur, qui se trouve à la Haye.

J'ay fait sçavoir à Mrs. de Leipzig que vous pourriés bien leur faire l'honneur de leur communiquer quelque chose touchant la Musique, pour estre mis dans leur journal.

Je suis avec zèle etc.

XXXVIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 4 Fevr. 1692.

Je n'aurois pas tant tardé à repondre à vostre derniere sans un rhume accablant qui me tient depuis 15 jours avec des maux de teste continuels. Je croiois effectivement que vous ne m'aviez envoié qu'une partie de vostre methode, trouvant qu'elle ne me pouvoit servir, que lorsqu'on a reduit le Probleme renversé des Tangentes à la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole, et qu'on connoit en mesme temps, qu'il n'est pas resoluble à moins; comme dans l'exemple de la Logarithmique et ailleurs. Considerant aussi comme un defaut a vostre regle qu'elle reduit souvent à ces quadratures impossibles, quoy que la courbe cherchée ne soit que geometrique. Cependant je ne laisse pas de vous estre obligé et vous communiqueray volontiers quelque chose de mes inventions en revenche, si j'en ay que vous puissiez souhaiter. Au reste j'ay bien fait, à ce que je vois, de n'avoir pas envoié à Mr. Fatio la copie de vostre écrit ni rien du contenu. Et*) il semble mesme, que comme vous ne croiez pas pouvoir beaucoup profiter de sa methode, il ne souhaite pas grandement la vostre, car il me mande qu'en une infinité de cas il sçait trouver l'equation de la courbe par la proprieté de la Tangente donnée, avec des incommensurables complexes, et qu'il en a fait l'essay avec succes pour la soutangente que j'avois donnée $\frac{yy\sqrt{(aa-xx)}}{aa}$, sans avoir recours à aucune quadrature.

*) Diese Worte bis „il ne mande" sind in dem vor mir liegenden Briefe Hugens's durchgestrichen; ich kann nicht entscheiden, ob es von Hugens oder von Leibniz geschehen ist.

Il pourroit entreprendre, à ce qu'il m'escrit, une seconde edition du livre de Mr. Newton, qui fourmille de fautes d'impression, et en a mesme pour la doctrine, que l'autheur avoue. Il pretendroit de l'éclaircir en mesme temps, et y joindre quelque chose du sien.

Ce que vous me dites de l'effet de vostre calculus differentialis dans les recherches touchant la Cycloide, a dire la verité, me semble peu croiable. Vous apportez une nouvelle facilité au calcul, mais ne donnez pas l'invention qu'il faut pour la solution des problemes extraordinaires; non plus que Viete par l'Algebre.

Il me semble que Verulamius n'a pas omist cet art de deviner dans les Physique sur des experiences données en considerant l'exemple qu'il donne au sujet de la chaleur dans les corps des metaux et autres, où il a assez bien reussi, si ce n'est qu'il n'a pas pensé au mouvement rapide de la matiere tres subtile, qui doit entretenir quelque temps le bransle des particules des corps.

Mr. Boyle est mort, comme vous sçaurez desia sans doute. Il paroit assez étrange, qu'il n'ait rien basti sur tant d'experiences dont ses livres sont pleins; mais la chose est difficile, et je ne l'ay jamais cru capable d'une aussi grande application, qu'il faut pour establir des principes vraisemblables. Il a bien fait cependent en contredisant a ceux des Chymistes. Je suis de vostre avis en ce que vous souhaitez jusqu' aux conjectures des hommes excellents en ces matieres de Physique. Mais je crois qu'ils nuisent beaucoup, lors qu'ils veulent faire passer leur conjectures pour des veritez, comme a fait Mr. des Cartes, parceque ils empeschant leurs sectateurs de chercher rien de meilleur.

Vous pourrez avoir vu maintenant ma division de l'Octave en 31 parties egales, et ne disconviendrez pas de l'utilité et singularité de cette division, de sorte que j'attens vostre approbation. Dans la Table à la colonne 6e, le quatrieme et cinquieme nombre doivent estre 4,7577249674, et 4,7768024924 et 12me doit commencer par 4. Que jugez vous, Monsieur, de la methode de Mr. Tschirnhaus pour les quadratures. Il ne semble pas qu'il ait voulu estre entendu; mais il doit estre moins obscur pour vous, qui en scavez pour le moins autant que luy.

Je me souviens qu'il donna la quadrature d'une courbe que vous aviez proposée dans les Acta de Leipsich, ce qui me semble estre beaucoup. Je suis etc.

XXXIX.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce $\frac{9}{19}$ de Fevrier 1692.

Vous m'avés allarmé en me parlant de vostre indisposition. Je scay assez combien les sciences sont interessées dans vostre conservation. Vous pouvez faire des choses si importantes en Physique, que je fais conscience de vous donner occasion de trop rever à la Geometrie.

Je ne scay si vous avés vu un petit livre d'un nommé Eisenschmid, de Strasbourg, de figura terrae, où il pretend prouver, en conferant ensemble les differentes observations de ceux qui ont voulu donner la mesure de la terre, ou la grandeur d'un degré, qu'ils ont varié selon qu'ils se sont plus approchés du pole, et par consequent, que la terre est elliptique en effect, mais qu'elle est plus enflée sous les poles, au lieu que selon vous et Mr. Newton elle doit estre plus enflée sous l'equateur. Cela merite d'estre consideré.

Le Livre de Mr. Newton est un de ceux qui meritent le plus d'estre perfectionnés et Mr. Fatio fera bien de s'y appliquer. Je ne m'etonne pas si parmy tant de recherches difficiles, il s'y est glissé quelque faute de doctrine.

Cette reduction aux quadratures, que vous appellés impossible, est ce que je souhaiterois de pouvoir toujours obtenir pour les problemes des tangentes renversées. Enfin je ne demande presque que cela pour la perfection de la plus importante partie de la Geometrie. Il se peut bien que nous ne nous entendions pas, puisque une chose de fait, que j'avois rapportée, vous paroist peu croyable.

Il est vray, comme vous dites, Monsieur, qu'il n'est pas assez de faciliter le calcul, il faut souvent quelqu'autre chose.

Cela se voit dans l'Algebre meme. Pour scavoir l'Algèbre on ne s'avisera pas d'abord de trouver les racines irrationelles des racines cubiques, à la maniere de Scipio Ferreus, ni de la division des equations egalées à zero par leur racines. Il en est de même de mon calcul transcendant. Mais quand on a reduit les methodes à un simple calcul, on s'avise plus aisément de ces adresses.

La methode des quadratures, que Mr. Tschirnhaus a publiée, quand elle est bien entendue, revient à une partie des miennes. Je luy en avois parlé bien des fois à Paris, et ce n'est que par oubli qu'il peut avoir cru de donner quelque chose de nouveau. Cependant il me semble, qu'il s'y prend d'une maniere bien embarassée. Et de plus ce qu'il donne n'est pas si general qu'il avoit cru. Je luy donnay une instance que je fabriquay sur la lunule d'Hippocrate; cela l'arresta. Au bout de quelques années quand je n'y pensois plus (car je n'avois pas voulu le pousser) il avoit fait quelque calcul sur les lunules (comme son discours temoigne assez) et cela l'avoit fait rencontrer ce calcul, et luy avoit fait voir la quadrature. Mais ce n'estoit pas et ne peut estre pas la methode qu'il avoit proposée.

Un de ces jours je pourray m'appliquer derechef a cette matiere, pour la mettre dans son jour.

La Methode de Mr. Fatio pour les tangentes renversées, autant que j'en puis juger, ne peut servir que pour les courbes ordinaires, au lieu que la mienne donne et les ordinaires et les transcendantes. Je crois de vous avoir déja dit, Monsieur, que j'en ay une aussi qui est propre aux ordinaires, par le moyen de laquelle je pourrois fabriquer quantité de canons particuliers, tels que je crois que M. Fatio a; mais je ne m'y amuse point, et je pense la rendre un jour universelle pour determiner s'il est possible de trouver une ligne ordinaire satisfaisante. Mais j'ay dit que, pour en rendre l'usage court et facile, il faudroit dresser quelques tables.

Vous avés raison, Monsieur, de dire que Descartes a parlé d'un ton trop decisif de l'arrangement des parties de la matiere, cependant ce seroit dommage si nous n'avions pas son systeme. Ainsi je voudrois que Mr. Boyle nous eut laissé ses conjectures. Mais c'est encor plus dommage que ses plus curieuses experiences le plus souvent ne sont rapportés qu'a demy. Tantost il s'excuse parcequ'un amy ne luy donne pas le pouvoir de les publier; tantost sur quelqu'autre raison.

La negligence de nos libraires fait que je n'ay pas encor veu l'Histoire des ouvrages des scavans ni vostre division de l'octave. Elle est de vous. c'est tout dire. Plust à Dieu que vous pensassiés à donner vos conjectures sur les parties de la matiere; car nous avons bien des connoissances que Descartes n'avoit pas, dont je ne connois personne qui puisse mieux user que vous pour en tirer de consequences.

Il est vray que le chancelier Bacon scavoit quelque chose de l'art de faire les experiences et de s'en servir; mais ce que vous dites de feu Mr. Boyle, est encor veritable à son égard, qu'il n'estoit pas capable d'une assez grande application pour pousser les consequences autant qu'il faut.

J'espere que vostre santé sera retablie; ce sera une des plus agreables nouvelles que je pourray recevoir. Je vous avois encor écrit une seconde lettre, et je m'etonne qu'il ne paroist pas que vous l'ayiés receue. Je suis avec zele etc.

XL.

Hugens an Leibniz.

15 Mars 1692.

Je vous suis fort obligé de ce que vous temoignez de prendre interest à ma santé, qui depuis ma derniere a encore beaucoup souffert de la migraine pendant cette longue gelée.

Vous avez trop bonne opinion de mes forces à approfondir les matieres de Physique. Vous voulez m'animer à cette estude, à quoy contribueroit beaucoup, si je sçavois que les essais, que j'en ay donné dans mes derniers traitez, sont dans vostre approbation. Il n'y a jusqu'icy que le seul Mr. Papin qui m'ait envoié des objections, que je crois avoir bien resolues.

J'ay vu l'extrait du traité de Mr. Eysenschmid dans les Acta. Il m'en semble qu'il bastit sur un fondement fort peu seur, scavoir les differentes mesures qui ont esté faites du globe terrestre. Car on scait combien different entre eux les observateurs qui ont travaillé sous le mesme climat. On observe d'ailleurs que Jupiter est elliptique dans le sens de Mr. Newton et de moy, et la raison le veut, au lieu qu'il n'y en a point pour la figure elliptique de Mr. Eysenschmid. Je souhaite fort d'apprendre par la relation de ceux qui sont allez avec mes horloges au Cap de bonne Esperance, si le retardement de leur mouvement (qui comme vous scavez a la mesme cause que nostre pretendue figure de la Terre) sera confirmé de mesme, que je l'ay remarqué dans le voyage precedent. Ces observateurs se trouverent malades, lorsque les vaisseaux qui les devoient remener passoient au Cap, ce qui retardera leur retour peut-estre d'un an entier; et il faudra attendre jusques là pour scavoir le succes de la mesure des longitudes, parcequ'en allant vers là ils n'ont pas pu se regler sur les horologes, pour n'avoir pas eu le loisir en partant d'examiner leur mouvement par le soleil. Il est vray qu'il y a un homme en ce païs qui a proposé à Mrs. les Etats son invention pour les longitudes, et que j'ay esté employé avec d'autres pour l'examiner. Mais il n'y avoit rien de bon ni de nouveau, et il n'y a eu personne qui ne l'aït condamné. Cependant de puissantes recommandations de quelques ignorants luy ont fait avoir 2000 fr. de la Compagnie des Indes Orientales malgré elle, lequel argent est assurement tres mal emploié. Il pretendoit se servir des observations de la lune, et avoit eu commerce avec le professeur Wasmuth qui estoit un visionaire.

Mr. de Tschirnhaus ayant promis avec tant d'assurance de donner la quadrature de toute ligne courbe proposée, ou de prouver qu'elle est impossible, ne s'est il trouvé personne qui l'ait mis à l'epreuve en luy proposant quelque courbe geometrique un peu composée? Je crois assurement qu'il se seroit trouvé court, ayant un peu examiné cette matiere depuis quelque temps. Je vois qu'on peut en supposant autant qu'on veut de quadratures, trouver les courbes à qui elles convienent, mais d'aller de l'equation à la quadrature, je n'y vois pas moyen si non en quelques cas simples. Il y a de remarques à faire, mais elles ne vont guère loin; de sorte que je doute mesme, si lorsque vous m'avez donné la quadrature de la courbe $y^4 - 8aayy + 16aaxx \infty 0$, que je vous avois proposée, vous ne l'avez pas trouvée, Monsieur, dans quelque Table de quadratures que vous eussiez faite. Cela me paroit plus vraisemblable depuis qu'un certain mathematicien de Zelande m'a envoié un petit traité, où il y a une telle table, qui contient entre autres cette mesme courbe et sa quadrature.

Mr. Fatio me mande qu'il veut bien que je vous fasse part de sa Methode des Tangentes renversée, mais je ne sçay pas maintenant si vous souhaitez, ou si vous avez besoin, que je vous l'explique, de quoy vous m'informerez, s'il vous plait. Il croit que Mr. Newton sçait sur cette matiere et tout ce que luy, et tout ce que vous, Monsieur, ayez jamais trouvé et encore bien d'avantage, et que mesme il en publiera quelque traité. Je suis etc.

J'ay eu soin de vostre lettre à Mr. le comté de Windischgras, aussitost que je l'eus receuë.

XLI.

Leibniz an Hugens.

Hannovre $\frac{1}{11}$ d'Avril 1692.

J'espere que vous serés parfaitement remis de l'incommodité dont parloit vostre precedente, et je vous souhaite une santé ferme afin que vous puissiés achever les belles meditations que vous avés. Je continueray tousjours de vous exhorter à tourner vos meditations sur la Physique. Je crois d'avoir marqué plus d'une fois que vos derniers traités m'ont plu infinement. Cette explication du cristal d'Islande est comme une epreuve de la justesse de vos raisonnemens sur la lumiere: il y avoit une seule circonstance sur laquelle vous ne vous aviez pas encore satisfait, mais peut-estre qu'elle aura esté éclaircie depuis.

Il y a bien de l'apparence que la pesanteur vient de la même cause qui a rendu la terre ronde, et qui arrondit les gouttes, c'est à dire du mouvement circulaire de l'ambient en tout sens. Et c'est apparemment aussi la raison de l'attraction des planetes vers le soleil, tout comme les planetes gardent une certaine direction magnetique à l'exemple de celle qui se voit en terre. Si nous concevons l'attraction des corps pesans, comme par des rayons emanans du centre, nous pouvons expliquer pourquoy les pesanteurs des planetes sont en raison doublée reciproque de leur distance du soleil, ce qui se confirme par les phenomenes. Cette loy de la pesanteur jointe avec la trajection de Mr. Newton, ou avec ma circulation harmonique, donne les ellipses de Kepler confirmées par les phenomenes. Or il est manifeste qu'un corps est illuminé par un point lumineux en raison doublée reciproque des distances. Je crois qu'encor, selon cette maniere d'expliquer la pesanteur, par la force centrifuge d'un fluide tres subtil, on peut concevoir comme des rayons d'attraction, ces efforts du fluide n'estant autre chose en effect que de tels rayons qui font descendre les corps dont le mouvement circulaire est moins rapide. Il semble outre cela qu'une maniere de tourbillon est necessaire dans le ciel pour expliquer les parallelismes des axes, à quoy le mouvement spherique en tout sens ne scauroit suffire, il faut dés poles et des meridiens. Enfin la correspondance qu'il y a des planetes ou satellites d'un même systeme est favorable à une matiere liquide deferante commune. Mr. Osanam a mis dans son Dictionnaire mathematique une hypothese de Mr. Cassini, qui, au lieu des ellipses de Kepler, concoit des figures ellipsoides, où le rectangle des droites menées de deux foyers aux extremités est égal à un rectangle donné. Je ne scay s'il en donnera quelque raison physique. En attendant je trouve les ellipses de Kepler fort à mon gré, puisqu'elles s'accordent si bien avec la Mecanique, et peut estre que les aberrations viennent des actions des planetes entre elles et du mouvement du fluide deferant, sans parler des irrégularités de la matiere.

J'avoue que le fondement de Mr. Eisenschmid est mal assuré et on ne voit aucune raison a priori de son hypothese. Le temps decidera les choses à quoy vos horloges contribueront beaucoup. C'est une chose plaisante que des gens, comme feu Mr. Wasmuth et comme son eleve ou amy, qui a fait sa proposition à la Compagnie des Indes, trouvent de la creance.

La Reine Christine persuadée par l'administrateur des ternes de la couronne de Suede, dont elle jouissoit, avoit fait une somme très considerable au premier pour achever ses tables, qui devoient regler le ciel et la terre et perfectionner l'Astronomie, et la Chronologie, le tout sur les fondemens de l'Ecriture Sainte mystiquement expliquée.

Il s'en faut beaucoup sans doute que Mr. Tschirnhaus ait donné la veritable methode des quadratures. Il est vray que ce qu'il aura publié suivant les veues dont je luy avois fait part dès Paris peut servir. Mais il ne suffit pas et on s'engage dans des calculs horribles si ce n'est qu'on ait certaines tables toutes faites. Je croy de vous avoir marqué plus d'une fois, que ce n'est pas par cette voye que j'ay coutume de trouver les choses. J'en ay une autre, qui me paroist la plus veritable et la plus naturelle; elle donne alternativement la solution par la Geometrie ordinaire, ou la reduction au Cercle ou à l'Hyperbole; je ne l'ay pas encor poussée au dela de certains limites, mais il ne tient qu'à moy de le faire. Je seray bien aise de scavoir avec vostre permission, quel est ce petit livre qui contient des tables des quadratures. Je pourrois faire de telles tables, mais je n'ay jamais pris la peine d'en faire.

Je suis obligé à M. Fatio qui m'offre sa methode des Tangentes, mais croyant d'en scavoir à peu près la fonds, je ne voudrois pas luy donner de la peine. Je souhaitte une methode plus absolue en cette matiere, qui donnât encor la reduction lorsque la courbe est transcendante, et j'en ay des commencemens. Je n'ay pas de la peine à croire que Mr. Newton est allé bien loin en ces matières. Mais comme chacun a ses voyes, j'en ay peut-estre dont il ne s'est pas encor avisé.

Je m'imagine que les objections que Mr. Papin vous avoit envoyées auront esté sur la pesanteur. J'espere que vostre Dioptrique paroistra bientost. Vous aviés la pensée de mettre quelque chose de Musique dans les Actes de Leipsich. En ce cas il ne seroit peut-estre pas mauvais d'expliquer comment le temperament a esté trouvé, ce que vous touchés dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans. Il y a longtemps que Mr. Ouvrard nous fait esperer la Musique. J'ay vu des memoires de Physique et de Mathematique de l'Academie de Paris reimprimés en Hollande. C'est fort bien fait que cela, et j'espere que de temps en temps il s'y trouvera quelque chose de bon. Le premier essai ne paroist pas des plus considerables. On rencontre quelques fois des questions extraordinaires et d'une analyse particuliere. En voicy une que s'offrit il n'y a pas longtemps. Trouver une grandeur, tellement formée des grandeurs a, b, c, d, que, lorsqu'on pose $a = b$, elle soit égale à $\frac{c-d}{2c+2d}$, mais, lorsqu'on pose $c = d$, elle soit $= \frac{a-b}{2a+2b}$. Cette grandeur ne se trouve pas difficilement en essayant, et on voit aisement que $\frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)}$ y satisfait, mais je me mis à chercher comment de tels problemes pourroient estre resolus constamment par une methode reglée.

Relisant dernierement vostre explication de la pesanteur, j'ay remarqué que vous estes pour le Vuide et pour les Atomes. J'avoue que j'ay de la peine à comprendre la raison d'une telle infrangibilité, et je croy que pour cet effect, il faudroit avoir recours à une espece de miracle perpetuel. Je ne voy pas aussi de necessité qui nous oblige à recourir à des choses si extraordinaires. Cependant puisque vous avés du penchant à les approuver, il faut bien que vous en voyiés quelque raison considerable. Je suis avec zele etc.

XLII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 11 Jul. 1692.

Quoyque je responde bien tard à vostre dernière, vous ne pouvez point douter que je n'en aye esté tres satisfait, quand ce ne seroit qu'à cause de vostre jugement avantageux, touchant mes derniers Traitez, lequel j'estime plus qu'aucun autre. La principale raison de mon silence a esté que m'estant appliqué pendant quelque temps à l'estude de la Dioptrique, et à perfectionner ce que j'en ay escrit, j'ay voulu eviter d'estre distrait par d'autres speculations, ce qui ne se pouvoit point en respondant à vostre lettre, qui en est toute remplie. Il y a bien des choses à demesler dans cette Dioptrique, et il s'en est tousjours offert des nouvelles, jusqu'à cette heure qu'il me semble d'avoir tout penetré, quoyque je n'aye pas encor achevé de tout escrire. Je m'en vais parcourir tous les points de vostre lettre, et en suite je vous repondray touchant vos notes sur les Principes de des-Cartes.

Si vous approuvez mon explication de la Pesanteur, je ne vois pas comment vous pouvez comprendre qu'un semblable mouvement materiae ambientis puisse causer et la rondeur des goutes d'eau, et la Pesanteur du plomb vers la terre, ou des Planetes vers le Soleil. Je trouve plus vraisemblable que la rondeur des goutes viene du mouvement rapide de quelque matiere qui circule au dedans. Mais quand ce seroit un effet de mouvement en tous sens de la matiere qui est au dehors, il n'y auroit pas là d'operation de la force centrifuge en ce qui est de la goute. Je ne vois pas non plus comment la cause que je donne de la Pesanteur, puisse coincider avec l'attraction que vous concevez par des rayons emanants du centre. A demeurer dans mon principe, il faudroit que la vistesse de la matiere circulante fust plus grande vers le centre qu'aux endroits plus eloignez dans une certaine proportion, pour expliquer pourquoy les pesanteurs des Planetes contrebalancent leurs forces centrifuges. laquelle proportion je puis facilement determiner, mais je ne trouve pas jusqu'icy lacause de cette differente vistesse.

Il est certain que les pesanteurs des Planetes estant posées en raison double reciproque de leur distance du soleil, cela, avec la vertu centrifuge, donne les Excentriques Elliptiques de Kepler. Mais comment, en substituant vostre Circulation Harmonique, et retenant la mesme proportion des pesanteurs, vous en deduisez les mesmes Ellipses, c'est ce que je n'ay jamais pu comprendre par vostre explication qui est aux Acta de Leipsich; ne voiant pas comment vous trouvez place à quelque espece de Tourbillon deferant de des Cartes, que vous voulez conserver; puisque la dite proportion de pesanteur, avec la force centrifuge produisent elles seules les Ellipses Kepleriennes, selon la demonstration de Mr. Newton. Vous m'aviez promis depuis longtemps d'eclaircir cette difficulté.

Si par les Parallelismes des axes planetaires vous entendez la situation parallele que chacun de ces axes garde à soy mesme, il n'est pas besoin pour cela de Tourbillon, puisque c'est par les loix du mouvement que cela se doit faire.

Je trouve, comme vous, plus à mon gré les Ellipses veritables que les Ellipsoïdes de Mr. Casaini; pour lesquelles je ne crois pas qu'il ait trouvé de raison physique, puisqu'il n'en a rien dit; et pour l'Astronomique, elle doit estre bien legere, vu le peu de difference entre les unes et les autres dans les cas des Orbites Planetaires.

Je pourrois vous marquer plusieurs objections contre la Terre Sphaeroide, dans le sens de Mr. Eysenschmid, que j'escrivis en lisant son Traité, mais il suffit de celle-cy pour le refuter. Cum ex auctoris ratiocinio tanta futura sit differentia amplitudinis graduum in ellipsibus per binos Terrae polos ductis, ut circa gradum 54 altitudinis poli, unus in terra gradus sit futurus $7\frac{1}{2}$ milliarium Germanicorum; prope aequatorem vero milliarium 15, numquid putat hoc nautarum omnium experientia pridem comprobari debuisse, si verum esset? Il paroit docte au reste et escrit bien; mais des gens comme Wasmuth et son eleve ne meritent pas qu'on en parle.

Dans le Traité de Craige, que Mr. Fatio m'a fait avoir, je vois qu'il a bien remarqué l'insuffisance de la Methode de Mr. Tschirnhaus pour les quadratures. Aussi en a-t-il esté bien fasché.

Le mathematicien de Zelande, qui donne dans son traité une Table de quadratures, s'appelle Hubertus Huighenius, et le titre de son livre, Animadversiones quaedam circa proportionem quam ad rectilineas habent figurae curvilineae. Il croioit qu'à la longuer du calcul près, il avoit montré le chemin pour arriver à la quadrature du cercle, de quoy je l'ay desabusé.

Les objections de Mr. Papin estoient contre l'un et l'autre de mes Traitez. Il est de ceux qui veulent avec Mr. des Cartes que l'essence du corps consiste dans la seule etendue.

Pour donner dans les Acta de Leipsich ce que j'ay encore touchant la Musique, il faudroit qu'il fust precedé de ce qu'il y a dans le Journal de Mr. de Beauval, et je ne suis pas fort de loisir à le traduire. Ce Mr. Ouvrard de qui vous attendez la Musique, pretendoit de pouvoir montrer la composition en 24 heures. Je l'ay connu à Paris. Il fit imprimer un petit traité assez extravagant, où il vouloit qu'en matiere d'Architecture on observast les proportions qui font les consonances, comme si l'oeil pouvoit reconnaitre quand on s'écarte de ces proportions de mesme que l'oreille le fait au chant.

J'ay vu encore quelques mois des Memoires de l'Academie de Paris, et j'approuve comme vous ce dessein, exhortant nos libraires de continuer à les copier, à quoy pourtant je ne les trouve pas fort disposez. Dans les Journaux des Scavants de l'année derniere 1691, il y a une observation curieuse que raporte Mr. de la Hire touchant des pierres d'aimant, qui estoient crues sur du fer au dedans des pierres dont estoit basti une pointe de clocher à Chartres.

Vostre recherche de la quantité composée de a, b, c, d, semble assez difficile si on vouloit y trouver quelque maniere generale. Mais je doute si elle est fort utile, parceque dans tout ce que j'ay jamais calculé, il ne me s'est offert de pareil probleme. La quantité $\frac{ac - bd}{(a + b)(c + d)}$ n'est peut-estre pas la seule qui satisfasse dans vostre cas. Il y auroit aussi à considerer quand le Probleme est possible ou non. Si j'en avois besoin, j'y songerois d'avantage.

La raison qui m'oblige de poser des Atomes infrangibles est que ne pouvant m'accommoder, non plus que vous, Monsieur, du dogme Cartesien, que l'Essence des corps consiste dans la seule etendue, je trouve qu'il est necessaire, afin que les corps gardent leurs figures, et qu'ils resistent au mouvement les uns des autres, de leur donner l'impenetrabilité et une resistence à estre rompus ou enfoncez. Or cette resistence il faut la supposer infinie, parce qu'il semble absurde de la supposer dans un certain degré, comme si on disoit qu'elle egale celle du diamant ou du fer, car cela ne peut avoir de cause dans une matiere, où d'ailleurs on ne suppose rien que l'etendue. C'est pourquoy j'ay tousjours trouvé que c'est une erreur à Mr. des Cartes, quand il veut que ses petites boules du 2 element se soient faites par l'abbattement des angles et eminences qu'avoient de petits corps cubiques ou autrement formez. Car s'il faloit quelque force pour surmonter la resistence que faisoient ces angles et eminences à estre rompues, par où croioit il pouvoir limiter, et à quoy faire monter cette resistence? Et s'ils n'en faisoient aucune, ensorte que ces corps se laissoient tronquer et ecorner à la seule rencontre d'autres particules, pourquoy ne se laissoient ils pas enfoncer aussi, comme de l'argille humide, et comment gardoient ils leur figure apres qu'elle estoit devenue spherique?

L'hypothese de la dureté infinie me paroit donc tres necessaire, et je ne concois pas pourquoy vous la trouvez si etrange, et comme qui infereroit un continuel miracle. Car pour la difficulté de l'union qui arriveroit par la rencontre de deux surfaces plattes, vous la resolvez vous mesme, et vous n'avez qu'à regarder les grains de sable avec un microscope et à voir si vous y trouvez des surfaces exactement plattes; et quand il y en auroit aux atômes, il faudroit encore leur application juste, quod in indivisibili consistit. Je vous prie de considerer ces raisons que je viens d'exposer, et de me dire comment vous concevez que les parties des corps tout simples et primitifs coherent. Seroit-ce par vostre motus conspirans de ces mesmes parties considerées comme reellement séparées, et voudriez vous comprendre les corps simples aussi bien que les composez dans l'article de vos objections contre Des Cartes? J'avoue que je ne comprens nullement comment vostre pensée puisse subsister, ni dans les uns ni dans les autres. Voulez vous que les particules d'une barre de fer aient au dedans un motus conspirans, et que, non obstant cela, on ne trouve pas que rien se derange dans cette barre? Qui peut entendre cela? Et pourtant vous dites que cette exposition de la cohesion satisfait ensemble à la raison et aux sens. J'ay une maniere d'expliquer la cohesion des corps composez qui depend de la pression de dehors et encore d'autre chose. Mais en voilà desia assez sur ce sujet.

Mr. de Beauval m'a presté vos remarques sur les 2 premieres parties des Principes de des Cartes, que j'ay examinées avec plaisir. Il y a ample matiere de contredire à ce Philosophe, aussi voit on venir des objections de tous costez. Pour ce qui est de ses demonstrations Metaphysiques de Existentia Dei, animae non corporeae et immortalis, je n'en ay jamais esté satisfait. Nous n'avons nullement cette idée entis perfectissimi. Je n'approuve non plus son κριτήριον. Viri, et suis d'accord avec tous dans la pluspart de vos raisonnemens, quoyque non pas dans tous. Mais il seroit trop long d'entrer dans cette discussion. Je vois que vous alleguez souvent ce que vous auriez escrit ailleurs. Entendez vous parler d'autres traitez que ceux qu'on a vu dans les Acta de Leipsich?

Sur la matiere du mouvement j'ay bien des choses nouvelles et paradoxes à donner, que l'on verra, quand je publieray mes demonstrations des Regles de la Percussion, inserées autrefois dans les Journaux de Paris et de Londres. Je communiquay ces demonstrations à nos Mrs. de l'Academie, et j'en envoiay aussi quelquesunes à la Societé Royale; dans lesquelles j'emploiay avec autre chose, cette conservatio virium aequalium et la deduction au mouvement perpetuel, c'est à dire à l'impossible, par où vous refutez aussi les regles de des Cartes, qui estant reconnues partout pour fausses et estant posées sans fondement, ne meritoient pas la peine que vous prenez. A ce que Mr. de Beauval m'a dit, vous souhaitteriez que vos remarques fussent adjoutées dans quelque nouvelle edition des Principes de des Cartes, à quoy je ne scay si les libraires voudroient consentir, parceque cela ne serviroit nullement à recommander cette philosophie ni son Autheur. Elles seroient mieux avec le Voiage de Des Cartes que vous aurez lu, ou avec l'examen de Mr. Huet. Vous pourriez aussi fort bien les faire imprimer à part, en y faisant un titre et un peu de preface. Ou si vous vouliez que le volume devint plus gros, vous n'auriez qu'à examiner de mesme la 3e et 4e partie, auxquelles il y a pour le moins autant à reprendre, et encore les meteores. Il semble que des Cartes ait voulu decider sur toutes les matieres de Physique et Metaphysique, sans se soucier s'il disoit vray ou non. Et peut-estre cela n'est pas inutile d'en user ainsi a des personnes qui se sont acquis une grande reputation d'ailleurs, parce qu'ils excitent d'autres à trouver quelque chose de meilleur. Il s'est abstenu pourtant de toucher à la production des plantes et des animaux; sans doute parce qu'il n'a pas un moien de les faire naitre du mouvement et de la figure des particules, ainsi que le reste des corps qu'il considere.

Il me tarde de voir quelle a esté vostre correspondance avec Mr. Pelisson, que Mr. de Beauval m'a dit devoir paroître au jour. J'aime à voir le raisonnement de ceux qui excellent dans les Mathematiques, sur quelque matiere que ce soit, et je pourray un jour vous en proposer quelqu'une. Je suis avec une parfaite estime et affection etc.

XLIII.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce $\frac{16}{26}$ de Sept. 1692.

J'ay esté bien occupé cet esté, ce qui m'a empeché de repondre plustost à vostre lettre de l'14 de Juillet, car il auroit fallu pour cela une espece de retraite et de méditation, parceque vous touchés plusieurs matieres importantes. C'est pour cela que je ne suis pas encore en estat de vous satisfaire entierement, et en attendant je donne ce que je puis.

Je ne voy pas encor pourquoy plusieurs opinions differentes en apparence, touchant la rondeur des gouttes, la pesanteur des corps terrestres, et l'attraction des planetes vers le soleil, ne se puissent concilier. Je croy qu'on peut dire en general, que la matiere est agitée d'une infinité de façon de tous costés avec une difformité uniforme, en sorte qu'il y en a peut estre également en tout sens. Ce mouvement doit servir tant à former des corps, qu'à les placer. Car les corps prennent la situation par laquelle leurs mouvemens sont moins empechés, et s'accommodent en quelque façon les uns avec les autres, ainsi cela peut faire qu'ils se joignent, quand ils sont separés, et qu'on a de la peine à les séparer quand ils sont unis. On peut encor considerer plus particulierement qu'un corps environné d'un autre plus fluide et plus agité, mais auquel il ne donne pas un passage assez libre au dedans, sera frappé au dehors par une infinité de vagues, qui contribueront à l'affermir et à presser ses parties les unes contre les autres. Qu'un corps rond est moins exposé aux coups du fluide environnant, à cause que c'est ainsi que sa surface est la moindre qui est possible, et que l'uniforme diversité tant des mouvemens internes que des mouvemens exterieurs contribue encor a cette rondeur. On peut venir à un plus grand detail lorsque il s'agit du globe de la terre, et considerer que les agitations d'un fluide renfermé se tournent en circulations, car c'est ainsi qu'elles continuent avec le moins d'empechement, que ces circulations sont en tous sens, à cause que les agitations qui les produisent le sont aussi. Et que les circulations à l'entour de la terre s'accorderont et conspireront pour avoir un centre commun, qui sera celuy du globe de la terre, sans doute parceque, dès la formation de ce globe (semblable apparemment à la formation d'une goutte) ce centre estoit distingué des autres points; que cette matiere circulante tache à s'éloigner du centre et par consequent qu'elle oblige les corps moins agités à s'y approcher. Et que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction partans du centre à l'egard des corps qu'ils y font aller. L'Analogie de la nature peut faire croire qu'il y a quelque chose d'approchant à l'egard du systeme du soleil, que les planetes tendent vers le soleil par une raison semblable et que les attractions y sont en raison doublée reciproque des distances tout comme les illuminations. Et comme dans l'aimant il y a non seulement l'attraction mais encor la direction, et qu'il y a une grande analogie entre la terre et l'aimant, on a lieu de croire que parmy tant de circulations à l'entour du centre de la terre, auxquelles on peut assigner une infinité de poles, il y a deux poles principaux, suivant lesquels la matiere de la terre s'est accommodée à un certain cours de la matiere du grand systeme solaire, comme les aimans s'accommodent au cours de la matiere du systeme terrestre.

Il semble, Monsieur, que vous n'approuvés pas ces conciliations, mais vous ne marqués pas en particulier, ce qu'il y a à redire. Vous ne dites pas aussy pourquoy par exemple vous attribués plus particulierement la rondeur des gouttes d'eau à un mouvement rapide au dedans. Vous ne dites pas non plus pourquoy les efforts de la matiere centrifuge ne peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction. J'ay remarqué cependant qu'on peut dire quelque chose à l'encontre; sçavoir qu'il y a la même quantité de lumiere dans toutes les surfaces spheriques concentriques, mais qu'on peut douter s'il y a la même quantité d'attraction. Et il est vray que j'avois encor tenté quelque chose qui paroist assés plausible en considerant la vistesse de la circulation. Il faudra examiner quelle explication est la meilleure, ou si on les peut concilier. Le même se peut dire à l'egard de l'explication de Mr. Newton des ellipses. Les planetes se mouvent comme s'il n'y avoit qu'un mouvement de trajection ou de propre direction joint à la pesanteur, à ce que Mr. Newton a remarqué. Cependant ils se meuvent aussi, tout comme s'ils estoient deferés tranquillement par une matiere dont la circulation y soit harmonique; et il semble qu'il y a une conspiration de cette circulation avec la propre direction de la planete. Et la raison qui fait que je ne me repens pas encor de la matiere deferente, depuis que j'ay appris l'explication de Mr. Newton, est entre autres, que je voy toutes les planetes aller à péu près d'un même costé, et dans une même region, ce qui se remarque encor à l'égard des petites planetes de Jupiter et de Saturne. Au lieu que sans la matiere defferente commune, rien n'empecheroit les planetes d'aller en tous sens. Il y a bien des choses à dire sur tout cela, que j'espere d'éclaircir un jour plus particulierement. Il semble que l'analogie de la terre et du soleil avec l'aimant rend assés probable le cours de la matiere solaire, semblable à celuy de la matiere terrestre qui est une espece de circulation ou de tourbillon. Et comment expliqueroit-on l'attraction de la terre qui la porte vers le soleil, si on n'admet quelque chose d'analogique avec la cause de la pesanteur? Il me semble que vous reconnoissés cette analogie vous même dans quelque endroit de vostre dernier traité. Quelque chose que ce puisse estre ce sera un mouvement d'une matiere fluide, qui sera en rond. Car vous ne vous contenterés pas d'une qualité attractive comme Mr. Newton semble faire. Cela estant, il semble que vous ne vous sçauriés passer des tourbillons, et sans cela, comment pourriés vous maintenir vostre explication de la pesanteur, où vous supposés avec raison que la matiere qui circule en tous sens est enfermée? Ce ne sera pas dans un ciel solide crystallin, ce sera donc dans une espece d'orbe ou sphere liquide, ou autre fluide environnant, auquel le mouvement donne en quelque façon à cet egard les privileges d'un corps solide. Aussi sans cela les corps circulans se dissiperoient par leur force centrifuge, si ce n'est qu'on leur attribue quelque qualité centrophile, ou quelque sympathie entre elles, dont je crois que vous ne vous accommoderés pas. Quant au parallelisme des axes il est bien vray que si l'on explique le mouvement de la planete par la seule trajection jointe à la pesanteur, et si l'on suppose que la planete est tousjours en equilibre par la pesanteur de ses parties, de quelque maniere qu'on la place, il faut qu'elle garde tousjours la direction de l'axe, en sorte que l'axe soit tousjours parallele à luy même. Mais cela suppose encor que le corps ne trouve pas le moindre empechement ou rencontre irreguliere ny impression exterieure, qui le fasse tourner tant soit peu. Ce qui est contre la coustume de la nature, et par consequent, puisqu'il n'y auroit ainsi aucun principe fixe ou constant de cette direction, elle seroit bientôst changée. Comme il est seur qu'un globe, quelque égal qu'on le pourroit faire, jetté en l'air ne garderoit pas longtemps une situation parallele à elle meme, ou aux situations precedentes, et une droite menée au dedans de ce globe ne demeureroit pas longtemps parallele à sa premiere situation. De sorte que j'aime mieux de fixer ce parallelisme par quelque cause qui reponde à la direction de l'aimant et qui serve à redresser les changemens, que les seules loix du mouvement de la planete ne sçauroient exclure. Et je crois même que s'il n'y avoit que la seule trajection libre de la planete, sans quelque fluide deferant, et gouvernant son cours, les regles seroient bientost faussées.

Je viens à nostre different du vuide et des atomes, qu'il sera difficile de vuider. Vous supposés, Monsieur, que dans les corps il y a une certaine fermeté primitive, et cela estant, vous jugés qu'il la faut supposer infinie, car il n'y a point de raison de la supposer d'un certain degré. Je demeure d'accord qu'il y auroit de l'absurdité à donner à tous les corps un certain degré de fermeté, car rien nous determine plustost à un tel degré qu'à tout autre. Mais il n'y a point d'absurdité de donner differens degrés de fermeté à des corps differens; autrement on prouveroit par la même raison que les corps doivent avoir une vistesse nulle ou infinie. Cela posé, que la nature doit varier, la raison veut qu'il n'y ait point d'atomes, ou corps d'une fermeté infinie, autrement ils le seroient tous, ce qui n'est point necessaire. Il ne semble pas aussi que vous satisfaites assés à la difficulté des atomes qui se toucheroient par quelque surface, et par cela même demeureroient pris et attachés ensemble inseparablement. Car de nier que les atomes ont des surfaces plattes ou autrement congruentes entre elles en la moindre partie, c'est un grand postulatum. Mais quand on l'accorderoit, je crois que dans ces sortes de raisonnemens on doit avoir egard non seulement à ce qui est, mais encor à ce qui est possible. Supposons donc une chose possible, sçavoir que tous les atomes n'ayent que des surfaces plattes, il est visible qu'alors cet inconvenient arriveroit et par consequent l'hypothese de la parfaite dureté n'est point raisonnable. Il y a encore d'autres inconveniens dans les atomes. Par exemple ils ne sçauroient estre susceptibles des loix du mouvement, et la force de deux atomes egaux, qui concoureroient directement avec une vistesse egale, se devroit perdre, car il paroist qu'il n'y a que le ressort qui fait que les corps rejaillissent. Mais quand il n'y auroit aucun inconvenient, il semble qu'on ne doit pas admettre une qualité sans raison, telle qu'est la fermeté primitive. On ne voit rien qui attache deux masses ensemble, et je ne vey pas comment vous concevés, Monsieur, que le seul attouchement fait l'office d'un gluten. Or puisqu'il n'y a aucune connexion naturelle entre l'attouchement et l'attachement, il faudra bien que, si de l'attouchement suit l'adhesion, cela arrive par un miracle perpetuel. Mais si la fermeté est une qualité explicable, il faut bien qu'elle vienne du mouvement, puisqu'il n'y a que le mouvement qui diversifie les corps. Cela posé tout ce que je puis dire de la connexion originaire des corps revient à cecy, qu'il faut de la force pour detacher une partie de la matiere de l'autre, lorsque ce detachement change le mouvement et le cours present des corps. Tout mouvement est conspirant dans une masse, autant qu'il y a quelque regle ou loy en comparant les parties mouvantes entre elles, et il est troublé à mesure que cette regle devient plus composée. Aussi peut-on dire, que tout corps a un certain degré de fermeté et de flexibilité. Cependant quand il s'agit de quelque barre de fer ou autre corps grossier, on n'a pas besoin de recourir d'abord à l'origine primitive de la fermeté, non plus qu'aux atomes, il suffit de se servir des petits corps, dont chacun a deja en luy même sa fermeté, mais dont l'un demeure attaché à l'autre, à peu pres comme deux tables qui se touchent par leurs surfaces plattes et unies, que la pression de l'ambiant defend de separer tout d'un coup.

Je n'ay point d'empressement à donner au public les remarques sur la partie generale de la philosophie de Descartes. Monsieur de Beauval sembloit s'offrir de les porter avec soy en Hollande. Puisque vous avés pris la peine de les voir, je souhaitterois que vous eussiés marqué les endroits dont vous ne convenés pas, outre ceux qui regardent le vuide et la fermeté. Je voudrois qu'ils fussent encore vus par quelque habile Cartesien, mais capable de raison, pour apprendre ce qu'il diroit à l'encontre. J'en ay écrit à Mr. de Beauval. Je souhaitte de voir un jour ce que vous donnerés sur le mouvement. J'avois examiné les regles de Descartes par un principe general de convenance, qui ne manque pas, à ce que je crois, et qui m'a paru utile à refuter les erreurs par interim en attendant la pure verité. Et j'estois bien aise de montrer comment par le moyen de ce principe les regles Cartesiennes se refutent elles memes. Mon dessein dans ces remarques n'estant que de faire des animadversions sur Descartes, sans pretendre d'y donner la veritable Philosophie. J'ay esté surpris que Mr. Pelisson a mis, sur tout dans les additions, des choses que je l'aurois prié d'en retrancher, si j'avois sçu son intention. Ce n'est pas qu'il y ait du mal, mais c'est qu'il y a quelque fois du mal-entendu dans le monde. Tout cela n'a pas esté fait pour le public, et vous n'y trouverés pas vostre compte, Monsieur, si vous vous donnés la peine d'y jetter les yeux; mon dessein estoit de monstrer à Messieurs de l'Eglise Romaine par une maniere de retorsion, que selon leurs principes non seulement les Protestans mais encor les Payens se peuvent sauver. Le reste est né par rencontre.

Vous me faites esperer un jour quelque chose de votre part qui sera d'une nature differente des matieres mathematiques. C'est ce que je seray ravi de voir. Et generalement tout ce qui vient de vous m'est pretieux. Je vous feray souvenir quelques fois de ce que vous dites dans vôtre lettre à l'egard de Descartes, qu'il est utile que les persónnes d'une grande reputation disent leur conjectures sur toutes sortes de matieres pour exciter les autres. C'est ce que je voudrois que vous fissiez vous même. Je suis avec zele etc.

P. S. Mr. van Beuninguen est-il encor en vie? On m'avoit dit autres fois qu'il s'estoit jetté dans des sentimens outrés sur la religion. C'est dommage qu'il n'a pas songé plustost de donner au public des memoires de ses negotiations. N'y a-t-il pas quelque Ministre des Etats des Provinces Unies qui y pense? Car c'est bien dommage qu'aujourdhuy il n'y a que ceux qui ne connoissent rien aux affaires qui se melent d'en ecrire. Mr. vostre Frere pourroit conserver à la posterité l'histoire veritable du grand Roy qu'il sert avec tant d'approbation. Ce que Mr. Temple donne est tres considerable, cependant Mr. du Cros connu sur le Theatre de Nimwegue ayant esté touché un peu durement par M. Temple, veut donner une Apologie, où il pretend de redresser bien des choses qu'il croit n'avoir pas esté bien rapportées par Mr. Temple.

XLIV.

Leibniz an Hugens.

Hanover, $\frac{20}{30}$ Decemb. 1692.

Ma lettre assez prolixe vous aura esté rendue il y a quelques mois. La reponse n'a point de presse, mais voicy de quoy je prends la liberté de vous supplier. Une personne que je considere, poussée par un autre qui s'imagine d'avoir trouvée le mouvement perpetuel, m'a demandé si je ne pourrois pas apprendre si les Estats ont proposé un prix à celuy qui le trouveroit et combien. J'ay eu beau dire que la chose n'est point possible à mon avis, et que j'ay bien appris par les lettres de Grotius ad Gallos la quantité promise par les Estats à celuy qui trouveroit les longitudes, mais que je n'ay pas ouï parler d'un prix promis à l'inventeur du mouvement perpetuel. On a toujours insisté et on m'a prié avec instance de m'en informer. Comme vous ne pouvés pas manquer de sçavoir la chose, Monsieur, s'il y a quelque chose de tel, je prends la liberté de m'adresser à vous et de vous supplier de me faire sçavoir un mot de reponse à cette question, quelqu'inutile qu'elle soit en elle même et quoyque j'aye presque honte de vous la proposer.

J'espere que vous vous porterés bien, et que nous aurons bientost vostre importante Dioptrique. On dit que Mr. Newton donnera un nouvel ouvrage. Je vous avois prié de me communiquer vos remarques sur mes Animadversiones ad Cartesium. Ce n'est pas pour entrer en dispute avec vous, mais pour en profiter. Cependant je vous supplie de renvoyer mes animadversions à Mr. Beauval si vous ne l'avés déja fait. C'est afin qu'il les communique encor à d'autres comme je l'en ay prié, afin d'en tirer encor des remarques, quoyque je scache bien qu'il n'en trouvera gueres qui puissent valoir les vostres. Je suis avec zele etc.

P. S. Je souhaitte une heureuse année avec une grande suite de semblables.

XLV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 12 Janvier 1693.

Il y a 6 jours que je reçus vostre lettre du 30. Dec. ayant encore à respondre à celle du 26. Sept. de quoy je ne scay pas bien quelles excuses j'allegueray, si ce n'est que je m'apperçois que les disputes par lettres ralentiroient nostre correspondance, du moins de ma part, parce qu'il faut se resoudre à recommencer de raisonner chaque fois qu'on escrit, sans esperer de reponse qu'apres 5 ou 6 semaines, lorsqu'on a derechef oublié où on en estoit. Je repasseray pourtant sur les articles des vos responses sans m'etendre, et sans pretendre mesme que vous m'envoiez des répliques. Mais auparavant je respondray à ce que vous m'avez demandé, et vous diray que assurement il n'y a point de prix proposé par Mrs. les Estats à l'invention du mouvement perpetuel, quoyque je sçache que plusieurs l'ont creu, parceque des gens peu sçavans en ces matieres se sont imaginé que de cette invention s'ensuivoit celle des longitudes, qui est une consequence sans fondement. Du mouvement perpetuel ils esperoient un mouvement egal et de là des horloges justes, mais je vois qu'avec des horloges tres justes, l'affaire des longitudes souffre encore trop de difficulté à cause des accidents, et du soin et de l'exactitude qu'il faut à les gouverner. Celuy pour qui est cette information ne doit pas entendre les principes de l'art, s'il croit pouvoir effectuer un tel mouvement mechanice, car pour physicomechanice il semble tousjours qu'il y ait quelque esperance, comme en emploiant la pierre d'aimant.

Je passe à vostre premiere lettre, où j'ay esté bien aise de voir que vous estes assez de mon sentiment en ce qui est de la cause de la Pesanteur. Mais quand vous dites que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considérez comme des raions d'attraction qui partent du centre, à l'egard des corps qu'ils y font aller, je ne vois aucune raison de cette uniformité, ni que par consequent elle puisse servir à prouver la proportion des pesanteurs double, renversée des distances du centre. Laquelle d'ailleurs je tiens estre telle, tant à l'egard des planetes principales, qui pesent vers le Soleil, qu'à l'egard des lunes qui pesent vers les planetes.

Pour ce cours particulier de la matiere dans le Tourbillon du Soleil, qui serviroit à conserver le parallelisme à l'axe de la Terre, je le trouve peu compatible avec le mouvement circulaire de la mesme matiere en tous sens, qui fait la Pesanteur; et avec cela nullement nécessaire. Parce que le globe terrestre estant de la grandeur qu'il est, l'axe de son mouvement doit naturellement garder le parallelisme, et il est assez difficile d'expliquer pourquoy il se detourne encore tant qu'il fait, suivant ce qui paroit par la Precession des Equinoxes. Car pour ce qui est de l'experience d'une boule qu'on jetteroit en haut, je ne doute pas qu'elle ne fust contre vous, si on la pouvoit jetter en sorte qu'on n'imprimât point de circulation à l'axe.

Ma raison pourquoy je crois que la rondeur de la goute d'eau est plustost causée par un mouvement au dedans, que par l'impulsion de la matiere autour, c'est que l'impulsion egale par dehors doit faire precisement le mesme effect à enfoncer les parties de la goute, et à changer sa figure, que feroit la pression egale d'une matiere qui l'environneroit de tout costé. Mais par les principes de Mechanique, une telle pression ne doit point causer de changement à la figure de la goute ni la rendre spherique; quoyque plusieurs le croient faussement; donc ce n'est pas l'impulsion de la matiere par dehors qui la reduit à cette figure.

Je n'insiste plus à demander la conciliation du Tourbillon deferant avec les Ellipses de Mr. Newton, quoyque je ne la trouve point dans vostre dernier raisonnement. Plusieurs avec moy la croient impossible. Il est vray que ces Tourbillons à la maniere de des Cartes seroient commodes pour expliquer quelques phenomenes, comme, entre autres, pourquoy les Planetes circulent toutes d'un mesme sens; mais ils sont incommodes pour d'autres, sur tout pour l'excentricité constante des mesmes Planetes, et de leur acceleration et retardement veritable dans leurs orbes. Car, pour le premier, il semble que la matiere du tourbillon devroit il y a longtemps s'estre reduite à une conversion reguliere quant à la rondeur, et par consequent aussi les Planetes, puisqu'elles nagent dedans. Et pour le second, en posant que leur mouvement demeure excentrique, elles devroient dans leur aphelies et parelies s'accommoder à la vitesse du Tourbillon; ce qu'elles ne font pas, selon ce que je l'ay examiné autrefois. Outre qu'il seroit mal aisé de dire comment les cometes peuvent passer si librement à travers un tourbillon capable d'emporter les planetes; ce qui dans l'hypothese de Mr. Newton est sans difficulté.

Croiez, je vous prie, Monsieur, que je ne me pique nullement de soutenir les opinions que j'ay une fois embrassées, mais que je ne cherche uniquement que quelques raions de verité, si nos disputes en pourroient mettre en evidence. J'ay fort consideré ce que vous dites au sujet de mes atomes de dureté infinie, sçavoir que vous avouez bien, qu'il y auroit de l'absurdité a donner a tous les corps primitifs un certain degré de fermeté ou resistence à estre rompus, mais qu'il n'y a point d'absurdité de supposer differens degrez dans plusieurs corps, sçavoir primitifs, car c'est de quoy il s'agit. Il me semble pourtant qu'il est plus aisé d'accorder la dureté parfaite et infinie pour tous, que cette varieté de forces pour differents corps. Car il est plus difficile de concevoir les raisons de ces differentes duretez, que d'en admettre une seule infinie. Ce seroit imaginer plusieurs especes de matiere premiere au lieu que je n'en ay besoin que d'une.

Vous alleguez apres cela comme une difficulté contre les atomes, l'adhesion qui se feroit par leurs surfaces plattes. Je repons qu'elles devroient avoir estez faites expres ces surfaces, ce que je ne vois pas pourquoy il auroit plustost lieu là, que dans le sable de la mer où l'on n'en trouve point. Et il ne me semble point du tout que ce soit un grand postulatum de vouloir qu'il n'y ait point d'atomes avec des surfaces plattes, mais qu'il le seroit d'avantage d'en supposer, puisqu'il faut une direction et intention expresse pour former une surface platte avec la derniere exactitude. Mais quand la dixieme partie des atomes seroient des cubes parfaits, l'application juste de leurs surfaces consistant in indivisibili, et ces corps estant en grand mouvement, je n'apprehenderois pas encore qu'ils s'allassent joindre à composer des masses.

Vous trouvez encore un inconvenient en ce que les atomes ne seroient pas susceptibles des loix du mouvement, parceque deux egaux concourant directement avec forces égales, devroient perdre leur mouvement; puisqu'il n'y a que le ressort, dites vous, qui fasse rejaillir les corps. Mais c'est ce que je ne crois nullement pour des raisons que je publieray un jour; et quelque explication que vous vouliez donner de la cause du ressort, vous seriez bien embarassé en posant que les derniers petits corps (car ceux qui font ressort sont composez) ne rejalissent point en se rencontrant, mats qu'ils demeurent joints; car de là s'en suivroit la perte de tout mouvement relatif dans la matiere de l'univérs.*) Au reste vous ne deviez pas m'attribuer

---

*) In der Sammlung Uylenbroek's kommt nach diesen Worten Folgendes, das in dem vor mir liegenden Briefe von Hugens fehlt: Ce qui me fait le plus de peine dans la supposition des atômes, c'est que je suis obligé de

que je conçois que le seul attouchement fait l'office d'un gluten, à rendre les corps composez fermes et durs, puisque j'avois ecrit dans ma lettre precedente que j'expliquois la cohesion des corps par une pression de dehors, et par quelqu'autre chose. Laquelle pression je vois que vous emploiez de mesme. Ce que vous adjoutez du mouvement conspirant m'est tout à fait inintelligible.

J'ay rendu à Mr. de Beauval vos notes sur des Cartes. Je pourray une autre fois vous parler des endroits ou je ne suis pas d'accord avec vous. Passons maintenant à la Geometrie, où il n'y a rien à contester. J'ay renouvellé depuis quelques mois la correspondance avec Mr. le Marquis de l'Hospital, à l'occasion d'un joli Probleme qu'il m'envoia, qui estoit de trouver une ligne droite egale à la portion donnée de la ligne Logarithmique, sans autre aide que de la ligne mesme. Il avoit pris un detour pour cela où il y avoit bien de la subtilité; et quoyque j'aye trouvé du depuis un autre chemin plus court, je compte pour beaucoup qu'il ait inventé et tenté le premier ce probleme. Mais il est capable d'en resoudre de plus difficiles, et se sert adroitement de vostre nouveau Calcul. Il m'a envoié les solutions de toutes les questions que cy devant je vous ay proposées touchant les quadratures et les soutangentes, me les aiant demandées expres. Et il en a souhaité apres cela de plus difficiles. En quoy je n'ay pas manqué de le contenter, luy ayant envoié depuis peu ces 2 soutangentes pour trouver leurs courbes: $\frac{aay + yyx}{ax - yx - ay}$ et $\frac{yx^2}{3x^2 + 3aay - 2xyy}$. Il m'a demandé si j'avois quelque methode pour quand les soutangentes sont $\sqrt{ay + xx}$, ou $\frac{2y^2}{yy + 2xy - xx}$ ou $\frac{yy - xy}{a}$, qui est celle de la courbe de Mr. de Beaune, dont dont Mr. des Cartes fait mention dans sa 79e lettre du 3e volume. J'ay avoué que je n'en avois point, et je tiens ces questions tres difficiles, dont je souhaite fort d'avoir vostre sentiment. Pour moy je ne veux pas me donner la peine

---

leur attribuer à chacun quelque figure. Et quelle sera la cause et la varieté infinie de ces figures? mais quelle est la cause des differentes figures du sable de la mer, lequel j'admire toutes les fois que j'en regarde avec le microscope, chaque grain estant un caillou de cristal qui ne croit ni ne diminue et a esté tel qui scait par combien de siecles. C'est que le Createur les a fait une fois naitre telles, et de mesme de les atomes.

de les chercher, parce que je crois que toute la difficulté est desia surmontée, soit par Mr. le Marquis luy mesme, soit par Mr. Newton (dont on m'assure que le Traité la dessus est imprimé depuis peu dans le Traité d'Algebre de Mr. Wallis), ou par vous, Monsieur, qui avez extrêmement approfondi cette matiere où je ne suis que novice. J'ay pourtant rencontré depuis quelque temps une source peu connue mais que vous n'ignorez pas sans doute, d'où l'on peut tirer la solution de beaucoup de Problemes, qui regardent les Tangentes renversées, quadratures, centres de gravité etc. Elle donne sans peine la quadrature que je vous ay proposée cy devant, et celle de la courbe $xxy - aay \infty 2aax$, qui me l'a esté par Mr. le Marquis, avec plusieurs autres. Entre les quelles est aussi la quadrature assez remarquable de la courbe dont l'equation est $x^3 + y^3 = xyn$, que Mr. des Cartes raporte dans sa lettre 65 du 3e vol., et qu'il a considerée aussi bien que Mr. Hudde, pour autre chose. Je trouve que le contenu de la feuille A dans cette figure (fig. 29) est $\frac{1}{6}$ nn, ou $\frac{1}{3}$ du quarré de son diametre. Que l'espace infini B, entre les continuations de la courbe et son asymptote, est encore de la mesme grandeur. Et qu'enfin la dimension generale des segments est aussi fort simple, qui s'exprime par un seul terme.

Je vous entretiendray une autre fois d'une quadrature physico-mathematique de l'Hyperbole, que j'ay rencontrée il n'y a guere, dont la speculation a quelque chose de plaisant. Ainsi vous voiez, Monsieur, que je ne cesse de mediter et d'apprendre tousjours quelque chose.

J'ay vu avec plaisir vos lettres à Mr. Pelisson, dans l'une desquelles vous dites assez fortement leurs veritez à Mrs. les Catholiques. On voit dans ses reponses comment ils emploient les douceurs, les louanges et tout ce qui peut servir pour tascher de vous attirer à leur parti, sans que je croie que cela vous tente le moins du monde, ne pouvant m'imaginer comment une personne d'esprit peut se soumettre à croire des absurditez et les niaiseries qu'enseigne cette Religion, ni comment un homme de bien peut approuver la cruauté dont elle use à contraindre et forcer les consciences. Je suis etc.

XLVI.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce $\frac{10}{20}$ de Mars 1693.

Je commence par le remerciment que je vous dois de ce que vous avés bien voulu me satisfaire si promtement sur mes demandes, touchant le prix pretendu proposé par Mrs. les Etats, qu'un amy me prioit fort de luy faire sçavoir, bien que je luy eusse assez temoigné mon sentiment.

J'avois remarqué moy même dans ma precedente que je trouvois de la difficulté dans la comparaison de la force centrifuge avec les rayons d'attractions que j'avois proposée, et meme j'avois marqué en particulier en quoy consistoit cette difficulté. Mais je ne croyois pas qu'on diroit qu'il n'y a aucune raison de conformité; puisque l'un et l'autre produit une attraction; l'un et l'autre tend du centre à la circonference, l'un et l'autre opere en ligne droite.

Vous dites, Monsieur, que vous trouvés le cours particulier de la matiere dans le tourbillon du soleil, propre à conserver le parallelisme de l'axe de la terre, peu compatible avec le mouvement circulaire en tout sens, qui semble faire la pesanteur vers le soleil. A quoy je reponds que deux mouvemens semblables à ceux là se trouvent fort compatibles dans le systeme du globe de la terre, où l'un est la cause de la pesanteur, l'autre celle de la direction magnetique; et cette analogie favorise fort mon hypothese. Et comme il y a une declinaison de l'aimant, dont les causes particulieres nous sont encor inconnues qui ne sçauroient pourtant se trouver, que dans le cours de quelque matiere, il semble encor que le detour de l'axe de la terre ne sçauroit venir que de quelque raison semblable. Il est vray que la terre est un grand corps, dont il n'est pas aisé de changer le mouvement ou la situation; mais comme tous les corps de la nature agissent les uns sur les autres, et qu'il y a plusieurs grands courans particuliers, elle ne semble pas exemte d'accidens; et je ne sçay s'il seroit conforme à la coustume de la nature, d'abandonner ces grands systemes à ces rencontres. Il semble plustost que les systemes sont tellement formés et establis par une conspiration de toutes les parties arrangées et asservies de longue main, que les desordres se redressent d'eux mêmes, comme dans le corps d'un animal; ce qui se fait par le cours des corps fluides, qui entretient les solides dans leurs fonctions. Ainsi je m'imagine, que si quelque cause extraordinaire detournoit l'axe de la terre, il reprendroit bientost sa veritable situation; comme fait un aimant, au lieu que selon l'hypothese de Mr. Newton, la terre vogue dans l'ether comme feroit une isle flottante, que rien ne dirige, que sa propre tendence déja prise.

Ce que vous dites, Monsieur, qu'une pression uniforme par dehors ne change point la figure d'un corps et par consequent n'est pas capable d'arrondir une goutte, merite consideration. Mr. Descartes n'estoit pas de ce sentiment, et en cela j'avois esté du sien; mais je me rendray volontiers, quand je verray comment vous jugés que cela est contraire aux principes de mecanique.

Vous jugés aussi, Monsieur, que les tourbillons deferans ne sont pas conciliables avec les ellipses de Kepler. Cependant il me semble que les raisons prises de l'excentricité constante des planetes, aussi bien que de leurs vistesses dans les aphelies et perihelies ne sont pas sans replique, ou plustost que les tourbillons se peuvent expliquer en sorte qu'ils favorisent ces choses, bien loin d'y estre contraires. L'objection du passage des cometes paroist difficile, mais peut-estre, que leur force est telle que le mouvement d'une matiere aussi subtile, que l'est celle du tourbillon, ne les detourne pas considerablement; il est bien vray que cette même matiere a assés de force pour conserver le mouvement des planetes, mais si la planete estoit reduite en repos dans le tourbillon, le tourbillon ne luy rendroit son mouvement que peu à peu. Comme dans vos pendules peu de force est capable d'entretenir le mouvement, mais il est plus difficile de le produire.

Je viens à nostre controverse des atomes, elle est si ancienne, et les esprits y sont si partagés, que je m'etonne nullement, si nous ne tombons pas d'accord là dessus. Cependant comme je croy que parmy tous ceux, qui ont jamais soutenu les atomes, personne l'a fait avec plus de connoissance de cause et y a apporté plus de lumieres, que vous, Monsieur, et que de mon costé j'ay taché d'y joindre des considerations assez particulieres, je continue de profiter de vos eclaircissemens. Si l'on devoit supposer des consistances primitives, la question est, s'il seroit plus raisonnable d'aller d'abord à une dureté parfaite et infinie, que d'admettre toute sorte de degrés de fermeté, mais tousjours meslés de quelque fluidité ou mollesse, en sorte que la matiere ait par tout quelque union ou connexion et que neantmoins elle soit encor divisible par tout. Et qu'ainsi le même corps puisse estre appellé ferme, roide, dur; et encor fluide, mol, flexible, diverso respectu, et comparativement selon l'action qui tache de le flechir ou de le diviser. Vous jugés, Monsieur, qu'il seroit plus difficile de concevoir les raisons de ces differentes fermetés; mais si les fermetés sont primitives, on n'en doit pas chercher la raison. J'avoue que la matiere seroit heterogene en quelque façon, ou plustost dans une varieté perpetuelle, en sorte qu'on ne trouveroit pas la moindre particelle uniforme dans ses parties, au lieu que les atomes sont homogenes. Mais en recompense la matiere, selon mon hypothese, seroit divisible par tout et plus ou moins facilement avec une variation, qui seroit insensible dans le passage d'un endroit à un autre endroit voisin, au lieu que, selon les atomes, on fait un saut d'une extremité à l'autre et d'une parfaite incohaesion, qui est dans l'endroit de l'attouchement, on passe à une dureté infinie dans tous les autres endroits. Et ces sauts sont sans exemple dans la nature. D'où il s'ensuit aussi que selon moy la subtilité et varieté va à l'infini dans les creatures, ce qui est conforme à la raison et à l'ordre (car je suis pour un axiome tout opposé à cet axiome vulgaire, qui dit naturam abhorrere ab infinito). Mais selon les atomes le progres de la subtilité et de la variation se borne à la grandeur de l'atome, ce qui est aussi peu raisonnable que cette autre maniere de borner les choses par des extremités en enfermant le monde dans une boule. Quant à la difficulté des surfaces plattes, par lesquelles les atomes s'attacheroient, vous repondés, Monsieur, qu'il seroit plustost un grand postulatum de vouloir qu'il y en ait, que de vouloir qu'il n'y en ait point; puisqu'il faut bien de l'exactitude pour en former. Je reponds qu'il faudra tousjours une entiere exactitude pour former quelque surface que ce soit. Quelque qu'elle puisse estre, elle sera exacte. Or la surface platte estant des plus simples, il semble que ce qui est cause de l'existence des atomes seroit encor cause de l'existence des plus simples atomes; à moins que cette cause n'ait eu des raisons particulieres de les eviter, qui ne sçauroient estre prises qu'à fine pour eviter la cohesion. Mais ce seroit assez postuler que de raisonner ainsi. Vous adjoutés, Monsieur, quand même on admettroit un grand nombre d'atomes cubiques, qu'ils ne s'attacheroient pas aisement ensemble pour composer des nouveaux corps inseparables, parceque le plus souvent ils ne reposeroient pas durant quelque temps dans l'attouchement et ne demeureroient qu'un moment dans le même estat, car c'est ainsi que j'entends ce que vous dites, que leur application juste consisteroit in indivisibili. Mais je crois qu'il est assez estranger que cela se peut faire quelques fois, sçavoir qu'ils s'attachent en sorte qu'ils deviennent atomes, et qu'ils soyent desormais inseparables à toute eternité.

J'avois crû que ma raison contre les atomes prise des loix du mouvement estoit une des plus fortes. Cependant puisque vous promettés, d'expliquer un jour comment un corps inflexible peut rejaillir, je ne doute point que vous n'ayés à dire la dessus des choses tres considerables à vostre ordinaire. Vous trouvés aussi que la difficulté pourroit estre retorquée contre moy, puisque les corps à ressort sont composés, et que par consequent les derniers petits corps, estans sans ressort seront aussi incapables de rejaillissement. Mais je reponds qu'il n'y a point de dernier petit corps, et je conçois qu'une particelle de la matiere, quelque petite qu'elle soit, est comme un monde entier plein d'un infinité de creatures encor plus petites; et cela à proportion d'un autre corps, fut il aussi grand que le globe de la terre.

Comme il semble qu'on ne sçauroit rendre aucune raison pourquoy les parties d'un atome sont inseparables, que parce qu'elles se touchent une fois parfaitement par leur surfaces durant quelque temps; c'est pour cela que j'ay dit, que dans l'hypothese des atomes l'attouchement fait l'office d'un glouten. Il semble aussi que si l'attouchement par surfaces fait une connexion infiniment forte; l'attouchement par lignes et par points devrait aussi faire des connexions, mais surmontables, en sorte que deux corps se touchant par des lignes plus grandes seroient plus aisés à separer, et des corps se touchant par plus de points auroient plus de connexion que ceux qui se toucheroient par moins de points *caeteris paribus.* Et mêmes, point contre point et ligne contre ligne, il semble que *contactus osculi* devroit donner plus de connexion que *simplex contactus.* De plus, si un attouchement superficiel durable fait un attouchement insurmontable, il semble qu'un attouchement momentané feroit une connexion surmontable, mais plus forte, selon que le corps qui rase l'autre en le touchant à moins de vistesse. Enfin quoyque j'aye parlé cy-dessus des fermetés ou consistences primitives, j'ay tousjours du penchant à croire qu'il n'y en a aucune primitive, et que le seul mouvement fait de la diversité dans la matiere, et par consequent la cohesion. Et tant que le contraire n'est pas encor demontré, il me semble qu'on doit eviter la supposition d'une telle nouvelle qualité inexplicable, laquelle estant accordée, on passeroit bientost à d'autres suppositions semblables, comme à la pesanteur d'Aristote, à l'attraction de Mr. Newton, à des sympathies ou antipathies et à mille autres attributs semblables.

Mr. le M. de l'Hospital m'a fait l'honneur de me communiquer sa belle invention de la rectification de la courbe logarithmique. Cela fait voir qu'il a fait des tres grands progres dans cette analyse superieure. Et j'espere de luy des lumieres considerables. Je voy le moyen de trouver tousjours la ligne *ex data quantitate subtangentis*, lorsque cette ligne est ordinaire. Mais je n'ay pas encore le loisir et la patience necessaire pour mettre en estat tout ce qu'il faut pour practiquer cette methode, et en attendant je suis reduit à me servir de quantité d'adresses particulieres, à peu pres comme on fait pour resoudre des problemes semblables à ceux de Diophante.

Quant à la courbe de Mr. de Beaune, dont la soutangentielle seroit $y^2 - xy : a$, je l'ay voulu considerer presentement parcequ'elle depend de la courbe des logarithmes en telle façon, que le logarithme estant y, x sera la difference entre le logarithme et la subnumerale. J'appelle icy la sousnumerale t, supposé que le nombre du logarithme est le quotient de a divisé par $a - t$.

Il faut avouer, Monsieur, que vos decouvertes sur la quadrature de la galande de Mr. de Roberval sont extremement belles, j'entends la ligne dont l'equation est $x^3 + y^3 = nxy$. Comme cette ligne est d'une nature simple et que les coordonnées y sont homoeoptotes comme dans le cercle, j'ay aussi voulu tacher, si l'on pourroit trouver la quadrature, et j'en ay enfin trouvé cette construction generale, que (fig. 30) le trigligne ABCDA est à $\frac{2}{3}ny - \frac{1}{2}xx$, comme le quarré de l'abscisse x, ou AB, est au quarré de l'ordonnée y ou BC.

Je n'ay garde de m'attribuer par avance la connoissance de cette source nouvelle, que vous avés trouvée pour quantité de problemes des quadratures et des subtangentes. Il se pourroit que j'en sçusse quelque chose, mais je craindray plustost que non; car je voy qu'on peut employer quantité d'adresses particulieres, et je doute point qu'il n'y en ait beaucoup qui me sont inconnues, quoy qu'il y en ait aussi beaucoup que j'ay employées en temps et lieu. Je me sers quelques fois avec succes des series infinies.

Car toutes les fois qu'on donne un probleme tangentiel, je puis trouver la courbe demandée per seriem infinitam. Ce qui est au moins de grande usage pour la practique. Car je suppose $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ etc. et par consequent j'ay aussi y^2, y^3 etc., item xy^2, xy^3, x^2y^3 etc., j'ay aussi dy. Car dy est égal à dx multiplié par $b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$ etc., et ddy est égal à $1.2c + 2.3dx + 3.4.ex^2$ etc. multiplié par dx^2 et ainsi de suite. Ayant donc mon equation differentielle delivrée des fractions, racines et sommes, et ordonnée en sorte qu'elle soit egale à rien, et ayant expliqué les termes où entre y ou dy, en sorte qu'il ne reste d'autre indeterminée que x, ce qui fait evanouir dx, j'explique les arbitraires a, b, c, etc. en sorte que tous les termes se detruisent, et par ce moyen je trouve leur valeur, et par consequent celle d'y. Cette methode est la plus generale qu'on puisse imaginer, car elle reussit par tous ces problemes et encor pour ceux, dont la difficulté est d'une transcendance du second, troisieme ou autre degré, c'est à dire qui va aux differentio-differentielles et au delà. En un mot est supplementum generale geometriae practicae pro transcendentibus; pour ne dire (ce qui paroist assez) qu'elle sert à donner les racines des equations, mais aussi elle sert souvent à trouver des valeurs finies. J'espere le plaisir d'apprendre un jour vostre maniere physico-mathematique pour la quadrature de l'hyperbole. Ces applications donnent souvent des nouvelles vues.

Voicy quelque chose de tout autre nature que je joins icy. J'ay eu en main quantité de pieces curieuses qui servent à l'histoire et aux affaires, dont je feray imprimer le receuil. Celui des plus anciennes, avant l'an 1500 paroistra ce printemps dans un volume in fol. Mais pour les modernes, particulierement de nostre siecle, je souhaitterois encor bien des choses.

Mr. vostre frere et quelques autres habiles hommes de vostre pays employés dans les affaires publiques, me pourroient favoriser en ce dessein à vostre recommendation en communiquant quelques pieces curieuses, qui serviroient à instruire le public sans faire prejudice à qui que ce soit.

C'est dommage que Mr. van Beuninguen n'est pas en estat d'y contribuer. Mais vous ne manqués pas d'habiles ministres, et souvent les heritiers de ceux qui ont esté employés autrefois ne sont pas chiches de telles choses.

Je vous demande pardon de la liberté que je prends de vous parler d'une chose de cette nature. C'est à condition que cela ne vous importune nullement et que vous ne fassiés que ce que vous pourrés commodement par le moyen de quelques amis, un mot de vostre part valant mieux, que les grandes sollicitations de beaucoup d'autres. Je suis avec zele etc.

XLVII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye, ce 17 Sept. 1693.

Je ne dois pas me donner l'honneur de vous escrire apres un si long silence, sans alleguer les raisons qui l'ont causé, des quelles la principale est que depuis la correspondance que j'ay avec Mr. le Marquis de l'Hospital, il m'a donné tant d'exercice en matiere de Geometrie, que j'ay cru devoir eviter celuy qui me pouvoit venir d'un autre costé, quoyque sçachant bien qu'il n'y a pas moins à profiter pour moy de vos lettres. Il y a eu de plus cette raison, dont j'ay touché quelque chose dans mes precedentes, que je voiois que nostre dispute en Physique demandoit une nouvelle meditation pour respondre à vostre dernier raisonnement, que j'ay trouvé tres sensé et escrit avec soin. Il est vray que j'ay conçeu et annoté quelques repliques que j'ay à y faire, mais me vous permettrez s'il vous plait de les differer encore jusqu'à une autre lettre, parce que la matiere merite une plus grande attention que je n'y sçaurois donner presentement. Celle-cy n'est que pour vous envoier la Remarque que je fais à vostre exemple sur le Probleme de Mr. Bernoulli, par la quelle vous connoitrez, Monsieur, que j'ay fait quelque progres dans les subtilitez geometriques et dans vostre excellent calcul differentiel, dont je goute de plus en plus l'utilité. J'avois resolu de n'en point chercher la solution, laquelle aussi bien Monsieur le M. de l'Hospital m'avoit offert de me communiquer, mais le probleme me paroissant beau et singulier, je n'ay pu empescher qu'il me roulast dans la teste, jusqu'à ce que je me sois satisfait. Et à cette heure que la peine est prise, afin qu'elle serve à me maintenir dans l'estime de Messieurs les Geometres, je vous prie tres humblement d'envoier au plutost la feuille cy-jointe aux sçavans autheurs des Acta de Leipzich, afin qu'ils aient la bonté de l'y inserer.*)

Lorsque je reçus vostre quadrature de la Feuille de Mr. des Cartes ou de Roberval, je crus, apres l'avoir examinée que vous vous estiez mepris; parce qu'appellant vostre construction generale, elle n'estoit pas vraie lorsque, comme dans vostre figure, on prend BC pour y. Mais du depuis j'ay vu qu'elle quadroit à la position de BE pour y. Ce qui arrive de mesme dans deux manieres differentes, que Monsieur le M. de l'Hospital m'a envoiées pour cette quadrature, et dont j'ay, non sans quelque peine, demeslé la raison. Car je ne trouvois pas bon que le calcul differentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande. Vous aurez vu ce que j'ay inseré touchant cette matiere au Journal de Rotterdam, auquel temps je n'avois pas encore receu vostre solution; autrement j'en aurois fait mention, et ce n'auroit pas esté sans vous reprendre mal à propos, au lieu que je devois admirer ce que vous aviez fait. Je voudrois bien scavoir vostre jugement touchant ma Tractoria pour la quadrature de l'Hyperbole, que j'y avois jointe. Où il y a cela de remarquable, que suivant les loix de la Méchanique, supposé le plan horizontal, la description doit estre parfaite, et par consequent cette quadrature par son moien. Je vois que Mr. Bernoulli le professeur parle desia douteusement de la geometricité

---

*) Die Schrift, die Hugens mit diesem Briefe an Leibniz übersandte, findet sich in Hug. op. omn. Tom. I. p. 516.

de cette generation de courbes; car celles de Monsieur son frere sont du mesme genre, quoyque non pas tout à fait si simples.

J'ay esté surpris de voir ce que celuy-cy a fait mettre dans les Acta du mois de May touchant la courbe de Mr. de Beaune, comme si c'estoit luy qui en eust donné la construction au Journal des Scavans de 1692. Sur quoy Monsieur le M. de l'Hospital, m'a mandé certain detail de ce qui s'est passé, pour me faire connoitre le tort qu'on luy fait; et il semble avoir raison; mais pourtant je n'ose rien decider, inaudita parte altera.

La construction que vous m'envoiates pour cette courbe s'accordoit avec la seconde que me communiqua Mr. le Marquis, qui est plus courte que celle de Mr. Bernoulli du mois de May. J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie, dans ces nouveaux progres qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par vostre merveilleux calcul. M'y voilà maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens encore rien aux ddx, et je voudrois bien scavoir si vous avez rencontré de problemes considerables où il faille les emploier, afin que cela me donne envie de les etudier.

Je vois que vous avez opinion de pouvoir tousjours trouver les Courbes pour la soutangente donnée, lorsqu'elles sont geometriques. Cependant il y a un certain deguisement de ces soutangentes que je puis leur donner tousjours, où Monsieur le M. de l'Hospital se trouve empesché jusqu'icy, et vous connoissez sa capacité. Les exemples que je luy ay proposez sont la soutangente $\frac{aay+xyy}{ax-xy-ay}$, $\frac{x^2y}{3x^2+3aay-2xyy}$, $\frac{2ayy}{2aa-yy-xx}$. Examinez en quelqu'une je vous prie.

Je ne dois pas oublier de vous dire un mot touchant vostre Codex Juris Gentium, dont vous m'avez voulu communiquer le projet. C'est là un grand ouvrage que vous entreprenez, Monsieur, qui sera utile à bien des gens, et je voudrois estre plus propre que je ne suis à vous y servir en vous fournissant de la matiere. Mais le peu d'attachement et d'estime que j'ay per queste canzoni politiche, comme le P. Paolo les appelloit, me tient hors de commerce pour tout ce qui les regarde, et je souffre mesme avec peine qu'un esprit comme le vostre y emploie du temps. Vous devez croire que c'est un effect de la haute opinion que j'en ay, et de zele avec lequel je suis etc.

XLVIII.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce $\frac{1}{11}$ d'Octobre 1693.

Je suis ravi d'apprendre de temps en temps des nouvelles de vostre santé, qui nous doit estre chere. Car le monde se peut encore promettre beaucoup de vos decouvertes. Ainsi quand vos lettres ne contiendroient que cela, elles me seroient tousjours agreables. Mais il y a tousjours beaucoup à apprendre; et de plus vos obligeantes expressions, qui font connoistre avec combien de bonté vous voulés bien meas esse aliquid putare nugas, m'engagent à vous en faire des remercimens.

Je seray ravi de voir un jour vos repliques sur nostre question physique. Car comme vous approfondissés merveilleusement ces choses, et comme il semble que nous avons pris un nouveau tour pour éclaircir la question des Atomes et du Vuide, j'espere que nous la pourrons enfin terminer. Je souhaiterois de voir ce que vous avés remarqué sur mes animadversions anti-cartesiennes, que vous n'aviés pas trouvées tout à fait mauvaises.

J'ay aussi receu quelques lettres de M. le M. de l'Hospital, ou j'ay repondu le mieux que j'ay pû. Mais mes distractions ne m'ont point permis de luy donnertoute la satisfaction que j'aurois bien desiré luy pouvoir donner. Je n'ay pas manqué d'envoyer à Messieurs les Collecteurs des Actes de Leipzig ce que vous leur avés destiné sur le problemede Mr. Bernouilli; il est vray que c'a esté une semaine apres l'arrivée de vostre lettre, que j'ay trouvée à mon retour d'un petit voyage fait pour suspendre mes travaux durant quelques jours, car je me trouvois peu propre à l'application, apres une fievre tierce, qui n'a pas esté trop forte, mais qui m'a fait craindre une recheute. Comme j'avois toutes les commodités dans le voyage et avec celà l'esprit libre, je m'en suis bien trouvé.

Tout ce que je m'estois proposé en produisant le nouveau calcul, que vous commencés, Monsieur, de trouver commode, a esté d'ouvrir un chemin ou des personnes plus penetrantes que moy pourroient trouver quelque chose d'importance. Et maintenant voti damnatus sum, depuis que vous trouvés bon de vous en servir, et c'est me faire beaucoup d'honneur que de le declarer publiquement. Je suis ravi de voir par vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli que vous avés remarqué ce qu'il y a de plus beau dans nostre calcul differentiel, aussitost que vous avés voulu prendre la peine d'y entrer; c'est justement ce que je marquois autres fois d'y estimer, sçavoir qu'il nous donne des solutions generales qui menent naturellement aux transcendentes, mais qui dans certains cas font que la transcendalité se perd et qu'on decouvre que la ligne est ordinaire.

Vous faites beaucoup d'honneur à la Geometrie lorsque vous trouvés les plus beaux usages des lignes qu'elle peut fournir. Et cette nouvelle courbe, que vous ne donnés que par enigme, en sera une belle preuve, aussi bien que vostre usage de la cycloide l'a esté autres fois. La construction des lignes, que vous appellés Tractorias est d'importance. J'appelle ainsi plustost la construction que la ligne, car toute ligne peut estre construite de cette façon, prenant tousjours dans la tangente un point dont la distance du point de la courbe soit donnée, ce qui fera une nouvelle ligne, le long de laquelle un bout du fil estant mené l'autre decrira la courbe donnée. Vous estes tombé de vous même sur une idée, que j'avois deja, mais que j'ay apprise d'un autre. C'est de feu Mr. Perraut le Medecin, qui me proposa de trouver quelle ligne se produit en menant une extremité du fil le long d'une regle, pendant que l'autre extremité tire un poids par le plan horizontal dans lequel la regle tombe. Je trouvay bientost que c'est la quadratrice de la figure des tangentes canoniques du cercle, et par consequent dependante de la quadrature de l'hyperbole. Je croyois d'avoir seul cette application de ce mouvement, mais dernierement j'ay jugé par ce que Mr. Bernoulli a dit sur le probleme de son frere que vous deviés avoir publié la même chose dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, car je n'ay pas encor eu cette Histoire des ouvrages de cette année par la negligence du libraire, à qui j'avois écrit pour m'envoyer et cela et autres choses. Or cela m'a convié à publier encor d'autres pensées que j'avois sur l'usage de ce mouvement. Et comme il paroist que vous avés medité sur les moyens de le rendre exact en pratique, vous trouverés qu'il y a peut estre pas un en Geometrie qui le merite d'avantage. On pourroit se servir soit d'un poids, soit d'une appression elastique, comme par exemple en mettant un ressort entre deux plans paralleles immobiles, qui le tiendroient pressé. Ce ressort couleroit entre ces deux plans, d'une maniere à ne pouvoir changer de situation à leur egard, et presseroit un stile contre l'un des plans. Le style seroit attaché au ressort, et le fil qui tireroit l'un et l'autre, quoyqu'il n'iroit peut-estre point jusqu'au stile, devroit pourtant y aboutir en cas de prolongation ou plustost à l'axe prolongué du stile à l'entour duquel le fil, ou bien la regle équivalente au fil, se tourneroit pendant le mouvement. Il seroit meme possible de faire que le ressort (un ou plusieurs) estant pressé entre les deux plans, le stile qui doit tracer, fut dehors, pour qu'on puisse voir ce qu'il trace. On pourroit encor penser à d'autres moyens; le tout consiste dans le soin d'empecher que l'impulsion du stile même ne se mele avec la traction. Mais vous pourrés mieux choisir que personne. Lorsque on demande si cette construction est geometrique, il faut convenir de la definition. Selon mon langage je dirois qu'elle l'est. Aussi crois je que la description de la cycloide, ou de vos lignes faites par l'evolution, est geometrique. Et je ne vois pas, pourquoy on restreint les lignes geometriques à celles dont l'equation est algebrique. Mais entre les constructions geometriques je prefere non seulement celles qui sont les plus simples, mais aussi celles qui servent à reduire le probleme à un autre probleme plus simple, et contribuant à éclairer l'esprit. Par exemple je souhaiterois de reduire les quadratures ou les dimensions des aires aux dimensions des lignes courbes.

Mr. Bernoulli le jeune s'est plaint à son tour de M. le Marquis de l'Hospital, dans une lettre qu'il a voulu m'estre communiquée. Mais le sujet de leur contestation ne me paroist gueres considerable. Et la construction de la ligne de Mr. Beaune n'est pas des plus difficiles. Aussi crois-je qu'ils se seront raccommodés.

J'ay eu de la peine à me resoudre à chercher une des courbes dont vous me donnés les soutangentes, car ordinairement on s'engage en des calculs un peu longs, et maintenant je n'ose toucher à ceux qui sont tant soit peu prolixes. Neantmoins pour vous satisfaire, puisque vous m'aviés donné le choix, j'ay choisi la plus simple, qui est $2ayy : (2aa - yy - xx)$, et j'ay trouvé que vous aviés raison de l'appeller un déguisement, car c'est le cercle, à qui cette soutangente peut appartenir et son equation est $2ax - xx = yy$. Mais afin que vous voyiés que j'ay approfondi ce probleme, et que ce n'est pas par quelque hazard que j'ay trouvé ce cercle, je vous diray que la courbe n'est ordinaire, que dans ce seul cas, mais transcendante dans une infinité d'autres. Je vous en donneray premierement l'exemple le plus simple. Soit $x = \int \frac{adv}{a - v}$ (1) ou $dx = adv : (a - v)$ (2) il est manifeste que la lettre x signifie une grandeur qui est comme le logarithme, posé qu' $a - v$ soit le nombre, car cela depend de la quadrature de l'Hyperbole ou de la description de la ligne logarithmique. Cela posé, je dis que la ligne, dont l'equation est $yy = aa + 2ax - xx - av$ (3), satisfait au probleme, et il est manifeste que cette ligne se peut construire, supposita Hyperbolae quadratura. Voicy comment je prouve maintenant le succès par le calcul differentiel. Apres avoir differentié l'equation (3), je trouve $2ydy = 2adx - 2xdx - adv$ (4); dont ostant dv par l'equation (2) il y aura $2ydy = 2adx - 2xdx - 2xdx - adx + vdx$ (5). Et par cette derniere jointe à l'equation (3) ostant v, il y aura enfin $yydx = aadx + 2axdx - xxdx - 2aydy + 2aadx - 2axdx - aadx$, ou bien, apres les destructions dûes: $yydx + xxdx + 2aydy = 2aadx$ (6) ce qu'il falloit faire. Car il est manifeste que $dx : dy = 2ay : (2aa - yy - xx)$, c'est à dire que la soustangente est $2ayy : (2aa - yy - xx)$. La même chose reussit dans une infinité d'autres lignes, prenant l'arbitraire n, et disant: $yy = aa + 2ax - xx - nv$. Mais n estant egal à rien, il en provient le cercle. Quant aux ddx, j'en ay eu souvent besoin. Elles sont aux dx, comme les conatus de la pesanteur ou les solicitations centrifuges sont à la vistesse. Mr. Bernoulli marque dans les Actes de Leipzig de l'année passée p. 202 de les avoir employées pour les lignes des voiles. Et je les avois deja employées pour le mouvement des astres dans les mêmes Actes. Au reste comme vous avés de la peine à souffrir, Monsieur, que je pense souvent à l'Histoire, au Droit et à la Politique, il y a bien des gens qui me font la guerre icy et ailleurs de ce que je me mêle des matieres ou vous regnés. En vérité je m'accommoderois d'avantage de ce qui est de vostre goust, si j'en avois absolument le choix. Et j'estime plus les verités éternelles qui éclairent l'esprit que les faits ou les verités temporelles. Il faut cependant avouer, qu'encor en matiere de Droit, de Morale et de Politique on pourroit faire des decouvertes et des raisonnemens exacts. Et souvent on y manque en practique parcequ'on a coustume de les traitter superficiellement. Je seray bien aise de voir un jour vôtre jugement sur la preface de mon code diplomatique. Je vous avés communiqué mon project parceque j'ay cru que peut estre quelqu'un de vos amis en Hollande me pourroit fournir quelque piece curieuse, dont il y en auroit sans doute qui seroient honorables à vostre Republique.

Je n'employe que des pièces choisies. C'est pourquoy mon dessein n'est pas des plus vastes. Mais pour finir pas nostre Geometrie, j'ose dire qu'on pousseroit peut-estre bien avant la recherche de ces choses, si on avoit à la main quelque jeune homme d'esperance, qui en s'instruisant nous pouvoit soulager dans le calcul. En attendant je fais ce que je puis pour meriter l'honneur que vous me faites de croire que je suis avec tout le zele et toute la consideration possible etc.

XILX.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce $\frac{1}{11}$ Decembre 1693.

Vous aurés receu la lettre assez ample que je me suis donné l'honneur de vous écrire, il y a plusieurs semaines. Cependant vous aurés receu aussi les Actes de Leipzig, tant le mois ou mon effection des quadratures par le mouvement est inserée, que celuy ou vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli se trouve avec mon apostille, dont j'espere que vous ne serés pas mal satisfait. Je souhaitte surtout que vous nous expliquiés bientost vostre ligne enigmatique.

Quand je vous écrivois ma derniere je n'avois pas encor vu l'Histoire des ouvrages des Sçavans de cette année. Il est vray que j'avois fait prier Mr. Desbordes de me les envoyer, avec d'autres livres, lorsque le libraire, qui a imprimé le premier tome de mon Code diplomatique luy en envoyoit quelques exemplaires. Mais M. Desbordes n'a pas encor satisfait au libraire, et envoya quelques unes des choses que j'avois demandées à Mr. de la Bergerie, Ministre françois de la religion reformée, lequel ne sçachant pas, que c'estoit à mon occasion, crût que c'estoit pour luy et les garda. Ce ne fut que depuis peu et par hazard que je le sçûs. Car c'estoit par l'entremise de Mr. de la Bergerie que mon libraire avoit envoyé les exemplaires à Mr. Desbordes, et comme je m'estois enfin informé du retardement, il se trouva que Mr. de la Bergerie avait receu quelques unes des pieces que j'avois souhaittées et entre autres l'Histoire des ouvrages des Sçavans.

En ayant lu le mois de Fevrier, j'ay vu que je vous devois des remercimens de l'honnesteté avec laquelle vous avés bien voulu faire une mention avantageuse de mon calcul. Je dirai seulement un mot de la difference que vous mettés, Monsieur, entre ma construction des logarithmes par la chainette, et entre celle que vous en donnés par la traction, en disant que par la traction le parametre de la courbe, qui est sa tangente universelle, est donné, au lieu que je n'avois point enseigné, selon vous, comment on pourroit trouver le parametre de la chainette. Cela est venu sans doute de ce que vous n'aviés pas alors le loisir de jetter les yeux sur la figure, car vous auriés pu juger d'abord que la description de la courbe par le moyen d'une chainette en donne aussi fort aisement le parametre. Car la ligne FAL (fig. 31) estant formée par le moyen de la chainette donnée ♀⛢ suspendue par les deux bouts F et L, posés dans une meme horisontale, dont le milieu soit H, et le sommet de la chainette A, joignons H⛢, et de son milieu D menons à angles droits une droite DO, qui rencontrera HA prolongée en O, et AO sera le parametre qu'on demande. Car j'avois deja remarqué dans les Actes de Leipzig, en donnant l'explication de la chainette, que lorsqu'on fait A⛢ egale à la courbe AL, il se trouve aussi qu'OH et O⛢ sont egales. Ainsi puisque dans cette description de la courbe, sa longeur, sçavoir celle de la chainette, qui sert à la description, est donnée aussi, il est aisé d'en trouver encore le parametre. Je ne laisse pas de preferer la construction de la traction, non pas tant à cause des logarithmes, qu'à cause de consequences, qui sont d'une grande étendue, puisqu'elle sert à construire toutes les quadratures par un mouvement exact et reglé, dont je souhaitte d'apprendre vostre jugement.

Je souhaitte aussi que vous fassiés part au public de vos nouvelles lumieres sur l'attraction electrique, et que nous puissions jouir enfin de vostre Dioptrique, ou j'espere que nous trouverons bien des choses considerables touchant les meteores emphatiques. J'ay tousjours eu du panchant à croire que les queues des cometes sont de ce nombre, quoyque les explications qu'on en a données jusqu'icy ne soyent point satisfaisantes, et que je n'aye pas non plus de quoy me satisfaire la dessus. Enfin je souhaitte en mon particulier vos reflexions sur quelques considerations physiques d'une de mes precedentes, que vous m'aviés fait esperer dans vostre derniere.

On me mande de Paris qu'on y a donné au public, à l'imprimerie du Louvre et des Ms. de la Bibliotheque du Roy, quelques anciens Mathematiciens grecs. Entre autres Athenaeum de Machinis, des extraits poliorcetiques d'Apollodore, et quelques ouvrages de Philon et de Biton de la construction des machines de guerre, et les Cestes de Julius Africanus. On adjoute qu'un, nommé Mr. Boivin, a eu soin de cette edition, estant sçavant dans le Grec, mais que Mr. de la Hire en a esté chargé comme Mathematicien. Mais on dit en même temps que l'ouvrage aurait esté plus exempt de fautes, si un seul, qui eut eu l'habilité de ces deux sçavans hommes, eut eu la direction ce cette edition.

Quand Monsieur le M. de l'Hospital m'ecrivit il y a quelques mois, il me demanda si je n'avois pas reglé la ligne isochrone, à l'egard de l'eloignement uniforme d'un point fixe que j'avois proposé. Je me souvenois d'avoir vu le moyen d'y arriver, mais je n'avois pas alors le loisir d'y penser, comme je temoignais dans ma reponse à Mr. le Marquis. Depuis ayant retrouvé un vieux brouillon, j'ay vu que je l'avois reduit à une quadrature, qu'il faudra examiner avec plus d'attention, pour voir s'il n'y a pas la dessus quelque chose de reduisible à la commune Geometrie. Je ne sçay si le silence que Mr. le Marquis a gardé depuis, ne marque point que ma lettre ne l'a point satisfait. Comme en effect cela ne sçauroit manquer d'arriver à l'egard de celles d'un homme qui se laisse distraire autant que moy. Cependant je n'en estime pas moins Monsieur le M. de l'Hospital, et je trouve que vous avés eu raison, Monsieur, de luy rendre justice dans vostre lettre à Mr. de Beauval. Je m'estonne qu'il est presque le seul en France qui entre dans la Geometrie profonde. Connoissés vous Mr. Rolle? il semble que c'est luy qui a fait proposer un probleme geometrique avec un prix, mais à condition qu'on le doit resoudre par des voyes differentes de celles que Mr. Rolle a publiées. Je n'ay jamais vu ces voyes et je ne m'amuseray pas à ce probleme, qui est, trouver la plus simple courbe, propre à construire l'equation donnée avec une courbe donnée. Mr. Bernoulli le cadet a donné sa methode la dessus. On a temoigné qu'on n'en estoit point content. Je crois que Mr. Bernoulli y repliquera bientost. Ce n'est pas une chose si difficile à une personne aussi versée, qu'il l'est, dans cette analyse. Pour moy j'avois cru que cette matiere estoit comme epuisée, et qu'il ne s'agissoit que d'en donner les canons pour epargner aux autres la peine du calcul. Je suis avec zele etc.

L.

Leibniz an Hugens.

A Hanover ce 26 d'Avril 1694.

Je me consoleray de toutes les raisons de vostre silence, pourvu que ces deux n'en soyent point, une indisposition de vostre part, ou quelque refroidissement à mon égard, que je m'imagine de ne pouvoir meriter, vous honorant comme je fais, et dont je donne des temoignages publics.

J'attendois vostre sentiment sur deux choses principalement. 1°. Sur mes reflexions physiques touchant le vuide, les atomes et quelques autres choses de cette nature. 2°. Sur quelques points de Geometrie, comme sur ma solution generale de toutes les quadratures per constructionem tractoriam, que vous aurés remarquée dans les Actes de Leipzig, et sur la solution d'un probleme de soustangentielle, que vous m'aviés proposé, et que je vous avois donnée dans ma lettre. Je vous supplie donc de me faire sçavoir vostre sentiment sur ces choses là, d'autant que vous me fites esperer vos reflexions sur les miennes qui se rapportent à la physique.

Voicy un discours de la refraction d'un sçavant professeur à Witenberg, qui s'est attaché à expliquer dans ses theses vostre doctrine publiée dans le livre de la lumiere.

Il me cite aussi comme reformateur de l'hypothese de Mr. Descartes, et j'avois dit quelque chose en effect dans les Actes de Leipzig d'autre fois qui s'y rapporte, mais vostre hypothese me paroist bien plus plausible. J'ay appris de Mr. Fatio, par un de ses amis, que Mr. Newton et luy sont plus portés encor à croire que la lumiere consiste en des corps qui viennent actuellement du soleil jusqu'à nous, et que c'est par là qu'ils expliquent la differente refrangibilité des rayons et les couleurs, comme s'il y avoit des corps primitifs, qui gardoint tousjours leur couleur et qui venoient materiellement du soleil jusqu'à nous. La chose n'est pas impossible, cependant il me paroist difficile que, par le seul moyen de ces petits fleches, que le soleil decoche selon eux, on puisse rendre raison des loix de la refraction. Outre que Mr. Mariotte pretendoit faire voir par des experiences, mises dans son essay des couleurs, qu'il n'y a point de ces rayons colorés primitifs, et que la couleur d'un rayon est changeable; c'est ce que je n'ay pas encor assez examiné. Mais comme vous l'avez fait sans doute, je vous supplie de m'en faire sçavoir vostre sentiment.

On me fait sçavoir encor que Mr. Fatio pretend d'avoir donné une raison mecanique de la pesanteur, differente de la force centrifuge. En effect je m'étois imaginé déja autres fois, qu'il y pourroit avoir une espece d'explosion ou recessus, rejection d'une matiere tres menue, et par consequent plus solide, ou, si vous voulés, plus dense, qui obligeroit par consequent celle qui est plus rare et plus grossiere de s'approcher. Et pour entretenir ce mouvement je m'imaginois que la matiere menue estant eloignée du centre entroit dans la nourriture des corps grossiers; et que la matiere grossiere arrivée vers le centre de l'attraction estoit brisée en echange, et par consequent rendue meuue, à peu pres comme le feu se nourrit par l'attraction de la matiére et particulierement de l'air. Mais cependant vostre explication par la force centrifuge me paroissant aussi tres plausible, je me trouve comme suspendu entre ces deux sentimens. La proportion reciproque des quarrés des distances vient naturellement et aisément de l'emission rectilineaire, à l'imitation des rayons de lumiere; j'avois pourtant pensé encor à quelque explication par la force centrifuge. Et peut-estre que la nature, qui est abondante dans ses moyens, pour obtenir ses fins, joint ces deux causes ensemble, comme j'ay quelque penchant de croire à l'egard du mouvement des planetes, ou peut-estre la trajection propre et la circulation d'un ether deferant sont conciliables, et conciliés effectivement, tout s'accommodant dans la nature. Le consentement des planetes d'un meme systeme et l'analogie du magnetisme rendent tres probable qu'il y a quelque chose de plus que la simple trajection de Mr. Newton. On me mande aussi que vous avés fait une objection tres forte à Mr. Fatio touchant son explication de la pesanteur, mais qu'il avoit trouvé moyen de la resoudre et de vous faire convenir qu'elle estoit resolue. Et que Mr. Fatio ne met que tres peu de matiere dans tout l'univers avec du vuide entremelé incomparablement plus grand. Mais que ce peu de matiere estant extremement repandu, comme les filets et comme l'or en feuilles, il suffit pour remplir ou plustost pour embarasser l'espace. Je conviens qu'on se peut imaginer cela quand on peut admettre le vuide et les atomes. Mais je croy que cela n'est pas assez convenable à l'ordre de la nature, et bien des raisons me dissuadent d'admettre le vuide et les atomes, c'est-à-dire des corps infrangibles, comme je crois pourtant que sont encor ceux de Mr. Fatio. Cependant comme Mr. Fatio a bien de la penetration, j'attends de luy des belles choses, quand il viendra au detail; et ayant profité de vos lumieres et de celles de Mr. Newton, il ne manquera pas de donner des productions qui s'en ressentiront. Je voudrois estre aussi heureux que luy et à portée pour consulter ces deux oracles.

Voicy encor une chose dont je vous supplie. Il y a une Academie illustre, où des princes, comtes et jeunes gentilhommes sont elevés. Le professeur des mathematiques y est mort. On m'a mandé qu'on en desiroit un autre, mais qui, outre la theorie, eut encor la practique et le talent d'enseigner sur tout dans l'architecture militaire et dans les mecaniques; et s'il estoit encor bon dans l'architecture civile tant mieux. Les gages sont asseurement tres raisonnables et le poste fort avanteux, d'autant que c'est dans le lieu de la residence d'un prince, qui est luy mesme extremement curieux et intelligent, et qui honnore les gens de merite. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer et de me faire sçavoir si vous en connoissés quelqu'un qui y seroit propre. J'avois songé à un sçavant homme qui demeure comme je crois en Hollande, mais dont je ne sçaurois maintenant trouver le nom, qui a publié il y a quelques années un petit livre in 4°, ou il commence d'expliquer les principes de la fortification d'une maniere tres ingenieuse et par un calcul singulier, en faisant l'estime de la quantité de la defense, commençant par cette consideration, où il y a pourtant quelque chose à dire que la ligne AB (fig. 32) quoique plus grande que BC ne sçauroit donner plus de feu que BC, si les tirades doivent estre paralleles à DE. On m'avoit dit que l'autheur de ce petit livre estoit Hollandais ou du voisinage, mais qu'il avoit esté ingenieur de Brandebourg, et depuis avoit eu une entreprise en Hollande pour faire imprimer des figures sur de la soye à la façon des tailles douces. Je ne le sçaurois mieux designer. Mais je ne me borne pas à luy. On ne peut aussi rien encor promettre de certain, car le Prince du lieu qui est intelligent aura fait encor demander ailleurs et choisira. Mais je pourray contribuer à son choix. Je suis avec zele etc.

LI.

Hugens an Leibniz.

A la Haie ce 29. May 1694.

Je vous prie de croire, que ce n'est aucun refroidissement de mon costé qui ait causé ce long silence. Car au contraire j'ay tout sujet d'estre tres satisfait de vous, et vous suis trop obligé de la maniere que vous avez parlé de moy encore dans les Actes du mois d'Octobre de la derniere année. J'ay attendu longtemps pour voir cette Apostille dont vous m'avies parlé dans une de vos lettres, et ne l'ay point eue que vers la fin du mois de Mars, par la faute de nos libraires, ou plustost de ceux de Leipsich, que l'on dit qu'ils tardent tousjours à envoier les livres de peur qu'en ce pais on n'en fasse une autre edition à leur prejudice. Cependant cela m'incommode et parfois me fait tort; c'est pourquoy je vous supplieray icy, puisque je suis sur cette matiere, d'avoir la bonté, quand vous verrez paroitre quelque chose dans ces Nouvelles qui me regarde, ou quelque curiosité de Mathematique, de me le faire copier, quand il ne sera pas long. Cette attente m'a donc fait differer longtemps de vous escrire. Apres cela sont venu des etudes nouvelles, un petit traité en matiere Philosophique, et une application assez longue pour faire executer et mettre en perfection mon invention de l'horloge, dont j'ay cy devant fait mention; et puis des indispositions de plus d'une maniere, mais dont la derniere me deplait le plus, estant une intermission et battement irregulier du pouls, que je n'avois jamais senti auparavant, et que je ne crois pouvoir mieux guerir qu'en me donnant de longues vacances. Pour ce qui est de cette horloge, je vous diray en passant qu'elle reussit à souhait, et qu'elle sera de grande utilité, parceque estant aussi juste qu'une à pendule de 3 pieds, avec laquelle elle s'accorde 5 ou 6 jours sans differer d'une seconde, elle pourra souffrir le mouvement du vaisseau sans peine et aura encore d'autres aventages considerables.

Je trouve tant de matiere dans vos 3 dernieres lettres, que vous me pardonnerez si je ne repons à tout que succinctement.

Ce que vous dites pour justifier l'usage de la Chainette et qu'on peut trouver son parametre est vray, je n'avois pas asseuré aussi que cela estait impossible, et j'en scavois une maniere sans etendre et mesurer la longueur de la chaine, que je voulois voir si vous l'aviez rencontrée de mesme. Mais je ne m'estois point avisé de la vostre qui est bonne.

Lorsque je reçus vostre lettre où est la solution de ce que je vous avois proposé, de trouver la courbe pour la soutangente $\frac{2ayy}{aa - yy - xx}$, je l'examinay et construisis la courbe, et je vis que vous aviez resolu fort elegamment ce probleme par une voie peu commune, que je serois bien aise d'apprendre un jour. Ce sont des coups de maitre que vous vous estes reservé, Monsieur, quoyque par modestie vous disiez, à l'egard de l'usage que moy et d'autres faisons de vostre nouveaù calcul, que jam voti damnatus es. Vous pourriez faire un excellent Traité des usages divers de ce calcul, et je vous y exhorte comme à un ouvrage tres beau et utile, et qui doit plustost venir de vous que de tout autre. Mr. Wallis m'a envoié sa nouvelle edition latine de son grand ouvrage de Algebra, augmenté de quelque chose de nouveau des séries de Mr. Newton, où il y a des equations differentielles qui ressemblent tout à fait aux vostres, hormis les characteres. Au reste ce calcul des series me paroit bien fatiguant, et j'ay esté bien aise de ce que Mr. le M. de l'Hospital m'a mandé, qu'il scait faire sans l'ayde des series tout ce qu'on fait avec elles.

Touchant l'application que vous avez faite des Tractoriae à la quadrature des Courbes, j'avoue que je n'y puis trouver cet avantage que vous promettez, car ces descriptions sont tres embarrassées, et incapables d'aucune exactitude. A peine peut on tracer avec quelque justesse cette premiere et plus simple que j'ay proposée; celles de Mr. Bernoulli estant desia beaucoup plus difficiles; desquelles j'ay envoié la maniere, par des rouleaux et des cordes, à Mr. le Marquis, comme aussi l'equation que j'avois trouvée pour ces lignes et la construction universelle du probleme. Il est vray, comme vous dites, que toute courbe est Tractoria, mais je n'en vois point qu'il vaille la peine de considerer que celles dont je viens de parler. Je ne scay si vous aurez vu ma refutation de la Theorie de la manoeuvre des vaisseaux, dont l'autheur est Mr. Renaud, Ingenieur-General de la Marine en France. Je voudrois que vous eussiez aussi vu sa responsé imprimée, mais sans elle vous pouvez fort bien juger par ma remarque seule, si j'ay eu raison de le reprendre, et je serois bien aise d'avoir ce jugement pour alleguer dans la replique que je fais y faire. Mr. de l'Hospital m'a mandé que ce que j'avois objecté estoit sans replique.

Je vous rends graces de la These du professeur de Wittenberg, et je suis bien aise de voir ma theorie approuvée, quoyqu'il ne fasse un peu tort de dire que mon explication de la refraction est dans le fond la mesme que celle de Hoecke et de Pardies, et n'en differe qu'en la maniere d'expliquer. Car tout consiste dans cette maniere, et ces autheurs auroient esté bien empeschez à rendre raison des bizarreries du cristal d'Islande, outre que Hoocke a fait des bevues honteuses, que j'aurois bien pu relever si j'eusse voulu.

Quant à l'hypothese pour la lumiere que Mr. Newton et Fatio croient possible, je remarque que si la lumiere consiste en des corpuscules, qui vienent actuellement du soleil jusque à nous, et de mesme de toutes les etoiles et objets que nous voions, il faut de necessité que cette matiere soit extremement rare, et que le vuide occupe incomparablement plus de place qu'elle, afin qu'elle ne soit pas empeschée dans son cours en venant vers l'oeil d'une infinité de costez differents. Mais estant si rare, c'est-à-dire composée de particules si fort separées, comment est ce qu'on peut expliquer l'extrême vitesse de la lumiere qui est prouvée par la demonstration de Mr. Romer? Mr. Fatio me respondoit qu'il concevoit ce passage si rapide des corpuscules depuis le Soleil ou Jupiter jusqu'a nous estre possible, a quoy je ne scaurois consentir. Et outre cela je ne vois pas, non plus que vous, que dans leur hypothese ils puissent expliquer la cause de la refraction, et encore moins celle du cristal d'Islande, qui me sert d'*experimentum crucis*, comme l'appelle Verulamius. Les experiences qu'a fait Mr. Newton de la differente refraction des raions colorez sont belles et curieuses, mais il n'explique pas ce que c'est que la couleur dans ces raions, et c'est en quoy je ne me suis pas pleinement satisfait non plus jusqu'à present.

La raison mechanique de la Pesanteur que s'estoit imaginé Mr. Fatio me paroissoit encore plus chimerique que celle de la lumière. Elle estoit presque la mesme que celle de Mr. Varignon, que vous aurez pu voir, puisqu'elle est imprimée. Ils veulent que ce qui pousse les corps pesants vers la terre, c'est que la matiere etherée aiant du mouvement de tous costez, elle en doit avoir plus qui tende vers la terre, que qui vient de son costé, a cause de la masse de ce globe; et qu'ainsi les corps sont poussez vers sa surface.

J'objectois a Mr. Fatio que par ce moien il se devoit continuellement accumuler de la matiere etherée aupres de la terre, a quoy il respondoit qu'il concevoit si peu de corps ou de solidité dans cette matiere, qu'en s'accumulant aussi longtemps qu'on vouloit, elle ne faisoit point de masse considerable. Vous semble-il qu'il à y a la de la raison ou de la vraisemblence? Il y auroit plus d'apperance dans vostre pensée de l'immitation des corpuscules, et dans la comparaison de l'attraction de l'air par le feu, si ce n'estoit pas en supposant la pesanteur qu'on explique cette attraction.*)

Je ne toucheray pas encore cette fois nostre question du vuide et des atomes, n'aiant esté desia que trop long, contre mon intention. Je vous diray seulement, que dans vos notes sur des Cartes j'ay remarqué que vous croiez absonum esse nullum dari motum realem, sed tantum relativum. Ce que pourtant je tiens pour tres constant, sans m'arrester au raisonnement et expériences de Mr. Newton dans ses Principes de Philosophie, que je scay estre dans l'erreur, et j'ay envie de voir s'il ne se retractera point dans la nouvelle édition de ce livre, que doit procurer David Gregorius. Des Cartes n'a pas assez entendu cette matiere.

J'ay parlé au Sr. Teiller, touchant ce que vous m'aviez mandé, mais il sémble qu'il aspire à estre professeur de Mathématiques à Utrecht, et je le vois avec cela encor occupé dans sa manufacture de toiles imprimées. Je doute aussi s'il seroit bien vostre fait, n'aiant rien vu de ce qu'il scait en cette science que sa maniere de Fortification, où il y a une application de l'Algebre bien mince, à ce que je me souviens. Je m'informeray à Leyde de Mr. de Volder s'il ne connoit personne pour l'employ que vous marquez. Je suis etc.

LII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 8 Juin. 1694.

J'espere que ma lettre du 29 du mois dernier vous aura esté rendue. J'ay parle du depuis à Mr. de Volder pour m'informer touchant ce que je vous avois mandé, qui m'a nommé encore quelques personnes qu'on pourroit proposer pour l'em-

*) Die Sammlung Uylenbroek's enthält nach diesen Worten Folgendes, das in dem vor mir liegenden Briefe von Hugens fehlt: Car l'air plus dense et pesant est poussé à la place de l'air estendu par la chaleur, qui en devient plus leger et pour cela monte en haut

ploy dans l'Academie inconnue, mais m'a assuré en mesme temps qu'il n'en connoissoit pas de plus capable que le Sr. Teiller dont vous m'aviez escrit. Il m'en a dit aussi touchant ses bonnes qualitez des choses que je ne scavois pas, et entre autres qu'il avoit voiagé en Italie, en Sicile, et jusqu'au Cairo, et qu'il avoit dessiné en tous ces pais une infinité d'antiquitez et de belles vues. Au reste que sa solicitation ou celle de ses amis pour la profession de Mathematique a Utrecht n'avoit point reussi, seulement par ce qu'il avoit esté disciple de Mr. Cranen, car ces partialitez du Cartesianisme et du Vostianisme s'etendent jusques mesme les professions ou il n'est pas question de Theologie. J'ay aussi vu apres cela Mr. Teiler et toute sa boutique de la Manufacture des toiles imprimées, estant logé a une demie lieue d'icy dans une maison de campagne qui est grande et belle. Il me dit que d'autres personnes luy avoient encore parlé touchant cet employ en Allemagne, que c'estoit chez Mr. le Prince de Wolfenbuttel, et me paroissoit assez bien disposé maintenant a l'accepter. Mr. de Volder m'a dit qu'il a esté cy-devant professeur a Nimwegen. Je n'ay pas voulu manquer, Monsieur, a vous faire scavoir toutes ces choses, puisque vous m'avez fait l'honneur de demander mon avis, et que je n'estois pas assez informé, en vous ecrivant ma precedente lettre.

J'oubliay de vous marquer dans la mesme deux vilaines fautes qu'on a faites dans le Journal de Leipsich en donnant ce que j'ay escrit de Problemate Bernouliano. scavoir abstinere statuerim au lieu de statuissem. Et omnia erui posse au lieu de eam. Vous me ferez grand plaisir d'en avertir par occasion l'Editeur de ces Journaux, a qui je ne scay si je dois imputer cet Erratum ou a vostre copiste, car je suis bien assuré d'avoir escrit autrement.

Je ne scay si vous aurez sceu l'accident arrivé au bon Mr. Newton, scavoir qu'il a eu une atteinte de phrenesie, qui a duré 18 mois, et dont on dit que ses amis a force de remedes et de le tenir enfermé, l'ont a peu pres gueri maintenant. Voila un grand malheur, et le plus facheux qui puisse arriver a un homme. J'avois encore d'autres choses a vous mander, mais je suis pressé d'envoier cette lettre, c'est pour quoy je finis en vous assurant que je suis etc.

LIII.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce $\frac{12}{22}$ Juin 1694.

J'ay esté bien aise de recevoir l'honneur de vostre lettre, apres un assés long silence, dont pourtant je n'ay garde de me plaindre, sçachant bien comme vostre temps est pretieux, et d'ailleurs je seray tousjours des plus ardens à vous exhorter de ménager vostre santé, d'autant plus que j'apprends par vostre lettre même, qu'elle a esté un peu chancelante. Plût à Dieu que nos études servissent à nous faire avancer considerablement dans la medecine. Mais jusqu'icy cette science est presqu'entierement empirique. Il est vray que l'empirie même seroit de grand usage, si on s'attachoit à bien observer, et même à bien employer tant d'observations déja faites, mais comme la medecine est devenue un mestier, ceux qui en font profession ne la font que par maniere d'acquit, et autant qu'il faut pour sauver les apparences; sçachant bien que peu de gens sont capables de juger de ce qu'ils font. Je voudrois que quelque ordre religieux, tel que celuy des Capucins par exemple, se fût attaché à la medecine par un principe de charité. Un tel ordre bien reglé la pourroit porter bien loin. Mais laissons là ces souhaits inutiles et venons aux points de vostre lettre.

Je souhaitte que le public apprenne bientost des particularités de vostre horloge, qui ne sçaurait manquer d'estre de grande consequence. Pour ce qui est du traité d'une matiere philosophique que vous avés fait, je serois bien aise d'apprendre un jour ce que ce pourra estre. Vous estes trop reservé jusqu'icy, ne voulant donner au public que des demonstrations; au lieu que des personnes de vostre force ne doivent pas luy envier jusqu'à leur conjectures. C'est pourquoy, quand vous vous ouvririés sur toutes sortes de matieres encor que philosophiques et problematiques, vous ne feriés que bien. Vostre exhortation me confirme dans le dessein que j'ay de donner quelque traité qui explique les fondemens et les usages du calcul des sommes et des differences et quelques matieres connexes. J'y adjouteray par maniere d'appendice les belles pensées et découvertes de quelques géometres, qui ont bien voulu s'en servir, s'ils veulent avoir la bonté de me les envoyer. J'espere que Mr. le M. de l'Hospital voudra bien nous faire cette faveur, si vous jugés à propos de le luy proposer. Mrs. Bernoulli freres en pourront faire autant. Si je trouve quelque chose dans les productions de Mr. Newton inserées dans l'Algebra de Mr. Wallis, qui nous donne moyen d'avancer, j'en profiteray en luy rendant justice. Mais oserois-je bien vous supplier vous même de me favoriser de ce que vous jugerés à propos, comme par exemple de vostre analyse du probleme de Mr. Bernoulli donnée par cette maniere de calcul?

J'expliqueray entre autres ces equations exponentiellement transcendentes, dont je vous ay parlé autres fois, lorsque dans l'equation de la courbe l'inconnue entre dans l'exponant. Par exemple si l'equation de la courbe estoit $x^z = y$, ou pour garder la loy des homogenes $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{z}{a}} = \frac{y}{a}$ (1), et si z estoit une grandeur explicable par le moyen des indeterminées x et y et de la determinée a, cette equation pourra estre delivrée de son exponentialité et reduite au calcul des differences; car, en vertu de nostre equation, supposant le logarithme de la grandeur a estre 0, ou log. a = 0 (2), il y aura $\frac{z}{a}$ multipliée par log. x = log. y, ou bien z log. x = a log. y. (3). Mais log. x = $\int\frac{dx}{x}$ (4) et log. y = $\int\frac{dy}{y}$ (5), donc $z\int\frac{dx}{x} = a\int\frac{dy}{y}$ (6) et differentiando $\frac{zdx}{x} + dz\int\frac{dx}{x} = \frac{ady}{y}$ (7). Et c'est par là qu'on peut avoir $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire la raison de l'ordonnée à la soustangente, en expliquant dz par la valeur de z, que je suppose estre connue. Car si par exemple z estoit $= \frac{xy}{a}$ (8), ensorte que l'equation (1) signifieroit $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{xy}{aa}} = \frac{y}{a}$ (9), dz seroit $= \frac{x\,dy + y\,dx}{a}$ (10), et de l'equation (7) proviendroit $\frac{ydx}{a} + x\,dy \times \int\frac{dx}{x} + y\,dx\int\frac{dx}{x} = \frac{ady}{y}$ (11) et par cette équation on aura dy : dx, c'est-à-dire on construira la tangente de la courbe en employant x et y et le logarithme d'x. Mais pour delivrer icy l'equation ab omni vinculo summatorio, il faudroit descendre aux differentio-differentielles. Souvent il suffit de venir aux equations differentielles du premier degré, et alors ces equations differentielles (qui sont des problemes de la converse des tangentes) se peuvent construire par les logarithmes, et se peuvent exprimer par des equations exponentiellement transcendentes, comme je fis un jour dans un exemple que vous m'aviés proposé, ou pourtant à cause d'un mesentendu nous n'avions pas visé à une même ligne. Je souhaitterois de pouvoir tousjours reduire les autres transcendentes aux exponentielles; car cette maniere d'exprimer me paroist la plus parfaite, et bien meilleure que celle qui se fait par les differences et par les series infinies, puisqu'elle n'employe que des grandeurs communes, quoyqu'elle les employe extraordinairement. Cependant j'estime fort les series, car elles expriment veritablement ce qu'on cherche, et donnent le moyen de le construire aussi prochainement qu'on desire, et achevent par consequent la geometrie ou analyse quant à la practique. Et ce qui est le plus important, quand les autres voyes se trouvent courtes, les series viennent au secours. Car il peut arriver qu'un probleme descende aux differentielles du 2e, 3e ou 4e degré, c'est-a-dire qu'il y aie non seulement x et y et dx, dy, mais encor ddx, ddy, d^3x, d^3y, alors par les series la courbe ou la construction se trouve quelquefois aussi aisement, que si ce n'estoit qu'une equation ordinaire, selon la maniere generale que j'ay donnée dans les Actes, et que je n'ay encor vue chez personne. Car la methode que Mrs. Mercator et Newton avoient publiée, en estoit toute differente. Ainsi je ne sçaurois demeurer d'accord de ce que Mr. le M. de l'Hospital vous a écrit, qu'on peut faire sans les series, tout ce qui se peut faire par elles. Quant à ma construction generale des quadratures par la traction, il me suffit pour la science qu'elle est exacte en theorie, quand elle ne seroit pas propre à estre executée en practique. La pluspart des constructions les plus geometriques, quand elles sont composées, sont de cette nature. Comme par exemple, les regles du Mesolabe organique de Mr. Descartes ne sçauroient operer exactement, lorsqu'elles doivent estre un peu multipliées. Et quoyque Mr. Descartes ait proposé de construire les equations du 5e ou 6e degré par un mouvement de la parabole materielle, je crois qu'on auroit bien de la peine à faire une telle construction avec exactitude, pour ne rien dire des degrés plus hauts. Cependant la construction generale de toutes les quadratures est infiniment plus difficile, et neantmoins je crois que les difficultés pourroient estre assés diminuées en practique en se servant d'une bonne appression. Car non obstant tous les embarras apparens, l'appression faisant son devoir, la ligne de la traction ne sçauroit manquer de toucher la courbe. Mr. Bernoulli le cadet ayant consideré attentivement ma description en a reconnu et admiré la verité, quoyqu'il croye aussi qu'il seroit difficile de la bien executer. Je voudrois avoir des moyens semblables bien generaux pour construire les autres equations differentielles, ou les courbes ex tangentium natura.

Je n'ay point vû encor vostre refutation de la theorie de la manoeuvre des vaisseaux. Apparemment elle sera dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, que nos libraires n'ont pas encor receus par leur negligence ordinaire. Il faudra que je mette ordre pour me les faire tousjours envoyer par la poste. Lorsque je considerois autres fois cette theorie, elle me paroissoit un peu superficielle, et je n'achevay pas de la parcourir. Mais j'y penseray un de ces jours. Je me souviens maintenant qu'il negligeoit entre autres choses le centre de gravité du vaisseau, lequel ne devroit pas estre negligé, ce me semble, sur tout pour la derive, puisque les impressions du choc des corps opérent diversement selon la situation de ce centre. Il y avoit bien d'autres choses qui m'arrestoient. Le meilleur y est ce qu'il y a de la practique, et je voudrois avoir vu le livre de la manoeuvre de Mr. de Tourville qu'il cite.

Asseurement Mr. Hook et le P. Pardies n'avoient garde d'arriver à l'explication des loix de la refraction, par les pensées qu'ils avoient sur les ondulations. Tout consiste dans la maniere dont vous vous estes avisé de considerer chaque point du rayon comme rayonnant, et de composer une onde generale de toutes ces ondes auxiliaires. Si Mr. Knorr m'avoit consulté, je luy aurois dit mon sentiment là dessus. Le P. Ango qui ne sçavoit de cela que ce qu'il avoit pû trouver dans les papiers du P. Pardies, apres avoir bien sué inutilement pour rendre raison de la loy des sinus, a enfin fabriqué un pur paralogisme habillé en demonstration pour se tirer d'affaire. Ne pouvant pas rendre raison de la refraction ordinaire, comment auraient ils osé penser à expliquer celle du cristal d'Islande? Il me semble qu'il y avoit encor quelques phenomenes de ce cristal, qui vous arrestoient et je voudrois sçavoir si vous avés fait depuis des progres la dessus. N'avés vous pas trouvé que ce cristal fournit quelques phenomenes extraordinaires à l'egard des couleurs.

Je ne sçay si je vous ay mandé, que Mr. Fatio m'a communiqué quelque chose des pensées qu'il a pour expliquer mecaniquement les sentimens de Mr. Newton. Il est vray que ce n'est qu'avec reserve et en enigme. Il croit que la matiere ne remplit qu'une partie tres petite de l'espace; il croit les corps percés à jour comme les squelettes, pour donner aisement passage. Il croit aussi que si l'espace estoit assés rempli d'une matiere fluide muë en tout sens, cette matiere empecheroit extremement le mouvement des corps. Il parle de l'objection que vous luy aviés faite, qui est que la matiere se devroit epaissir autour de la terre, et que cela l'a arresté, mais qu'enfin cette objection s'est evanouie quand on l'a examinée avec exactitude, c'est de quoy (dit-il) Mons. Hugens est à present persuadé. Il se passe en cecy (adjoute-t-il) quelque chose d'admirable, qu'il faut avoir remarqué, avant qu'on puisse voir que l'objection n'a rien de solide.

Il y a de l'apparence qu'il se fait une circulation ou reciprocation dans la nature, en sorte qu'une matiere subtile mais dense ou serrée, s'eloignant des corps qui attirent les autres, force la matiere grossiere de s'y approcher, mais cette matiere grossiere, quand elle y est arrivée, est broyée et rendue subtile, pour estre renvoyée derechef à la circumference, ou estant dispersée de nouveau, elle sert d'aliment à d'autres corps grossiers. Il y peut avoir plusieurs raisons de l'attraction; comme la force centrifuge, née d'un mouvement circulaire, que vous avés employée; item le mouvement droit des corpuscules en tout sens que j'ay vû déja employé autres fois d'une maniere semblable par un auteur, qui tachoit par là de rendre raison de la fermeté des corps et des phenomenes qu'on attribue communement à la pesanteur de l'air, mais que vous aviés pourtant observés dans le vuide. Et comme il semble que la masse de la terre doit faire en sorte que plus de corpuscules y tendent, qu'ils n'en viennent; on pourra dire que cela poussera les corps vers la terre selon le sentiment de quelques uns que vous marqués. On peut encor adjouter l'explosion, comme seroit celle d'une infinité d'arquebuses à vent. Car ne pourroit-on point dire que les corps, qui font la lumiere, la pesanteur et le magnetisme, sont encor grossiers en comparaison de ceux qui feroient leur propre ressort, et qu'ainsi ils enferment une matiere comprimée; mais quand ils arrivent au soleil, ou vers le centre des autres corps, qui font émission (dont l'interieur pourroit repondre au soleil), le grand mouvement que s'y exerce, les brisant et les défaisant, delivreroit la matiere, qui y estoit comprimée. Il semble effectivement que c'est de cette matiere que le feu agit. Peut estre aussi que plusieurs moyens se trouvent joints ensemble, pour causer la pesanteur, puisque la nature fait en sorte que tout s'accorde le plus qu'il est possible. Quoy qu'il en soit, il nous sera tousjours difficile de bien determiner ces choses. Si quelqu'un y peut reussir de nostre temps, vous le serés. Il est vray que toute matiere etherée qui tend vers la terre, ou vers quelqu'autre corps sans percer, n'en sçauroit revenir. Car celle qui ne perce point, rejallissant, rencontrera d'autre matiere qui y arrive apres elle. Ainsi ces matieres se doivent brouiller ensemble et s'amasser à l'entour du corps, mais peutestre que la masse qui s'en forme est dissipée derechef à peu pres comme les taches du soleil.

Quant à la difference entre le mouvement absolu et relatif, je croy que si le mouvement, ou plustost la force mouvante des corps, est quelque chose de reel, comme il semble qu'on doit reconnoistre, il faudra bien qu'elle ait un subjectum. Car a et b allant l'un contre l'autre, j'avoue que tous les phenomenes arriveront tout de meme, quelque soit celuy dans lequel on posera le mouvement ou le repos; et quand il y auroit 1000 corps, je demeure d'accord que les phenomenes ne nous sçauroient fournir (ny même aux anges) une raison infallible pour determiner le sujet du mouvement ou de son degré; et que chacun pourroit estre conçû à part comme estant en repos, et c'est aussi tout ce que je crois que vous demandés. Mais vous ne nierés pas (je crois) que veritablement chacun a un certain degré de mouvement, ou, si vous voulés, de la force; non-obstant l'equivalence des hypotheses. Il est vray que j'en tire cette consequence, qu'il y a dans la nature quelque autre chose que ce que la Geometrie y peut determiner. Et parmy plusieurs raisons dont je me sers pour prouver qu'outre l'etendue et ses variations, qui sont des choses purement geometriques, il faut reconnoistre quelque chose de superieur, qui est la force; celle-cy n'est pas des moindres. Mr. Newton reconnoist l'equivalence des hypotheses en cas des mouvemens rectilineaires; mais à l'égard des circulaires, il croit que l'effort, que font les corps circulans de s'eloigner du centre ou de l'axe de la circulation, fait connoistre leur mouvement absolu. Mais j'ay des raisons qui me font croire que rien ne rompt la loy generale de l'equivalence. Il me semble cependant que vous même, Monsieur, estiés autres fois du sentiment de Mr. Newton à l'egard du mouvement circulaire.

Je crois que Mr. Teiler sera bientost à Wolfenbuttel. Je vous suis bien obligé de la bonté que vous avés eue de vous en informer.

J'auray soin d'écrire qu'on marque les errata dans les Actes de Leipzig, dont je ne sçaurois concevoir la raison. Il faut que vostre écriture ait esté un peu obscure en ces endroits.

Je suis bien aise d'apprendre la guerison de Mr. Newton aussitost que la maladie, qui estoit sans doute des plus facheuses. C'est à des gens comme vous, Monsieur, et luy, que je souhaitte une longue vie et beaucoup de santé, preferablement à d'autres, dont la perte ne seroit gueres considerable en parlant comparativement.

Si je remarqueray quelque chose dans les Actes de Leipzig, où vous puissiés avoir interest, je vous en donneray part. Je n'ay pas encor celles du mois de May. Au reste je suis avec zele etc.

P. S. Je ne sçay quand je verray l'ouvrage que Mr. Wallis vient de publier. Voudriés vous bien me faire la grace, Monsieur, d'en faire copier des endroits où Mr. Newton donne des nouvelles decouvertes. Je ne demande pas proprement sa maniere de trouver des series, mais s'il donne des moyens pour la converse des tangentes ou pour quelque chose de semblable. Car en m'ecrivant autres fois il couvrit sa maniere sous des lettres transposées. Il marquoit d'avoir deux façons, l'une plus generale, l'autre plus elegante. Je ne scay s'il en aura parlé.

LIV.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce 29. Juin V. S. 1694.

Vous aurés receu ma derniere. Cependant suivant vostre ordre je vous mande que dans les Actes de Leipzig du mois de May on a inseré la solution du probleme de Mr. Bernoulli, donnée par Mr. le M. de l'Hospital, qui avoit esté inserée dans les memoires de l'Academie Royale des Sciences 1693, 30. Juin. On y adjoute l'objection d'un anonyme inserée dans le Journal des Sçavans, qui pretend que cette solution n'est point satisfaisante, en ayant fait l'essay dans le cas de la proportion double. J'ay appris que Mr. le Marquis a repondu depuis, et fait voir, que si l'autheur de l'objection avoit pris la peine de pousser son calcul à bout, il en auroit trouvé le succès. Je ne doute point que la solution de Mr. le Marquis ne vous soit connue, autrement que je l'aurois copiée. Pour moy je trouve qu'on peut tousjours donner la solution quand la raison est donnée entre deux fonctions quelconques. J'appelle fonctions (fig 33.) l'abscisse AB ou Aβ, l'ordonnée BC ou βC; la corde AC, tangente CT ou Cϑ, perpendiculaire CP ou Cπ, sous perpendiculaire BP ou $\beta\pi$, soustangente BT ou $\beta\vartheta$, retranchées, resectas, par la tangente ou par la perpendiculaire AT ou Aϑ, AP ou Aπ, corresectas Tp ou $\vartheta\pi$, et quantité d'autres. Le probleme se peut tousjours reduire aux quadratures, et souvent par là à la Geometrie ordinaire. Meme s'il y avoit une equation où n'entreroient d'autres droites que ces fonctions, quelque nombre des onctions pourroit entrer à la foy, la courbe ne laissera d'estre construisible.

Dans les memes Actes Mr. Jean Bernoulli fait voir par le calcul que si un fil parfaitement flexible estait poussé partout par une puissance egale et perpendiculaire à sa courbure, ce fil seroit circulaire. Puis il a fait un calcul sur la force necessaire pour enfler les muscles et dit que la tabelle qu'il en a tirée est bien différente de celle de Borelli. Il me semble qu'il considere seulement les commencemens de l'action de l'elasticité du fluide qui pousse le muscle, mais il faut une acceleration pour produire un effect notable. Quoy qu'il en soit, ce qu'il dit paroist tousjours fort ingenieux, et il est bon qu'on tasche d'appliquer les mathematiques à ces choses. Il cite souvent je ne scay quelle proposition fondamentale de Mr. Varignon. J'ay parcouru autres fois le livre de Mr. Varignon, mais il ne me paroissoit point dire des choses fort nouvelles. Il est vray qu'elles ont paru telles à bien des gens.

Au reste je me rapporte à mes precedentes et vous supplie de me faire part de vos pensées sur les points de ces lettres où vous n'avés pas encor touché. Je suis tousjours persuadé de plus en plus qu'il n'y a point d'atomes ny vuide, et que la moindre particelle de la matiere contient veritablement un monde infini de creatures differentes. Je vous ay supplié un jour de me faire part de ce que Mr. Newton a vous communiqué sur les couleurs, si cela vous est permis. Je prends la liberté de vous en faire ressouvenir. Je suis dans la curiosité d'apprendre s'il y aura quelque chose de considerable dans ce que Mr. Wallis vient de donner de Mr. Newton. Je suis avec zele etc.

LV.

Leibniz an Hugens.

Hanover ce $\frac{17}{27}$ Juillet 1694.

Voicy un fragment des Actes de Leipzig du mois de Juin, que vous ne serés peut estre point faché de voir de bonne heure. Et j'en souhaitte vostre jugement, aussi bien que sur les points de mes lettres precedentes. Comme je suis comme invité de dire quelque chose sur ce discours de Mr. le Professeur Jaques Bernoulli, je ne scaurois me dispenser d'envoyer quelque chose au plustost à Leipzig. Je croy qu'il est tousjours vray que les tensions sont proportionelles aux forces, mais qu'il ne faut pas tousjours prendre les tensions dans le changement de la longitude du corps, puisqu'elles dependent plustost des changemens du contenu solide. Ainsi la figure d'une lame elastique ne me paroissant pas assez arrestée, j'avois esté d'autant moins porté à l'examiner. Les theoremes sur les cercles osculateurs (dont les centres sont dans vos courbes generatrices par evolution) que Mr. le Professeur Bernoulli considere comme des clefs, ne me paroissent point difficiles à trouver, et sans aucune inspection de la figure, par le seul calcul des differences on en trouve, et des plus generaux; non seulement pour la grandeur du rayon de ce cercle, mais encor pour la position du centre; car lorsqu'on veut chercher la generatrice evolutive d'une ligne qui n'est donnée que differentiellement, le calcul même ordonne qu'on passe aux differentio-differentielles, et quand on n'auroit pas ces théoremes, on les employe virtuellement et sans y penser. Je remarque un peu d'emulation entre les deux freres, mais elle est louable, et leur sert d'eguillon. Je n'entreray point dans l'examen des elastiques et de leurs proprietés. Car je n'ose gueres m'enfoncer dans des nouveaux travaux qui demandent trop d'attachement, surtout quand la chose a esté faite; car de pouvoir dire et nos hoc poteramus, ce n'est pas une raison suffisante pour moy, qui dois menager mon temps. Je n'ay pu m'empescher de sourire un peu, quand il dit, que pour me faire honneur, il veut appeller les courbes ou grandeurs ordinaires, algebraiques. Car je ne voy pas que l'honneur m'en revienne. Je voudrois plustost qu'il n'appellât pas les autres mecaniques. Il dit p. 271, que la maniere de resoudre la Catenaire par des points (qui ne demandent qu'une seule grandeur constante transcendante, laquelle donnée, on n'a plus besoin des quadratures) est veritablement la plus parfaite qu'on puisse employer pour les transcendentes, mais que le mal est qu'elle n'est pas universelle, et n'a lieu qu'à l'egard de celles qui dependent de la quadrature de l'hyperbole, et ne pouvant estre employée à son avis, pour ce qui depend de la quadrature du cercle ny pour des quadratures plus composées. Mais je ne suis pas en cela de son sentiment, car la meme maniere reussit aussi pour la quadrature du cercle, se servant de la section des angles, comme pour l'hyperbole on se sert de la section des raisons. Et il y a une infinité d'autres constructions semblables qui pourront servir pour d'autres lignes transcendentes. Il donne aussi p. 271 et 272, un indice qui doit servir pour connoistre si une quadrature se peut reduire à celle de l'hyperbole, mais cet indice n'est point universel, et on peut donner une infinité d'instances ou la reduction reussit, sans que cet indice ait lieu.

Il prend les series de pag. 274 pour nouvelles, mais Mr. Newton et moy, nous les avons employées il y a longtemps.

Enfin, je viens à la construction que Mr. Bernoulli donne de mon probleme, de la ligne isochrone paracentrique, comme je l'appelle, ou le mobile pesant s'approche ou s'eloigne egalement d'un même point. Cela m'oblige de reprendre mes vieilles meditations la dessus, que j'avois presque oubliées ou perdues. Il a trouvé cette solution par un heureux hazard. Je donneray cependant ma methode qui paroistra peut estre plus analytique et moins dependante d'un secours exterieur. Je l'avois reduite autres fois à la quadrature d'une figure, dont l'abscisse estant x, l'ordonnée est $\frac{a^3}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$. Mais Mr. Bernoulli ayant taché avec raison de construire la courbe demandée, non pas tant par une quadrature que par l'extension ou evolution d'une autre courbe, je l'ay aussi voulu faire à son exemple. La difference qu'il y a entre nous là dessus est, qu'il se sert de la rectification d'une courbe qui est elle même deja transcendente, sçavoir de son elastique, et qu'ainsi sa construction est trancendente du second degré; au lieu que je me sers seulement de la rectification d'une courbe ordinaire, dont je donne la construction par la geometrie ordinaire.

Au reste je me rapporte à mes precedentes, sur lesquelles je vous supplie de repasser, et de me donner les lumieres que je souhaitte à l'egard de plusieurs points qui ont esté touchés entre nous. En vous souhaittant une parfaite santé je suis avec zele etc.

LVI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 24 Aoust 1694.

J'avois receu les Acta de Leipsich, jusqu'au mois de Juin, il y avoit 8 jours, lorsqu'arriva l'Extrait que vous m'avez fait la faveur de m'envoier, dont je ne laisse pas de vous estre obligé. Il semble que mesme chez vous ces nouvelles ne se debitent que bien tard. Je trouve le travail triennal de Mr. Bernoulli bien considerable, pourvu que tout ce qu'il avance soit vray; aussi s'en glorifie-t-il beaucoup. Pour le principe du ressort, je crois qu'il l'a bien emploié, et qu'il est vray que les raions qui mesurent la courbure sont en raison contraire des forces qui font plier le ressort; quoyque, selon moy, ce ne soit pas seulement la surface exterieure qui s'etend mais que l'interieure en mesme temps s'accourcit; l'acier ou matiere pliante se condensant d'un costé, et comme rentrant en elle mesme, pendant que de l'autre elle se dilate. Si ce principe n'estoit pas le veritable et l'unique, mais que la ligne AFC fust une courbe dependante d'infinies experiences, je trouverois toute sa recherche fort vague, et peu digne qu'on s'y amusast. Et mesme à cette heure tout ce qu'il a trouvé ne me paroit d'aucune utilité, mais seulement des exercitations fort belles et subtiles, lorsqu'on ne trouve pas de quoy employer les mathematiques avec plus de fruit. C'est une etrange supposition de prendre les quadratures de toute courbe comme estant données, et quand la construction d'un probleme aboutist à celá, horsmis que ce ne soit la quadrature de l'hyperbole et du cercle, j'aurois cru n'avoir rien fait, parce que mesme mechaniquement on ne scauroit rien effectuer. Il vaut un peu mieux de supposer qu'on peut mesurer toute ligne courbe, comme je vois aussi que c'est vostre sentiment. Je trouve au reste que Mr. Bernoulli n'a determiné que la courbure de l'arc A, (fig. 33.) où les tangentes des extremités EF, sont paralleles, lesquelles je considere conjointes par la corde EF. Il resteroit à donner la figure du veritable arc B; item de C dont les extremités vont en s'approchant; de D où elles s'assemblent, et de G où elles passent au delà et sont retenues par un baston HI. Ce qu'il dit de la voile pressée par une liqueur, qui luy donneroit la mesme courbure que du ressort C, est encore bien subtilement trouvé, s'il est veritable. Mais jusqu'à ce que je voie les demonstrations, je me defie un peu des theoremes de Mr. Bernoulli, depuis que j'ay vu qu'il se trompe et se retracte quelques fois; comme en ce qu'il avoit assuré cy devant que la voile tendue par le vent se plioit en arc de cercle, et, en quelques cas, moitié en cercle et moitié en courbe de la chaine. Je doute encore s'il est bien vray que la voiliere soit la mesme que la Funicularia, comme les deux freres le croient maintenant, parce que je puis demontrer qu'une voile composée d'un nombre fini de pieces egales et droites, comme ABC (fig. 34.) sera courbée autrement par le vent et autrement par son poids. Il faudroit donc que dans le nombre infini cette difference vint à rien.

Il semble que vous teniez pour veritable sa construction de vostre paracentrique, apres en avoir comme je crois examiné sa demonstration, ce que je n'ay pas encore fait. C'est une rencontre assez etrange d'y avoir pu emploier sa courbe du ressort. Mais vostre construction sera assurement bien meilleure de beaucoup, si vous n'avez besoin que de mesurer une courbe geometrique, ou de laquelle du moins vous scachiez trouver les points. Lorsqu'il dit qu'il n'y a qu'une seule courbe comme $A\varkappa\omega\eta$ (fig. 35.) qui fasse eloigner egalement le mobile du point A apres la chute par TA, je vois clairement qu'il se trompe, et qu'il y a une infinité de telles courbes, comme sont $A\beta\zeta$, $A\delta\gamma$, jusques à la droite $A\eta$ inclusivement; quoyque je n'aie pas encore cherché comment il les faut decrire. Je vois aussi qu'il reste d'autres courbes à determiner en cette matiere, comme pour approcher egalement du point C (fig.36) en venant du point directement au dessus A, ou de D, qui est plus haut, et à costé; auxquels cas les courbes ABC, DEC feront des tours infinis autour du point C. Voila encore bien de l'exercice pour vostre calcul differentiel ou double differentiel, duquel je souhaite fort de voir une fois un exemple.

Vous ferez bien de reprendre Mr. Bernoulli sur l'indice des courbes constructibles par la quadrature de l'hyperbole. Ce seroit vouloir l'impossible de les vouloir reduire toutes à cela. Et pour moy j'estime qu'on a tout aussi bien reussi quand on aboutit à la mesure des arcs de cercle.

Je ne scay si vous aurez encore vu ma remarque sur la manoeuvre des vaisseaux de Mr. Renaud. Mais quand vous ne l'auriez point vue, vous ne laisserez pas de pouvoir juger de nostre different par ma replique, que je vous envoie. Ce ne sont pas de petites bevues ou omissions, qui se rencontrent dans cet ouvrage, imprimé de l'expres commandement du Roy (comme il y a au titre) et examiné par Mrs. de l'Academie des Sciences: mais une erreur capitale qui renverse le tout. Je seray bien aise d'avoir vostre approbation, et n'en scaurois douter, puisque j'ay celle de Mr. le M. de l'Hospital. J'adjoute dans ce mesme paquet, puisque vous le souhaitez, l'extrait du livre de Wallis, que l'on m'avoit envoié d'Angleterre, devant que j'eusse receu le livre mesme.

Vos considerations sur l'avancement de la medecine sont fort bonnes et ce que vous proposez ne paroit pas tout à fait impracticable.

En entreprenant le Traité de vostre nouveau calcul, je vous recommande de le rendre autant clair qu'il est possible et qu'il puisse se raporter principalement à ce qui pourroit avoir usage dans la geometrie, où je doute si ces equations exponentiellement transcendantes pourront avoir lieu. J'y contribueray volontiers l'exemple du probleme de Mr. Bernoulli le medecin, quoyque ce que j'en ay dans mes brouillons, que je viens de revoir, soit si abregé et denué d'eclaircissement, que j'auray de la peine à y rentrer.

Je crois vous avoir communiqué cy-devant la solution que pretendoit donner Mr. Fatio à ce que j'objectois contre sa theorie de la pesanteur, et que je n'en estois nullement satisfait. C'est pourquoy je m'etonne qu'il vous ait mandé le contraire. Je ne vois pas qu'on ait encore apporté de difficulté considerable contre la cause que j'ay expliquée dans mon discours, et l'on me fera plaisir de me les proposer, lorsqu'on en rencontrera. Pour ce qui est du mouvement absolu et relatif, j'ay admiré vostre memoire, de ce que vous vous estes souvenu, qu'autrefois j'estois du sentiment de Mr. Newton, en ce qui regarde le mouvement circulaire. Ce qui est vray, et il n'y a que 2 ou 3 ans que j'ay trouvé celuy qui est plus veritable, duquel il semble que vous n'estes pas éloigné non plus maintenant, si non en ce que vous voulez, que lorsque plusieurs corps ont entre eux du mouvement relatif, ils aient chacun un certain degré de mouvement ou de force veritable, en quoy je ne suis point de vostre avis.

Je vois qu'on a mis bien amplement, pour la seconde fois, dans les Acta la solution de Mr. le M. de l'Hospital du probleme de Bernoulli, qui estant assez embarassée, il me semble que la miene merite pour le moins autant d'y paroitre. C'est pourquoi je vous l'envoie icy, et vous prie de la faire tenir à ces Messieurs de Leipsich. Ils pourront corriger à cette occasion, s'ils ne l'ont pas desia fait, les 2 fautes que je vous marquay dans ma precedente. En leur envoiant vos considerations sur le discours de Mr. Bernoulli, vous me ferez plaisir de faire aussi mention des mienes, autant que vous les trouverez bien fondées. Je suis parfaitement etc.

Apres avoir copié ma construction du probleme, je me repens presque d'en avoir pris la peine. Je le laisse à vostre jugement, si vous croiez, qu'il vaut la peine quelle paroisse dans les Acta.

LVII.

Leibniz an Hugens.

Hanover, ce $\frac{4}{14}$ de Septembre 1694.

Je commence par vous remercier de la communication de l'extrait de l'ouvrage de Mr. Wallis touchant Mr. Newton. Je voy que son calcul s'accorde avec le mien, mais je pense que la consideration des differences et des sommes est plus propre à éclairer l'esprit; ayant encor lieu dans les series ordinaires des nombres et repondant en quelque façon aux puissances et aux racines. Il me semble que Mr. Wallis parle assez froidement de Mr. Newton et comme s'il estoit aisé de tirer ces methodes des leçons de Mr. Barrow. Quand les choses sont faites, il est aisé de dire: et nos hoc poteramus. Les choses composées ne sçauroient estre si bien demelées par l'esprit humain sans aide de caracteres. Je suis bien aise aussi de voir enfin le dechifrement des enigmes contenus dans la lettre de Mr. Newton à feu Mr. Oldenbourg. Mais je suis faché de n'y point trouver les nouvelles lumieres que je me promettois pour l'inverse des tangentes. Car ce n'est qu'une methode d'exprimer la valeur de l'ordonnée de la courbe demandée per seriem infinitam, dont je sçavois le fonds dès ce temps là, comme je témoignay alors à Mr. Oldenbourg. Et j'en ay donné le moyen depuis quelque temps dans les Actes de Leipzig, d'une maniere assez aisée et tres universelle.

Il est raisonnable de se servir de cette hypothese, que les courbures sont comme les forces qui les produisent, pour avoir quelque chose d'arresté. Mais si cela a assez lieu en effect, c'est ce que je ne voy pas encor bien clairement. Et on se peut figurer des constitutions des corps ou il n'en iroit pas ainsi. C'est ce qui m'a rebuté de cette recherche. Voyant que ma santé commence à chanceler, j'ay bien de la peine à me resoudre à des meditations qui ne servent qu'à exercer l'esprit. Je n'ay pas meme examiné la construction de ma paracentrique isochrone donnée par Mr. Bernoulli, m'estant contenté de donner mon analyse, qui est assez naturelle, avec ma construction qui n'a besoin que de la rectification d'une coube ordinaire.

Je suis de vostre sentiment, Monsieur, en ce que vous croyés que le probleme n'est pas encor bien resolu, lorsqu'on ne fait que le reduire à quelque quadrature. Ainsi la courbe dont la rectification est employée par Mr. Bernoulli à la construction de la paracentrique n'estant pas assés construite encor elle même, est peu propre à la fin qu'il se propose. Mais je ne l'en reprends point. Est aliquid prodire tenus. Cependant je suis d'accord avec Mr. Bernoulli, que c'est toujours beaucoup quand un probleme est reduit aux quadratures. C'est à mon avis un grand et necessaire acheminement à sa veritable solution. Il y a plusieurs degrés dans les solutions. La plus parfaite sans doute est celle qui reduit les transcendentes à l'aire du cercle ou de l'hyperbole. Au défaut de cela je voudrois pouvoir décrire la ligne transcendente per puncta, à l'imitation de la logarithmique, qui se décrit par le moyennes proportionelles. Et quand cela manque encor, je me contente d'obtenir mon but per rectificationes linearum. Mais il y a des cas si difficiles, ou tout ce que j'y puis jusqu'icy est de donner seriem infinitam. Je ne doute point qu'on ne trouve un jour la methode de reduire le tout aux plus simples quadratures possibles. Je croy même d'en voir les moyens, dont j'ay aussi des echantillons, mais je ne suis pas en estat d'y travailler.

Si Mr. Bernoulli a bien determiné l'arc du ressort, ou les tangentes des extremités sont paralleles, il me semble qu'il aura aussi les cas ou ces tangentes sont convergentes au dessus ou au dessous de la corde, car il n'aura qu'à continuer la courbe, ou en prendre la partie, puisque la partie du ressort bandé est encor un ressort bandé, en quelque endroit qu'on l'attache ou qu'on en prenne les extremités. Cela fait voir encor que l'arc peut n'estre pas ambidextre, lorsqu'en le bandant on pousse inégalement les extremités. Je suis aussi en doute sur ce qu'il dit de la voile, et la chose merite d'estre approfondie. Je crois que ma construction comprend toutes les isochrones paracentriques, tant celles de Mr. Bernoulli que celles que vous avés si profondement considerées, mais je ne suis pas en estat ny en humeur de venir au detail.

Pour ce qui est du calcul des differentio-differentielles, sur lequel vous desirés d'estre eclairci, je suis bien aise de pouvoir satisfaire à vos ordres en quelque chose. Ce n'est que trop souvent que je voy qu'on est obligé d'y venir: mêmes la recherche de la chainette y mene naturellement, mais c'est par une faveur speciale qu'on y peut s'en delivrer. Mes series infinies ont cela d'avantageux, qu'elles resolvent les differentio-differentielles, de quelque degré qu'elles soyent, aussi aisement que les differences premieres. Comme les equations differentielles du premier degré sont pour l'inverse des tangentes, lorsqu'on determine la courbe ex data proprietate tangentium, je trouve que celles des autres degrés peuvent venir lorsque la courbe est determinée per proprietatem curvedinum seu linearum osculantium; ou bien par le melange des sommes parmy les differences. Car pour se delivrer des sommes, on descend à des differences plus profondes, tout comme pour se delivrer des racines on monte à des puissances plus hautes. Voicy un exemple aisé pour les differences secondes pro linea sinuum, c'est à dire lorsque les arcs de cercle étendus en ligne droite estant les ordonnées, les sinus sont les abscisses. Soit l'arc y, le sinus de complement soit x, le rayon a, l'arc y sera égal à $a\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (1) et differentiando $dy = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (2) ou bien $\sqrt{(a^2-x^2)}\, dy = adx$ (3). Pour abreger faisons $\sqrt{(a^2-x^2)} = v$ (4), et il aura $vdy = adx$ (5), et rursus ipsam aeq. 5. differentiando $vddy + dvdy = a\,ddx$ (6). Et si nous faisons que les arcs y croissent uniformement, c'est-à-dire si dy est constante ou $ddy = o$ (7), au lieu de (6) il y aura $dvdy = addx$ (8). Differentiando aequ. (4) il y aura $dv = -\frac{xdx}{v}$ (9), car $v^2 = a^2 - x^2$, donc $vdv = -xdx$. Et (par 5 et 9) $dv = -\frac{xdy}{a}$ (10), donc par 8 et 10 il y aura $-xdydy = a^2 ddx$ (11). Ce qui fait voir que les arcs de cercle croissant uniformement, les sinus de complement décroissent de telle sorte qu'ils sont proportionels à leur propres differences secondes; au lieu que lorsque les logarithmes croissent uniformement, les nombres sont proportionels à leur propres differences premieres. Soit $x = a + by^2 + cy^4 + ey^6$ etc. (12), et (posito $ddy = 0$ ut dictum) ddx sera $= dy\,dy$ multiplié par $1.2.b + 3.4.cy^2 + 5.6ey^4$ etc. (13). Et l'equation (11) ou $xdydy + a^2ddx = 0$ (14) estant interpretée par 12 et 13 il y aura:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} +a & +\quad by^2 & +cy^4 & +\quad cy^6 \text{ etc.} \\ +1.2.ba^2 & +3.4.ca^2y^2 & +5.6.ea^2y^4 & +7.8.fa^2y^6 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Donc detruisant tous les termes, pour faire que cette equation soit identique, il y aura $a + 1.2.ba^2 = 0$, et $b + 3.4.ca^2 = 0$ et $c + 5.6.ea^2 = 0$. C'est-à-dire $b = -\frac{1}{1.2.a}$, et $c = -\frac{b}{3.4a^2}$ ou bien $c = \frac{1}{1.2.3.4a^3}$, et $e = \frac{1}{1.2.3.4.5.6a^5}$ et ainsi de suite, donc par (12) nous aurons $x = \frac{1}{1}a - \frac{1}{1.2.a}y^2 + \frac{1}{1.2.3.4.a^3}y^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.a^5}y^6 +$ etc. (16). Ce qui donne la valeur du sinus de complement x par l'arc y et par le rayon a. On trouveroit la même chose par l'equation 3 en ostant l'irrationnelle et faisant $a^2dydy = x^2dydy + a^2ddx$ (17), mais non pas si aisement. Il y a encor d'autres abregés que j'explique dans les Actes.

Mais pour vous donner un exemple d'un probleme geometrique, prenons celuy de la chainette; et je vous donneray en meme temps l'analyse dont je me suis servi autres fois pour le resoudre, puisque vous avés temoigné de la desirer aussi. Soit (fig. 37.) AB x, BC y, AT, retranchée par la tangente, est la distance entre l'axe et le centre de gravité de l'arc AC. Or $C\beta$ ou AB est à $T\beta$ comme dx à dy; donc $T\beta$ sera $x\frac{dy}{dx}$, et AT sera $y - x\frac{dy}{dx}$. L'arc AC soit appellé c, et par la nature du centre de gravité il est manifeste qu' AT sera $ydc : c = y - xdy : dx$ (1) ou bien $ydc = cy - cxdy : dx$ (2); et differentiando $ydc = cdy + ydc - \frac{xdy}{dx}dc - cdy - cx\,d\frac{dy}{dx}$ (3). Et rejettant ce qui se détruit, il y aura $dc\frac{dy}{dx} + cd\frac{dx}{da} = 0$ (4). Supposons que les y ou $A\beta$ croissent uniformement, ou que dy soit constante et $ddy = 0$ (5), nous aurons $d\frac{dy}{dx} = -dy\frac{ddx}{dxdx}$ (9), et au lieu de 4 il y aura $dcdx - cddx = 0$ (7), c'est-à-dire summando $\frac{dx}{c} = \frac{dy}{a}$ (8) (car cette equation 8 estant differentiée rend l'equation 7) ou bien $adx = cdy$ (9) et differentiando $addx = dcdy$ (10). Or generalement en toute courbe $dcdc = dydy + dxdx$ (11) et differentiando $dcddc = dyddy + dxddx$, donc icy (par 5) $dcddc = dxddx$ (12), et (par 10 et 12) $addc = dxdy$ (13) et summando $adc = xdy + bdy$ (14). Soit $x + b = z$ (15), fiet $dx = dz$ et $adc = zdy$, et (par 11 et 16) $dcdc = dzdz + dydy$ (17). Donc par 14, 15, 17, nous aurons $a^2dzdz + a^2dydy = z^2dydy$ (18), et enfin $y = a^2 \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, c'est-à-dire il ne faut que chercher la quadrature d'une figure, dont l'ordonnée est $\frac{a^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$. On peut faire $b = a$, ou $-a$, ou bien de quelque autre grandeur qu'on voudra, comme il depend aussi de nous d'augmenter ou diminuer y par une droite constante et d'écrire $y + c = a^2\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$ (20).

Pour ce qui est des equations exponentielles, je vous diray, Monsieur, que toutes les fois que le probleme se reduit à des exponentielles traitables, il est resolu en perfection, et il n'y a plus rien à chercher. De sorte que c'est proprement le plus haut point de la geometrie des transcendentes. Pour vous en developper tout le mystere, soit par exemple $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v}{a}} = \frac{y}{a}$ ou bien, posant a pour l'unité, soit $x^v = y$; c'est comme si je disois qu' v est à l'unité comme le logarithme de la grandeur y est au logarithme de la grandeur x. Ainsi supposé que la valeur d' v soit donnée par x ou par y, ou par toutes les deux, la ligne se peut construire geometriquement par points aussi bien que la logarithmique meme, et on en peut donner de meme la tangente et les autres proprietés. Et je puis toujours changer l'equation exponentielle en differentielle, mais non pas vice versa, car, puisque $x^v = y$ (1) donc $v.\log x = \log y$ (2), ou bien $v\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$ (3) et differentiando $v\frac{dx}{x} + dv\int\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ (4). Si v estoit egal à x, alors dy seroit à dx, ou bien, l'ordonnée seroit à la soustangentielle, comme y multipliée, par $1 + \log. x$ est à l'unité, c'est-à-dire la soustangentielle sera egale à l'unité multipliée par $1 + \log. x$. Si nous posons que les x croissent uniformement, il y aura $y^2 dx dx + axyddy = axdydy$, et cette equation differentio-differentielle se peut reduire à l'exponentielle $x^x = y$, qui en donne la construction. Ainsi bien loin qu'on doive croire que ces exponentielles sont embarassées, il faut juger que de toutes les expressions qui enseignent la construction des lignes transcendentes par des points determinables suivant la Geometrie ordinaire, ce sont les plus simples. Et il faut considerer que les exponentielles n'employent point d'autre grandeur qu' x et y, etc., c'est-à-dire que des grandeurs ordinaires, au lieu que les differentielles employent encor d'extra-ordinaires, comme dx, ddx, etc. ce qui les empeche de servir aux determinations des intersections des courbes ou aux equations locales. Car si j'avois $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$ (1) pour une courbe, scavoir pour la logarithmique, et $x^2 + y^2 = a^2$ (2) pour l'autre, scavoir pour le cercle, qui me donne $xdx + ydy = 0$ (3), ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (4), il ne m'est point permis de me servir des equations 3 ou 4 pour le cas de rencontre des courbes, ny d'oster $\frac{dy}{dx}$ par le moyen des equations 1 et 4, bien que je sçache que les courbes des equations 1 et 2, scavoir la logarithmique et le cercle se rencontrent; excepté le cas ou leur rencontre est un attouchement. Car sans cela, quoyque x et y soyent les mesmes dans les deux courbes, dx et dy ne le sont point (mais ddx, ddy ne sont les mesmes de part et d'autre, que dans le cas de l'osculation des deux courbes qui est un attouchement plus parfait). Au lieu que les exponentielles ne contenant qu' x et y, qui sont les memes en cas de rencontre, servent absolument à la determination des intersections. Ainsi c'est par elles, ou leur semblables, qu'on acheve la recherche et qu'on peut oster une inconnue. Je trouve ces equations encor utiles dans les nombres. Je tacheray de me faire entendre dans le traité que je projette pour mon nouveau calcul, et vous serés obligé de ce que vous y voudrés contribuer. Nous verrons ce que feront Mr. le M. de l'Hospital et Mrs. Bernoulli.

Vostre explication de la pesanteur paroist jusqu'icy la plus plausible. Il seroit seulement à desirer qu'on pût rendre raison pourquoy celle qui paroist dans les astres est en raison doublée reciproque des distances. Comme je vous disois un jour à Paris qu'on avoit de la peine à connoistre le veritable sujet du mouvement, vous me répondites que cela se pouvoit par le moyen du mouvement circulaire, cela m'arresta; et je m'en souvins en lisant à peu près la même chose dans le livre de Mr. Newton; mais ce fut lorsque je croyois déjà voir que le mouvement circulaire n'a point de privilege en cela. Et je voy que vous estes dans le meme sentiment. Je tiens donc, que toutes les hypotheses sont equivalentes et lorsque j'assigne certains mouvemens à certains corps, je n'en ay, ny puis avoir d'autre raison que la simplicité de l'hypothese, croyant qu'on peut tenir la plus simple (tout consideré) pour la veritable. Ainsi n'en ayant point d'autre marque, je crois que la difference entre nous n'est que dans la maniere de parler, que je tache d'accommoder à l'usage commun autant que je puis, salva veritate. Je ne suis pas meme fort eloigné de la vostre, et dans un petit papier que je communiquay à Mr. Viviani et qui me paroissoit propre à persuader Mrs. de Rome à permettre l'opinion de Copernic, je m'en accommodois. Cependant si vous estes dans ces sentimens sur la realité du mouvement, je m'imagine que vous devriés en avoir sur la nature du corps de differens de ceux qu'on a coustume d'avoir. J'en ay d'assez singuliers et qui me paroissent demonstrés. Je souhaiterois d'apprendre un jour vos reflexions que vous m'aviés fait esperer tant sur mes animadversions in Cartesium, que sur ce que je vous avois écrit contre le vuide et les atomes. Je veux lire avec attention la theorie du manoeuvre et vous remercie cependant des communications de vostre remarque qui paroist de consequence. Il y a déjà du temps que j'ay envoyé à Leipzig mes reflexions sur l'isochrone du Professeur Bernoulli, en y envoyant vostre construction du probleme du Medecin, j'y adjouteray quelque chose de vos considerations sur ce que le Professeur vient de donner.

Mr. Tayler s'est excusé de venir à Wolfenbutel. N'-a-t-on point des nouvelles de la restitution entiere de Mr. Newton? Je la souhaitte fort. Quelques uns ayant vû des definitions que j'ay données dans la preface de mon Code diplomatique (dont, pour le dire en passant, je vous feray remettre un exemplaire) m'ont exhorté de mettre en ordre un amas d'autres que j'ay fabriqués autres fois. Voicy celles de la preface que je soûmets à vostre jugement. Je dis que la justice est une charité conforme à la sagesse. La sagesse est la science de la felicité; la charité est une bienveillance generale. La bienveillance est habitus diligendi. Diligere, aimer, cherir (en nostre sens) est se faire un plaisir de la felicité d'autruy.

Vous ne pouvés manquer, Monsieur, d'avoir mille belles meditations encor hors des mathematiques. Il ne faudrait pas nous en priver. Je me souviens qu'un jour vous me fistes esperer quelque chose de cette nature. N'aurons nous pas bientost vostre Dioptrique? J'espere d'y trouver des explications des meteore semphatiques, suivant cet echantillon qu'on a vu de vous autres fois dans le journal des sçavans. Vostre crystal d'Islande ne vous a-t-il donné aucun phenomene singulier sur les couleurs? Il semble qu'il y devroit encor servir; vous aviés aussi fait ce me semble quelques decouvertes sur la force electrique. Que jugés vous, Monsieur, de l'hypothese de Monsieur Halley sur le noyau mobile contenu dans le globe de la terre, pour expliquer la variation de l'aimant? Et sur ce que Mr. Newton croit avoir rendu raison encor du flus et reflus de la mer. Nous attendons aussi l'explication de vostre ligne propre pour les pendules des vaisseaux. Je suis avec zele etc.

P. S. Si je suppose que la voile ne s'etend ou ne s'allonge point, et prends l'effect du vent pour ce qui se feroit si un filet ABC (fig. 38.) consideré comme sans pesanteur en luy même, estoit chargè partout d'un poids égal, tel que CD; le calcul qui me vient tout presentement me donne une ligne, dont la construction demande une quadrature, qu'il est en mon pouvoir de donner autant qu'il est possible, et qui se reduira (autant que je puis juger par avance) à celle de l'hyperbole. Mais je crois que ce sera autrement que lorsqu'on construit la chainette.

LVIII.

Leibniz an Hugens.

A Hanover 8 Septembre 1694.

Je me suis donné l'honneur de vous écrire il y a quelques jours, où j'ay marqué d'avoir satisfait à vos ordres, en envoyant à Leipzig ce que vous aviés destiné aux Acta. J'ay taché aussi de satisfaire aux autres points de vostre lettre.

Maintenant je profite de l'occasion favorable que Mr. de Tschirnhaus me fournit pour vous écrire celle-cy, et je ne me sçaurois dispenser de vous dire que j'ay vu avec admiration les effects de ses verres ardens, surtout sur des objets, qui ont paru indomtables aux fourneaux des chymistes. Mais comme vous en verrés des objets incomparablement plus grands par le moyen des verres, qu'il a déja envoyés en Hollande, je n'en diray point d'avantage.

Il m'a aussi monstré des theoremes de geometrie d'une grande beauté et generalité, et plusieurs autres belles pensées. Mais vous en estes meilleur juge que moy, et j'espere qu'en retournant, il me fera part du profit, qu'il aura fait chez vous. Car si j'estoit capable de luy porter envie, ce seroit de l'avantage qu'il aura de vous voir. Je suis avec zele etc.

LIX.

Leibniz an Hugens.

Hanover $\frac{14}{24}$ Octobre 1694.

Je vous avois écrit dernierement par Mr. de Tschirnhaus qui n'en avoit point besoin. Mais à present je prends la liberté de vous adresser un de mes amis, qui est encor d'un tres grand merite en son genre et qui espere que vostre recommandation luy servira beaucoup, pour mieux insinuer un dessein de negoce, où il s'est engagé avec quelques personnes considerables, et qu'il veut proposer au Roy et à Messieurs les Etats, pour en avoir l'agrement, l'octroy et la protection. Je ne suis pas des plus disposés à la credulité, et il y a peu de nouveaux avis, qui se trouvent practicables. Mais cette affaire paroist si plausible et si convenable au temps et aux intentions de Sa Majesté, que je croy qu'on ne risque rien en luy donnant de l'applaudissement. Il vous en dira tout le detail, qu'il nev eut pourtant pas encor publier avant que d'en avoir jetté les fondemens.

En cas que vous en formiés le même jugement que moy, je ne doute point, Monsieur, que vous ne le favorisiés de recommandations proportionnées, auprès du Roy, par Monsieur vostre frere, et auprès de Messieurs les Etats par Mr. le Pensionaire. Le personnage a acquis une tres grande experience en ces choses par son age avancé, et par la quantité d'affaires de cette nature, qui luy ont passé par les mains, ayant esté employé par plusieurs Princes, qui en ont fait grand cas, mais particulierement Jean Philippe Electeur de Mayence, qui estoit un des plus habiles Princes de son temps, et le defunt Electeur de Brandebourg l'honnoroient d'une confiance extraordinaire et se servoient de ses avis en telles matieres. Il a esté plus d'une fois tant en Hollande qu'en Angleterre, et il a même fait autres fois le voyage de l'Amerique. C'est d'ailleurs une personne extremement reglée et eloignée des vanités, qui rapporte tout à bon usage et affecte l'ancienne simplicité. Il y a de plus de 20 ans que je le connois, tousjours en reputation d'un homme tres sage et laborieux. Ainsi pour luy rendre justice et pour vous en mieux informer, il a fallu que je vous fisse son caractere. Au reste je me rapporte à mes precedentes, estant avec un tres grand zele etc.

P. S. Mr. de Tschirnhaus en repassant par icy m'a confirmé dans l'opinion que j'ay de vos bontés pour moy, et comme je l'avois chargé de vous sonder, si vous souffririés la presente recommandation, ce qu'il m'a dit la dessus, m'a encouragé à vous écrire celle-cy.

LX.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 27. Decembre 1694.

Il y a desia quelque temps que Mr. Craft m'a rendu la lettre dont vous l'aviez voulu charger pour moy; et comme il doit vous ecrire demain, il vient de me prier de pouvoir vous envoier en mesme temps quelque mot de ma part; car pour faire response à celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du $^4/_{14}$ Sept., je luy ay dit qu'elle contenoit trop de choses differentes pour que j'y puisse satisfaire presentement.

Ce Mr. Craft, que je connoissois de reputation depuis l'invention du phosphore, est veritablement, comme vous dites, un homme de merite et de bon sens, et qui a appris bien des choses par ses longues experiences en matiere de Physique. J'ay donc pris plaisir à l'entretenir plus d'une fois. Il m'a communiqué le dessein de la nouvelle manufacture, et m'en á apporté un echantillon, par le quel il semble que la chose pourrait avoir un bon succès. Toutefois j'ignore en quoy consiste le secret, et à ce que je vois, c'est en Angleterre qu'il pretend commencer à le mettre en pratique, devant que d'en parler icy à personne. Lorsque j'auray occasion de le servir, je le feray autant qu'il sera dans mon pouvoir.

J'ay esté fort aise de la visite peu attendue de Mr. de Tschirnhaus au mois de Sept. dernier. Mais le malheur voulut, qu'à cause du temps couvert, je ne pus voir l'effet du verre brulant qu'il m'apporta d'environ 14 pouces. C'est un avantage de ces verres de bruler de haut en bas, parce que la matiere qu'on y expose se peut placer sur un charbon qui augmente la force du feu. Mais sans cela je ne scaurois croire que ses verres, quand ils seroient de 2 pieds, comme il dit en avoir, puissent egaler la force du miroir concave de 3 pieds, que nous avions à l'Academie de Paris, qui faisoit degouter les clous de fer en peu de temps. Je me persuade au reste qu'on pourroit esperer de plus grands effets des miroirs concaves de verre, avec de la feuille derriere, comme une personne en fait icy à la Haye, qui sont d'une matiere claire et d'un poli tres beau. Mais il faudroit les faire de 3 ou 4 pieds, ce qui me semble tres possible, au lieu qu'ils ne sont jusqu'icy que d'un pied. Un petit miroir plat adjouté aupres du foier pourroit reflechir les rayons en bas pour bruler sur le charbon. Mr. de Tschirnhaus me dit à la haste quelque chose de ses inventions qu'il extolloit fort; nous les verrons peut-estre expliquées dans le Journal de Leipsich. Ce que vous y avez dernierement mis, Monsieur, touchant la Paracentrique, m'a paru bon, mais j'en suis demeuré aux sommes, ou je trouvois quelque difficulté; c'est-à-dire à mon egard, parceque toute vostre methode ne me demeure pas presente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer. Et c'est pour cela que j'ay souhaité que vous l'eclaircissiez par un traité expres, depuis les fondemens. Il y a mesme bien du temps que je n'ay rien fait en matiere de geometrie, à cause d'une certaine dissertation philosophique que j'espere de mettre au jour dans peu. C'est pourquoy je ne scaurois encore repondre à vostre lettre du $^4/_{14}$ Sept., parcequ'il y a du calcul differentiel, qui demande que je l'etudie. J'admire cependant comment par un si etrange chemin vous estes parvenu à la construction de la Catenaria. Vous aurez vu sans doute le dernier livre de Craige, où il y a à la fin une response à Mr. de Tschirnhaus qu'il s'est attirée par sa violente censure. Vostre calcul est beaucoup employé et loué dans ce traité. Mr. Craft m'a dit que vous aviez achevé vostre machine arithmetique, qui doit estre une piece merveilleuse, et dont l'execution sans doute vous aura couté bien de la peine, puisque celle qu'avoit fait Mr. Pascal seulement pour les additions, luy avoit grandement use et gasté l'esprit a ce que ses amis m'ont dit. On pouvoit la faire incomparablement plus simple et plus commode; ce que je ne crois pas estre de mesme de la vostre. Je vous prie de me mander combien de chifres et par combien elle peut multiplier, et si elle est dans la perfection que vous souhaitez, sans estre sujette à manquer ni à se detraquer.

L'on m'a apporté un Traité manuscrit d'un Mr. de Maroles, mort martir en France sur les galeres, ou il y a des Problemes numeriques fort subtils, resolus de la maniere de Diophante. Il avoit grand commerce avec le P. Billy, et on doit me porter de leurs lettres reciproques. On a dessein d'imprimer le tout. Je n'ay jamais voulu m'amuser a ces sortes de questions, et toutefois j'aime a voir l'adresse que souvent ils demandent. Devant que finir, et pour ne laisser pas cette page vuide, je vous diray que dans l'invention de la Paracentrique de Mr. Bernoulli, je trouve que c'est beaucoup d'avoir determinè certaines choses touchant cette courbe, et entre autres le point ou elle finit, comme en cette figure (fig.39.) vers A, ce qui ne me semble pas qu'on puisse inferer de vostre calcul. Aussi ne scay je pas si sa determination est bien vraie, et si la courbe n'a pas BA pour asymptote. J'en voudrois bien scavoir vostre sentiment, et finissant icy je demeure en vous souhaitant tout bonheur dans la prochaine année.

LXI.

Leibniz an Hugens.*)

21 Juin 1695.

Plusieurs distractions m'ont empeché de jouir de l'avantage que je tire de l'honneur de vostre commerce. J'ay appris de M. Bauval Banage que vous aviés esté malade, mais j'espere que vous vous porterés bien presentement, ce que je souhaitte de tout mon coeur, sçachant combien nous importe vostre conservation, et combien il est important que nous ayons de nostre temps une personne dont le jugement puisse estre suivi seurement sur les matieres les plus profondes; et dont nous attendons encor de si importantes productions, qui sont déja en vostre pouvoir et pourroient estre donnés par parties, si vous vouliés vous humaniser comme vous avés fait dans les appendices de vostre excellent livre de la lumiere et de la pesanteur.

Un exemplaire du grand miroir de Mr. Tschirnhaus est à Amsterdam, de sorte que vous en pourriés voir l'experience quand vous voudriés. Ce que vous dites, Monsieur, des miroirs concaves de verre, que quelcun fait à la Haye me paroist considerable. Il est difficile cependant pour l'ordinaire d'en faire avec de la feuille derriere. On fait des miroirs convexes de verre à Norenberg, qui ont une certaine composition derriere qui tient lieu de feuille. J'ay oui dire à plusieurs qu'ils ont taché en vain de l'apprendre. Et autres fois Mons. Curtius, resident du Roy Charles II à Francfort me dit d'avoir eu ordre de la Societé Royale de s'en informer.

La seconde edition de **Medicina Mentis** de Mons. de Tschirnhaus a paru à Leipzig. Il y corrige ce que Monsieur Facio et moy avions remarqué sur sa premiere façon de donner les tangentes par les foyers; qu'il semble attribuer à une maniere d'errata. Il donne encor d'autres theoremes plus generaux, mais je n'ay point le loisir qu'il faudroit pour mediter la dessus. Il en faut laisser le soin à Mons. le Marquis de l'Hospi-

*) Leibniz scheint diesen Brief nicht abgeschickt zu haben; wahrscheinlich erfuhr er inzwischen den Tod von Hugens.

tal, qui a trouvé la regle la plus generale qu'on puisse souhaitter la dessus autant que je m'en souviens.

Quant au denombrement des courbes de chaque degrè Algebraique, il le donne autrement que dans sa premiere edition, mais je m'etonne qu'il le fait encor d'une maniere, qui me paroist insoutenable; comme si l'on pouvoit tousjours oster tous les termes d'y excepté un seul. Ainsi dans le 3me degré selon luy, toutes les courbes se peuveut reduire à ces equations $y^3 = x$, $y^3 = xx$, $y^3 = x + xx$, $y^3 = x + x^3$, $y^3 = xx + x^3$, $y^3 = x + xx + x^3$, mettant à part la varieté des coefficientes et des signes. Je m'etonne en effect qu'ayant tant de penetration et de connoissances, il avance si aisement de telles propositions. Mons. le Marquis de l'Hospital me mande, que Mons. de la Hire dans un livre sur les Epicycloides dispute contre la demonstration de la Caustique que M. Tschirnhaus avoit donnée à l'Academie royale des Sciences; et repond au passage de sa Medicina Mentis, ou Mons. Tschirnhaus avoit cité vostre approbation, et m'avoit même fait l'honneur de me nommer avec vous. Mons. de la Hire dit que vostre exactitude estant connue vous ne vous seriés pas fié sans doute à de telles demonstrations. Je remarque que Mons. de Tschirnhaus a retranché ce passage, ou il s'estoit rapporté à vostre jugement. Il affecte aussi partout d'eviter l'usage de mon calcul des differences, bien eloigné en cela de vous, Monsieur, qui aviés toutes les raisons de monde de vous tenir entierement à vos propres Methodes qui vous avoient servi à tant d'importantes decouvertes avant que j'avois commencé d'y avoir quelque entrée; et qui n'avés pas laissé de vous abaisser tout grand Maistre de l'art que vous estes, à employer encor une nouvelle Methode d'un de vos disciples, car vous ne devés pas ignorer que je pretends à l'honneur de l'estre, et que j'en ay fait profession publique plus d'une fois. Au bien que je crois que Mr. de Tschirnhaus a profité un peu de mes meditations, et plus qu'il ne pense luy même. Il est vray que je m'imagine qu'il ne s'en est point apperceû, et c'est pour cela que je ne l'accuse point de peu de sincerité. Je ne laisse pas de trouver cette affectation un peu extraordinaire.

Vous aurés vû, Monsieur, les deux livres de Monsieur Bernard Nieuwentiit, Geometre Hollandois, qui me les envoyés par un autre Mathematicien du pays qu'il cite dans son livre nommé M. J. Makreel, qui a écrit sur le livre qu'il me l'envoye jussu autoris. Je m'imagine que ces Messieurs vous seront connus. Pour ce qui est des objections de Monsieur Nieuwentiit, j'y repondray dans les Actes de Leipzig. Premierement il me fait une objection sur un point qui m'est commun avec Messieurs Fermat, Barrow, Newton et tous les autres, qui ont raisonné sur les grandeurs infiniment petites. Car il dit que selon luy deux grandeurs sont egales, quand leur difference est rien, et non pas, quand elle est seulement infiniment petite. Mais pour employer cependant et justifier nos raisonnemens, il prend un plaisant tour. Il dit que ce qui ne sçauroit devenir une quantité ordinaire, quand on multiplieroit par un nombre infini, doit estre appellé rien, et n'est pas une quantité. Et que pour cela, quoyque dx soit quelque chose, neantmoins le quarré dxdx ou le rectangle dxdy n'est rien; parcequ'un tel rectangle multiplié par un nombre infini ne devient pas une grandeur. Il est aisé de luy repondre que la rectangle doit estre multiplié par un nombre infini du second degrée puisqu'il est infiniment petit du second degré; c'est à dire par un nombre infini multiplié par luy même. C'est cependant sur ce fondement, sçavoir que dxdx, ou dxdy n'est rien, qu'il appuye ses pretendues demonstrations du calcul de Mons. Fermat (qu'il attribue à Mr. Barrow) comme si pour cela les termes ou il y a dx ou dy restoient, et que les termes ou il y a ou dxdx ou dydy ou dxdy devoient estre rejettès, au lieu qu'on sçait qu'il faut tousjours rejetter les termes qui sont incomparablement moindres que ceux qui restent, et que ceux qui ont dx devoient encore estre rejettès, si les ordinaires n'evanouissoient. Cependant c'est une chose estrange, qu'il veut que le costé, dx, soit une grandeur, et son quarré dxdx ne soit rien. Il croit de même que les differences ulterieures, comme ddx ne sont rien du tout. Mais comme les x estant en progression geometrique, les x, dx, ddx, d^3x, d^4x etc. le sont aussi, comment peut on dire que les termes x et dx sont quelque chose, et que la 3me proportionelle ddx n'est rien. Je repondray dans les Actes de Leipzig d'une maniere que j'espere luy pouvoir satisfaire et comme ses objections sont proposées d'une maniere fort honneste, j'en useray de même. J'espere de trouver un jour le loisir d'expliquer distinctement mon calcul, pour prevenir certaines beveues semblables à celles que Mons. Nieuwentiit a faites en le voulant employer à dessein de monstrer qu'il est peu seur.

Monsieur Bournet gentilhomme Ecossois, parent de Mons. l'Eveque de Salisbury a vû icy ma Machine Arithmetique entierement achevée, et des exemples que j'ay faits en sa presence, qui l'ont surpris; les produits peuvent aller à 12 figures, et le multiplicandus est de 8 figures. J'en fais faire encor d'autres exemplaires maintenant pendant que j'ay l'ouvrier à la main.

Je souhaitte fort de voir vostre traitè philosophique, qu'on dit regarder des considerations particulieres sur la constitution des autres planetes ou mondes. Vous ne pouvés gueres entreprendre de sujet plus beau et plus digne de vous. Monsieur Mariotte me disoit que vous devriés estre un jour un des habitans de Saturne, puisqu'il vous a l'obligation de nous estre devenu mieux connu. Et s'il aime la gloire, il y doit estre sensible. Je ne desapprouverois pas ce changement de domicile pour veu que vous le fassiés bien tard. Serus in coelum redeas diuque Laetus intersis populo petenti. Il sera bon que les meditations numeriques de feu M. de Marolles paroissent. Mais je souhaitte sur tout que vous nous fassiés part des vostres de temps en temps sur toutes sortes de matieres. Je seray bien aise d'apprendre vostre jugement de mon Code diplomatique; il est vray qu'il n'y a rien de moy que la preface.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und dem

Marquis de l'Hospital.

Der Marquis de l'Hospital (geb. 1661, gest. 1704) war der erste unter den Mathematikern Frankreichs, der in die Grundzüge der höhern Analysis, so wie sie von Leibniz in den Actis Eruditorum 1684 veröffentlicht worden waren, eindrang und sie anzuwenden verstehen lernte. Zu eigenem Gebrauch entwarf er sich ein Compendium; er führte darin das, was Leibniz nur angedeutet hatte, weiter aus und entwickelte namentlich die Beweise für die Hauptlehrsätze vollständig. Seine Freunde, besonders Malebranche, forderten ihn auf dasselbe drucken zu lassen. Ehe es jedoch dahin kam, erhielt der Abbé Catelan, ein fanatischer Anhänger von Descartes, davon Kunde; er beschloss de l'Hospital zuvorzukommen und verfasste eine kleine Schrift: Logistique pour la Science generale des lignes courbes ou Manière universelle et infinie d'exprimer et de comparer les puissances des grandeurs, Paris 1692, in welcher er die Leibnizische Differentialrechnung, mit Vermeidung des Algorithmus und ohne Leibniz zu erwähnen, als ein von ihm selbst entdecktes Ergebniss aus der Tangentenmethode von Descartes darstellte. De l'Hospital unterwarf diese Schrift einer scharfen Kritik und rügte besonders die groben Fehler, aus denen hervorging, dass Catelan die Methode Leibnizens nicht verstanden hatte. Dies gab Veranlassung zu einer Fehde zwischen de l'Hospital und Catelon, über deren Verfolg de l'Hospital in dem Schreiben an Leibniz vom letzten November 1694 (X) umständlich berichtet.

Um dieselbe Zeit kam Johann Bernoulli nach Paris, der eine jenes Brüderpaars, das sich nach Leibnizens eigenem Geständ niss um die Ausbildung der höhern Analysis bei weitem die grössten Verdienste erworben hat. De l'Hospital voll Begier, seine Kenntnisse auf dem Gebiete der höhern Analysis zu vervollständigen, benutzte diese günstige Gelegenheit; er machte die Bekanntschaft von Joh. Bernoulli und dieser entwarf zur Instruction seines lernbegierigen Schülers Vorlesungen über die Differential- und Integralrechnung, die im 3. Bande der sämmtlichen Werke Joh. Bernoulli's abgedruckt sind. Um sich ungestörter ihren gemeinschaftlichen Studien hingeben zu können, gingen sie auf de l'Hospital's Landgut Ouques in Touraine, wo Joh. Bernoulli 4 Monate verweilte. Durch den angestrengtesten Fleiss gelang es de l'Hospital, die Tiefen der höhern Analysis vollständig zu durchdringen; er betheiligte sich fortan an den Lösungen der grossen Probleme, die um den Anfang des 18. Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zogen, und stellte sich den Meistern, Leibniz, Newton, Hugens, den Bernoullis, würdig zur Seite.

De l'Hospital stand bereits seit 1690 mit Hugens in Briefwechsel;*) er hatte sich, zugleich mit Jacob Bernoulli, an dem Streite, den der schon genannte Catelan gegen Hugens über das Problem vom Schwingungs-Mittelpunkt (centre d'oscillation) erhoben hatte, betheiligt und sich zu Gunsten von Hugens entschieden. Dagegen kannte Leibniz bis Ende des Jahres 1691 den enthousiastischen Verehrer der höhern Analysis und den warmen Vertheidiger seines Ruhms in Frankreich nicht einmal dem Namen nach; den 29. December 1691 fragt er Hugens: Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle Bernoulli? Endlich gab gegen Ausgang des Jahres 1692 ein zufälliger Umstand Veranlassung zur Anknüpfung einer Correspondenz zwischen beiden Männern.**) De l'Hospital gehörte nämlich zu dem gelehrten Kreise, den Malebranche allwöchentlich um sich versammelte, und war gerade gegenwärtig, als letzterer einen Brief an Leibniz absenden wollte. Er benutzte diese Gelegenheit und bat Malebranche eine

*) Er ist in: Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes math. ed. Uylenbroek, Hagae Comit. 1843, Tom. I. abgedruckt.

**) Siehe Cousin Fragments de philosophie Cartésienne, Paris 1845 p. 400. In diesem Werke findet sich auch unter andern die Correspondenz zwischen Leibniz und Malebranche.

Einlage machen zu dürfen; es ist dies der folgende erste Brief an Leibniz.

Um die Zeit, als der Briefwechsel zwischen Leibniz und de l'Hospital begann, war wenigstens für die Mathematiker ersten Ranges jeder Zweifel über die Richtigkeit der höhern Analysis, so wie sie von Leibniz geschaffen worden war, verschwunden. Dies hatten besonders die verschiedenen Auflösungen des Problems der Kettenlinie, das von Jacob Bernoulli im Jahre 1690 wieder zur Sprache gebracht worden war, bewirkt. Auch de l'Hospital ist der Ansicht; ja er hält die Differentialrechnung für vollendet. Cela (le calcul differentiel) me paroist achevé, schreibt er in seinem ersten Briefe an Leibniz, mais il me semble qu'il reste bien des choses à decouvrir pour l'inverse de ce calcul. Es ist die Integralrechnung, auf deren Ausbildung er seine Aufmerksamkeit gerichtet hat. Dazu war die Untersuchung der Eigenschaften der krummen Linien, um die man vor der Entdeckung der höhern Analysis sich vergeblich bemüht hatte, äusserst förderlich; ganz besonders jedoch veranlasste die zum Theil schon früher übliche Sitte, sich gegenseitig Probleme zur Lösung vorzulegen, die von Leibniz in seinem Streite mit den Cartesianern wieder in Erinnerung gebracht worden war und die in dem bekannten Bruderzwiste der Bernoullis recht eigentlich in Schwung kam, dass die Mathematiker ersten Ranges ihre Thätigkeit auf denselben Punkt richteten und so gewissermassen durch vereinigtes Wirken die Vervollkommnung der höhern Analysis mächtig förderten. Die folgende Correspondenz beweist, dass de l'Hospital in der Regel mit der Auflösung des vorgelegten Problems auf dem Kampfplatz erschien. Hier hatte nun zwar der Scharfsinn der Meister der Wissenschaft die schönste Gelegenheit, in seiner Ueberlegenheit auf das glänzendste sich zu zeigen, denn die Schwierigkeiten, die jedes einzelne Problem darbot, mussten immer auf besondere Weise überwunden werden; indess wäre für die Wissenschaft selbst nur ein geringer Gewinn daraus erwachsen, wenn nicht zugleich diese Probleme Veranlassung gegeben hätten, nach allgemeinen Methoden, die auf ganze Reihen von Aufgaben anwendbar waren, zu suchen. De l'Hospital fühlt namentlich das Bedürfniss, solche allgemeine Methoden zu besitzen. Je suis persuadé, Monsieur, schreibt er in seinem ersten Briefe an Leibniz, que vous avez des regles pour la solution de ces sortes de problemes et j'en ai formé mesme quelques unes, mais elles ne sont pas generales. Vous me feriez plaisir de me proposer quelques courbes a trouver par la proprieté de leur soutangentes qui soient soumises a vos regles. Leibniz kam diesem Wunsche auf das bereitwilligste entgegen. Leider war um diese Zeit gerade seine Thätigkeit fast ausschliesslich durch die Geschichte des Hauses Braunschweig in Anspruch genommen, so dass er sich nur ausnahmsweise mit mathematischen Untersuchungen befassen konnte; dazu kam, dass seine Gesundheit zu wanken begann, und scharfes beharrliches Nachdenken über ein und denselben Gegenstand ihm unmöglich war. Unter diesen Umständen konnte er wenig Neues schaffen, und er sandte deshalb an de l'Hospital das, was er an allgemeinen Integrationsmethoden vorbereitet hatte: die Integration durch Reihen, und später die Integration der Differentialgleichungen. Er beklagt es schmerzlich, dass so manche Methode, die nur der Ausführung bedürfe, unbenutzt in seinen Papieren vergraben liege, und er richtet wiederholt an de l'Hospital die Bitte, ihm aus Frankreich einen jungen Mann zuzuweisen, der ihm dabei Hülfe leisten könnte. Dieser Wunsch blieb jedoch unerfüllt, und so gab Leibniz auch den lang gehegten Plan auf, unter dem Titel: Scientia infiniti, ein vollständiges Lehrgebäude der höhern Analysis auszuarbeiten. Mehrere Bruchstücke davon: eine historische und philosophische Einleitung, nebst einer umfangreichen Abhandlung: De summis seu Methodo differentiarum inversa, sind unter seinen nachgelassenen Papieren vorhanden. Dies Werk wäre zu damaliger Zeit für die Ausbildung und für das Verständniss der höhern Analysis von der höchsten Wichtigkeit gewesen; de l'Hospital's Schrift: Analyse des infiniment petits, Paris 1696 — jenes oben erwähnte, zum eigenen Gebrauch entworfene Compendium — die trotz ihrer Unvollständigkeit (sie enthält nur die Differentialrechnung, die Integralrechnung fehlt ganz) lange Zeit das allgemeine Lehrbuch der höhern Analysis blieb, sollte gewissermassen nur ein Vorläufer davon sein. — Noch ist hervorzuheben, dass man schon in diesen ersten Zeiten der Ausbildung der höhern Analysis die Wichtigkeit der bestimmten Integrale erkannte; am 23. Apr. 1693 schreibt de l'Hopital an Leibniz: Si l'on pouvoit trouver une methode pour parvenir aux quadratures particulieres lorsqu'elles sont possibles ou pour en demontrer l'impossibilité lorsqu'elles ne le sont pas, je la prefererois a toutes ces autres inventions; und Leibniz antwortet darauf: L'invention des quadratures particulieres, lorsqu'elles sont possibles, ou la demonstration de l'impossibilité est ce qu'il y a de plus sublime dans cette partie de la Geometrie. Cependant si j'avois les quadratures generales par les expressions que je souhaitte, on avanceroit encor de beaucoup les quadratures particulieres. —

Die Correspondenz zwischen Leibniz und de l'Hospital bewegt sich ausserdem über das Princip der Dynamik, wie es von Leibniz in dem Streite gegen die Cartesianer aufgestellt worden war. Diese behaupteten nämlich, dass die Kräfte sich bewegender Körper im zusammengesetzten Verhältniss der Masse und Geschwindigkeit ständen, Leibniz dagegen, dass sie durch das Produckt aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gemessen werden müssten. Er hatte zuletzt die Genugthuung, dass alle seine bedeutenden Zeitgenossen, Johann Bernoulli an der Spitze, sich für sein Princip erklärten. Unter seinen hinterlassenen Manuscripten ist die bis auf den Schluss vollendete Dynamik aufgefunden worden; er hatte sie während seiner Reise in Italien ausgearbeitet und einem Freunde in Florenz vor seinem Weggange zum Druck übergeben. Indess das Werk erschien nicht, weil Leibniz den Schluss zu übersenden versprochen hatte; überhäufte andere Geschäfte hinderten ihn jedoch nach seiner Rückkehr, sich damit zu befassen.

I.

De l'Hospital an Leibniz.

Il y a longtemps, Monsieur, que je souhaitois de trouver l'occasion de vous écrire, et de vous marquer l'estime toute particuliere que je fais de vostre merite. J'ay lû avec admiration ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic, et cet avec justice que vous pretendez étendre l'analyse au dela des bornes que Viete et Descartes avoient prescrites. En effect l'usage de vostre calcul differentiel est merveilleux pour determiner tout d'un coup les tangentes, les plus grandes et les moindres quantités, les points d'inflexion, les evolvés de Mr. Hugens, les caustiques de Mr. de Tschirnhaus etc. et cela me paroist achevé: mais il me semble qu'il reste bien des choses a découvrir pour l'inverse de ce calcul, je crois y avoir fait quelques progrés et je vous envoye la rectification de la Logarithmique en se servant de la courbe mesme et sans supposer d'ailleurs la quadrature d'aucun espace.

Probleme.

La logarithmique indefinie ABCD (fig. 40) qui a pour soutangente la droite donnée a, et son asymptote SL etant données de position, trouver geometriquement une ligne droite egale a une portion quelconque CD de cette courbe.

Solution.

Soit menée par un point quelconque L de l'asymptote SL la perpendiculaire LG, soit décrite la courbe algebraique LKH telle que (LF et LG $= x$, FK et GH $= y$) $aax - xyy = 2aay$, de sorte qu'on peut determiner par le cercle et la ligne droite la grandeur des ordonnées FK, GH en supposant que les coupées LF, LG soient données et ayant mené CFK, DGH paralleles a l'asymptote, soient prises sur LG les parties LM, LN egales a FK, GH et sur l'asymptote la partie LE egale a la soutangente, et soient tirées les droites EG, EF et les paralleles MA, NB, je dis que la portion CD de la logarithmique $= EG - EF + MA - NB$.

On peut remarquer que la courbe LKH a pour asymptote la droite EO parallele a LG. Je vous envoirai si vous le souhaitez la demonstration, mais comme elle est fondée sur vos principes, je ne doute pas que vous ne la trouviez aisement. Je ne sçaurois encore trouver le moyen décrire la courbe qui a cette equation differentielle $aaxdx + 2y^3dy = 2aaxdy - aaydx$ mesme en supposant la quadrature des espaces etc. Cependant je m'y suis fort appliqué parceque cette courbe a des proprietés considerables, je suis persuadé, Monsieur, que vous avez des regles pour la solution de ces sortes de Problemes et j'en ai formé mesme quelques unes, mais elles ne sont pas generales. Vous me feriez plaisir de me proposer quelques courbes a trouver par la proprieté de leur soutangentes qui soient soumises a vos regles. J'ai lû avec application ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic du mois d'avril de cette année et je crois y entrevoir la methode que vous proposés, mais il me faudroit quelques exemples pour m'eclaircir, en voici un que j'ai imaginé.

Soit la demie Ellipse ABD (fig. 41) qui a pour demiaxe les lignes CA, CB et soit entendue une infinité de Paraboles DEF, Def qui passent toutes par le mesme point D et dont tous les sommets des axes se rencontrent dans la demie Ellipse. Il faut décrire la ligne qui les touche toutes et determiner le point F ou deux quelconques de ces Paraboles, qui ne sont eloignées entr'elles que d'une distance infiniment petite, se rencontrent. Je trouve dans le cas ou CB $=$ AD que la ligne qui touche toutes les Paraboles est aussi une Parabole qui a pour sommet le point A et pour foyer le point D et que la ligne DF qui rencontre la Parabole DEF au point touchant F passe par son foyer. Je vous serai fort obligé si vous me faitez part de la maniere d'appliquer vostre calcul pour resoudre ces sortes de Problemes. Vous voiez, Monsieur, que j'en use bien librement de vous prier de m'instruire des la premiere fois que j'ai l'honneur de vous escrire. J'espere que vous me le pardonnerez et que vous me ferez la justice de me croire vostre tres humble et obeissant serviteur etc.

Mon adresse est rue St. Antoine cul de Sac de Guimené.

A Paris ce 14. Decbr. 1692.

II.

Leibniz an de l'Hospital.

C'est un heureux augure pour moy à l'entrée de cette année que d'avoir gagné une connoissance aussi importante que la vostre, Monsieur, pour la quelle vous avés eu la bonté de faire des avances; et le R. P. de Malebranche ne pouvoit m'obliger plus sensiblement qu'en y donnant occasion. J'estois deja plein d'admiration pour ce qu'on me disoit de vous. Je voyois que Mr. Bernoulli et Mr. Prestet s'adressoient à vous sur des matieres assez profondes; mais ce que M. Hugens m'a mandé de vos decouvertes, et ce qu'on m'a écrit de Florence de la solution que vous avés donnée du probleme de M. Viviani, m'a convaincu que vous avés des lumieres dont peu de gens sont capables. Ce même probleme m'a esté envoyé par ordre du Grand Prince de Toscane, et j'en ay aussi donné une solution, mais à la haste, le propre jour de la reception, a fin de depecher la reponse par la premiere poste; cette solution est imprimée dans les Actes de Leipzig. La festination a fait que dans l'addition qui se trouve à la fin de la solution s'est glissée une erreur que M. Bernoulli a remarquée, et que j'ay donné ordre de faire corriger, et de marquer que c'est sur l'avertissement de M. Bernoulli. J'ay remarqué que dans une de vos solutions il y a des fenestres isolées, ce qui m'ayant plû, j'en ay formé aussi, que j'ay envoyées à Mons. le Baron de Bodenhausen qui est à Florence, et qui se plait quelques fois à ma maniere de calculer. Je les vous envoyerois, si vous n'aviés deja toutes ces choses virtuellement, ou plustost eminemment; et si j'estois en estat d'y penser. Je suis tellement distrait, et partagé par d'autres choses qui me remplissent l'esprit, que lorsque je me remets sur l'Analyse, il me semble que je la dois apprendre tout de nouveau, et mes propres pensées me sont estrangeres. Les droits des Princes et les recherches sur l'Histoire de la maison de Brunsvic et des matieres semblables sont des occupations journalieres. Quantité de lettres aux quelles je dois repondre; même la Theologie et la Philosophie sur les quelles j'ay des disputes avec des personnes de consideration, me derobent bien du temps. C'est ce qui fait que mon analyse est demeurée en arriere, quoyque je croye de voir des voyes pour l'avancer encor considerablement. Car vous sçavés, Monsieur, qu'on n'a pas encor les racines des equations du cinquieme degré ny des voyes pour d'autres plus hauts, qu'on n'est pas encor le maistre des problemes semblables à ceux de Diophante; et quant à l'analyse des Transcendentes, ce n'est que depuis peu, comme vous sçavés, Monsieur, qu'on commence de s'en servir par un calcul reglé. La perfection de l'Analyse des Transcendentes en de la Geometrie ou il entre la consideration de quelque infini seroit sans doute la plus importante à cause de l'application qu'on en peut faire aux operations de la nature, qui fait entrer l'infini en tout ce qu'elle fait. Et je suis ravi de voir que vous en avés compris les consequences. Car si quelqu'un est capable d'y aller bien loin, ce sera vous, Monsieur, avec tant de penetration, et avec le goust que vous y prenés. J'ay quantité d'adresses dont je me sers lorsqu'il s'agit de resoudre quelque probleme differentiel, et de se delivrer des infiniment petites, soit en supposant des quadratures, ou autrement; mais elles ne sont pas toujours bonnes. J'ay projetté quelques Methodes generales, mais il faudroit se resoudre à faire une fois pour toutes certains calculs assez prolixes. Et je ne suis pas en estat de les executer. Nous n'avons pas des gens dans ce pays cy qui ayent la moindre connoissance de ces choses. (Et je n'en parle pas seulement.) Et c'est en cela qu'on est heureux dans les grandes villes qu'on y trouve plusieurs personnes de toutes sortes d'estudes, qui se peuvent entraider. Une de mes methodes particulieres est, que toutes les fois, que dans l'equation tangentielle (ou differentielle du premier degré, c'est à dire ou il n'y a que des differences et point de differences de differences) on ne trouve point de droite constante employée pour remplir la loix des homogenes, je puis reduire l'equation tangentielle aux quadratures; par exemple si les accroissemens ou elemens dx à dy estoient comme yy à $yy + bxy + cxx$, le probleme se peut resoudre aux quadratures. Car b et c n'y font point la fonction de droites ou d'homogenes avec x et y, mais de nombres ou raisons seulement. Et souvent les equations differentielles, qui n'ont pas cette condition s'y peuvent reduire par des transformations. Je considere cette methode comme le premier degré de ce que je souhaitterois. Et si je pouvois proceder de même dans les autres equations differentielles, je n'aurois plus besoin de ces autres voyes plus prolixes, que j'avois projettées.

Cependant comme je ne sçay pas quand j'en viendray à bout, j'ay pensé à une invention subsidiaire pour l'usage qui est aussi generale qu'on en puisse souhaiter, pour donner des equations pour toutes lignes differentiellement exprimées, soit que les differences soyent du premier ou de quelque autre degré, car je ne considere les problemes de la converse des tangentes que comme le premier degré seulement de cette analyse des sommes et des differences. Ce moyen subsidiaire consiste dans une series infinie qu'on peut continuer aisément aussi loin qu'il est necessaire pour la practique, et dont on peut connoistre la progression à l'infini pour l'exactitude de la theorie. Ainsi on peut dire que cela est achevé dans son genre. J'appliqueray cette methode à vostre Probleme, c'est à dire la description de la Ligne dont l'Equation differentielle est $aax\,dx + 2y^3dy = 2aax\,dy - aay\,dx$ (1) ou bien (supposant $a = 1$) $2y^3 - 2x + ydx : dy + xdx : dy = 0$ (2) ($dx : dy$ me signifie dx divisé par dy ou la raison de dx à dy). Supposons
$x = y + ey^3 + fy^5 + gy^7 + hy^9 + iy^{11} + ky^{13} + ly^{15} + my^{17}$ etc. (3)
pour abreger; car j'ay trouvé qu'on peut icy emettre utilement les termes pairs. Cela posé $dx : dy$ sera $= 1 + 3ey^2 + 5fy^4 + 7gy^6 +$ etc. (4) et par le moyen des equations (3) et (4), expliquant l'equation (2) nous aurons l'equation

$$0=\left\{\begin{array}{llllllllll}
+\ 2y^3 & = & & +2y^3 \\
-\ 2x & = -2y & -2ey^3 & -2fy^5 & -2gy^7 & -2hy^9 & -2iy^{11} & -2ky^{13} & -2ly^{15} & \text{etc.} \\
+ydx:dy & = +1y & +3ey^3 & +5fy^5 & +7gy^7 & +9hy^9 & +11iy^{11} & +13ky^{13} & +15ly^{15} & \text{etc.} \\
+xdx:dy & = +1.. & +4e.. & +6f.. & +8g.. & +10h.. & +12i.. & +14k.. & +16l.. & \text{etc.} \\
 & & & +3ee.. & +8ef.. & +10eg.. & +12eh.. & +14ei.. & +16ek.. & \text{etc.} \\
 & & & & & +5ff.. & +12fg.. & +14fh.. & +16fi.. & \text{etc.} \\
 & & & & & & & +7gg.. & +16gh.. & \text{etc.}
\end{array}\right\}=0\ (5)$$

Mais l'equation (5) doit estre identique, c'est à dire tout doit evanouir. Donc il faut expliquer les arbitraires e, f, g, etc. en sorte que les coefficiens de chacque terme deviennent egaux à rien, par exemple y evanouit, car $-2+1+1=0$, et y^3

evanouit en faisant $+2-2e+3e+4e=0$ et nous aurons $e=-2:5$. Et continuant de même et se servant des lettres deja trouvées pour trouver les suivantes, on aura $f=\frac{-6}{2.6-3}\frac{1}{2}ee$ et $g=\frac{-8}{2.8-3}ef$ et $h=-\frac{10}{2.10-3}\left\{\begin{matrix}eg\\ \frac{1}{2}ff\end{matrix}\right.$, et $i=-\frac{12}{2.12-3}\left\{\begin{matrix}eh\\ fg\end{matrix}\right.$ et $k=-\frac{14}{2.14-3}\left\{\begin{matrix}ei\\ fh\\ \frac{1}{2}gg\end{matrix}\right.$ et $l=-\frac{16}{2.16-3}\left\{\begin{matrix}ek\\ fi\\ gh\end{matrix}\right.$ et $m=-\frac{18}{2.18-3}\left\{\begin{matrix}el\\ fk\\ gi\\ \frac{1}{2}hh\end{matrix}\right.$ Et ainsi de suite à l'infini. Il n'est pas necessaire de calculer effectivement ces nombres, mais on le pourra faire aisement autant qu'il sera besoin. Et en ne marquant que les premiers il y aura $x=y-\frac{2}{5}y^3-\frac{4}{75}y^5-\frac{64}{4875}y^7$ etc. Si j'avois gardé les termes pairs, faisant $x=b+cy+ey^2+fy^3$ etc. j'aurois eu une autre equation pour les autres courbes, qui n'auroient pas moins satisfait au probleme, car en effect il y en a une infinité. Il semble que vous avés remarqué, Monsieur, que cette courbe a des usages considerables et peut estre qu'il y en a quelque application à la mecanique ou physique; ces applications servent quelques fois à mieux decouvrir la nature de la chose. Cependant faute de temps je n'ay pas osé tenter toutes les façons, dont je me suis servi quelques fois pour venir à bout de telles lignes; aussi n'ay je pas esté en loisir de me forger canons particuliers, servans en plusieurs rencontres tels que je voy qu'on pourroit faire. Il paroist, Monsieur, que vous en avés et même que vous estes allé bien avant, et plus avant comme je croy que moy même. Dont je souhaitte de profiter si vous le jugés à propos. C'est a peu prés en cette matiere comme dans les problemes de l'Arithmetique de Diophante, ou l'on est aussi reduit à des adresses particulieres faute d'une bonne methode generale. Ce n'est pas que je ne voye qu'encor cette espece d'Arithmetique est susceptible de Methodes generales. Mais il y faut aussi bien des preparatifs, avant que de l'établir.

Ce sera pour la premiere suivante que je vous envoyeray, Monsieur, ma façon tres commode d'appliquer le calcul differentiel à l'invention de la ligne qui touche un rang de lignes données ou qui est formée par le concours de ce rang. Car maintenant il m'y faudroit un peu penser, ou chercher dans mes brouillons. Vostre rectification de la courbe des logarithmes est extrement belle et servira d'exemple. J'oserois m'asseurer d'en trouver la demonstration au besoin, ainsi je ne veux pas vous en donner la peine. Je puis prevoir si les theoremes qu'on m'envoye en ce genre sont d'une telle nature que j'en puisse promettre la demonstration. Cependant je ne dis point que je sois capable d'inventer tout ce que je sois capable de demonstrer quand on me le communique tout inventé. Il y a bien de la difference entre ces deux choses, qui n'est pas assez considerée par ceux qui font grand bruit, quand on a trouvé la demonstration de l'invention d'autruy. Faites moy la grace, Monsieur, de me faire quelque part de vos pensées et reflexions dans l'Analyse dont j'attends des lumieres considerables. Et croyés que je suis avec attachement etc.

P. S. Je repondray bientost au R. P. de Malebranche. Je crois que nous convenons qu'il se conserve tousjours la même force, mais il estime la force par la quantité du mouvement. Pour moy je tiens que deux forces sont égales lorsque par leur consomtion le même effect se peut produire, par exemple un même poids elevé à une même hauteur ou le même ressort bandé au même degré etc. Or il est manifeste, comme j'ai fait voir que la conservation de la force estant supposée dans ce sens, la même quantité de mouvement ne sçauroit tousjours subsister.

III.

De l'Hospital an Leibniz.

A Paris ce 24 Fevrier 1693.

On ne peut pas estre plus sensible que je le suis, Monsieur, a toutes les honnestetez dont vôtre lettre est remplie, je me fais un vrai plaisir d'avoir quelque commerce avec une personne de vôtre erudition. Il y a longtemps que je sçais que vous étes universel, la theologie, l'histoire, les droits des princes, la recherche des mines etc. sont votre occupation ordinaire et a peine avez vous quelques momens pour les employer aux mathematiques et a la phisique; cependant les grandes découvertes que vous y avez faites et que vous y faites encore tous les jours font assez connoistre de quoi vous étes capable en ce genre, et on ne sauroit trop se plaindre de ce que vous avez si peu de loisir a y penser. Le probleme de Mr. Viviany n'est pas des plus difficiles et vous louez beaucoup dans les autres ce qui vous a coûté a peine quelques momens. J'accepte volontiers l'offre que vous me faites de m'envoyer les fenestres isolées de vôtre invention. Mais ce que j'ai bien plus envie se savoir si vous le jugez a propos, est vôtre methode de reduire aux quadratures toutes les equations differentielles dans les quelles il n'y a point de droites constantes pour remplir la loix des homogenes, je serois ravi par exemple d'apprendre de vous l'art de reduire aux quadratures l'equation differentielle $yydx + 2yxdx - xxdx = 2yydy$ et je vousa voue que je n'ai point de regle generale pour ce cas, j'en ai une qui reussit fort souvent, c'est par elle que j'ai resolu les questions que Mr. Hugens m'a proposées, je puis resoudre par son moyen $a^3dy + axxdy = axydx + aaxdx + x^3dx$, $adx = dy\sqrt{aa + yy}$, $axxdy = byydx + cxxdx$ etc. a, b, c sont des nombres, et par consequent cette derniere courbe doit estre soumise a la regle generale que vous avez. Je vous ferai part de la mienne si vous le souhaitez. La maniere dont vous resolvez par une suitte infinie l'equation differentielle $aaxdx + 2y^3dy = 2aaxdy - aaydx$ me plaist d'autant plus qu'elle est generale et qu'elle s'etend a tous les degrez, aussi cela me paroist achèvé en ce genre. Je serois bien aise de voir quel chemin vous avez tenu pour exprimer par une suitté le sinus droit d'un arc donné ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic de l'année derniere page 178. Pour les autres suites j'en ai aisement trouvé la raison. Au reste cette equation exprime dans un cas particulier la courbe de descente que vous avez proposée autrefois aux Cartesiens. Voici comment. On demande la courbe (fig. 42.) AD telle qu'un corps pesant en descendant par cette courbe s'eloigne egalement du point fixe A en temps egaux. Soit $AB = x$, $BD = z$, $AD = \sqrt{xx + zz}$, donc les differentielles $Bb = dx$, $Fd = dz$, $Dd = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ et Ed ou $Aa = \frac{xdx + zdz}{\sqrt{xx + zz}}$, or les portions infiniment petites de la courbe, Dd et Aa ou Ed que je suppose parcourues en des instans egaux doivent estre entr'elles, comme la vitesse acquise en D, a la vitesse acquise en A (c'est a dire en supposant que le corps avant d'estre parvenu au point A soit tombé de la hauteur LA que j'appelle a) comme $\sqrt{DB + AL}$ est à $\sqrt{AL}$ et faisant le calcul on trouve $\overline{xdz - zdx}\sqrt{a} = \overline{xdx + zdz}\sqrt{z}$ et supposant $z = \frac{yy}{a}$ il vient la mesme equation que je vous ai envoyée.

Je crois avoir découvert la maniere d'appliquer le calcul differentiel à l'invention de la ligne qui touche en rang une infinité d'autres lignes données, je vous expliquerai ma pensée par un exemple, car je trouve qu'en ces sortes de matieres il faut toujours autant que l'on peut fixer ses idées. Soit donnée une courbe quelconque (fig. 43) ABC et supposant qu'il y ait une infinité de Paraboles CBF qui passent toutes par le point C et dont les sommets des axes soient dans la courbe ABC, il faut determiner la ligne qui les touche toutes. Il est clair que le point d'attouchement de chaque Parabole CBF est dans l'intersection G de CBF et de celle qui est infiniment proche Cbf. Cela posé, soient menées les droites BD, GE paralleles à AC et soient nommées les connues CD, x, DB, y, et les inconnues CE, u, EG, z, et on aura par la proprieté de la Parabole $DF^2 . HG^2 :: DB . HB$ ce qui donne $2uxy - uuy = xxz$ qui est l'equation commune a toutes les paraboles telles que CBF. Je considere maintenant que les inconnues u et z demeurent les mesmes pendant que les connues x, y changent, c'est pourquoi l'equation differentielle sera $2uxdy + 2uydx - uudy = 2zxdx$, d'ou l'on tire, en mettant pour z sa valeur, $u = \frac{2yxdx - 2xxdy}{2ydy - xdy}$. Or la nature de la courbe ABC etant donnée le rapport de dx a dy le sera aussi et partant la valeur de u ou de CE sera exprimée en termes entierement connus delivrés de differentielles. Si au lieu de paraboles on propose d'autres courbes, le probleme se resout de la mesme maniere, et si on vouloit avoir une equation à la maniere de Descartes qui exprimast la nature de la ligne qui passe par tous les points G, il faudroit en se servant de l'equation commune a toutes les Paraboles CBF, de celle de la courbe ABC, et de la troisieme qui resulte de deux differentielles, en trouver une ou les x et y ne rencontrassent plus et qui exprimait le rapport de u a z. Soit par exemple la courbe ABC une demie Ellipse dont le grand axe est double du petit AC que j'appelle a, on trouvera $uu = 4aa - 4az$ d'ou l'on voit que la ligne qui passe par tous les points G est une Parabole dont le sommet est en A, et le foyer en C. Ce qui est ici de remarquable c'est que les Paraboles CBF marquent le chemin que descrivent en l'air les bombes qui seroient jettées par un mortier placé en C, dans toutes les elevations possibles, et que les points G sont les plus eloignés qu'il se peut du mortier, c'est a dire que la bombe en parcourant la Parabole CBF tombe sur le plan determiné CG en un point G plus eloigné du mortier C que si elle parcouroit toute autre Parabole ou ce qui est la mesme chose que dans toute autre elevation du mortier.

Vous pretendez, Monsieur, dans les Actes de Leipsic de l'année derniere page 446 que la courbe dont l'equation differentielle de differentielle est $a\,ddx = dy^2$ en supposant dt constant (dx exprime les differentielles des parties de l'axe, dy celles de ordonnées, et dt les petites portions de la courbe qu'on suppose egales entr'elles) est une logarithmique qui a pour soutangente la droite donnée a. Il me paroist que cela n'est pas ainsi et voici ma raison. $dt^2 = dx^2 + dy^2$ et prenant les differentielles $\frac{dy\,ddy}{dx} = ddx$, or a cause de la logarithmique $dx = \frac{a\,dy}{y}$, donc $y\,ddy = a\,ddx$ et partant il faudroit selon vous qu'en supposant dt constant dans la logarithmique on trouvast $y\,ddy = dy^2$, or cela n'arrive pas dans cette supposition, mais seulement dans celle que dx est constant, donc la mineure se prouve ainsi, dx etant posé constant l'equation $dx = \frac{a\,dy}{y}$ aura pour sa differentielle $y\,ddy = dy^2$; mais posant dt constant on aura dx ou $\sqrt{dt^2 - dy^2} = \frac{a\,dy}{y}$ et $\frac{dy\,ddy}{\sqrt{dt^2 - dy^2}} = \frac{ay\,ddy - a\,dy^2}{yy}$ et mettant pour $\sqrt{dt^2 - dy^2}$ sa valeur $\frac{a\,dy}{y}$ il vient $aay\,ddy - aa\,dy^2 = y^3\,ddy$ ce qui est bien different. Je ne vous propose ceci que comme une difficulté que je soumets à vôtre jugement qui ne peut estre que tres eclairé. Je suis, Monsieur, avec une estime parfaite vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

P. S. Le P. Malebranche m'a prié de vous remercier de sa part de la lettre que vous lui avez ecrite et de vous assurer de ses respects. J'ai toujours été de vôtre avis sur ce que vous lui mandez de la regle de Mr. de Tschirnhaus, et j'ai mesme fait convenir le P. Prestet qu'il s'etoit trompé. J'avois eu dessein de faire mettre dans le journal mon sentiment là dessus parce qu'il semble de la maniere dont le P. Prestet s'adresse à moi que je sois du sien. Cependant je n'en fis rien à sa priere et cela en est demeuré là. Mais ce que j'ai toujours soutenu a été que bien loin que la regle de Mr. Tschirnhaus eut quelque avantage par dessus celle de Cardan, elle étoit au contraire sujette au mesme deffaut, et plus embarassée. Ce deffaut consiste à mon sens en ce que l'expression des racines des egalitez du 3e degré dans le cas où elles sont toutes trois réelles et incommensurables, renferme des grandeurs imaginaires qu'on ne peut debarasser en aucune sorte de leur lignes. On ne trouve rien considerable dans la seconde edition du livre du P. Prestet touchant les egalites du 5e degré et ce qu'il y a de plus que dans la premiere consiste en ce qu'il a resolu par analyse toutes les questions de Diophante. Il suppose cependant quelque fois certains theoremes aussi bien que Diophante qu'il ne demontre pas, en voici un: Que tout nombre entier qui est composé de trois quarrez au moins en fraction est necessairement ou quarré ou composé de deux quarrez ou de trois quarrez en entiers. Ce theoreme depend de la nature des nombres et me paroît tres difficile a demontrer. Mr. de Fermat assure dans une lettre qui est imprimée à la fin du Commercium epistolicum Wallisii qu'il a trouvé les demonstrations de quelques theoremes au moins aussi difficiles que celui ci; mais j'ai de la peine a me le persuader. Pourquoi ne les auroit-il pas publiées lui qui faisoit souvent beaucoup de cas de peu de choses?

IV.

Leibniz an de l'Hospital.

Ce n'est pas cette universalité de connoissances que vous m'attribués, Monsieur, par une pure grace de vostre liberalité, qui m'empeche de satisfaire à mon inclination pour les mathematiques; mais une infinité de petites choses qui me detournent. Je crois d'avoir maintenant plus de 30 lettres qui attendent reponse où il faut tousjours dire quelque autre chose que des complimens. Et outre les devoirs de mes charges on doit du temps à la cour et à ses amis; de plus il me vient quelques fois des pensées que je suis bien aise de conserver; il faut voir les livres nouveaux; il est necessaire d'avoir quelque information des affaires courantes. Et excepté les sçavans et ceux qui me connoissent, s'ils sçavoient qu'avec cela je m'amuse encor à l'Algebre, ils le trouveroient estrange. Quand j'ay fait quelque chose, je l'oublie presque entierement au bout de quelques mois, et plustost que de le chercher dans un chaos de brouillons que je n'ay pas le loisir de digerer, et de marquer par rubriques, je suis obligé de faire le travail tout de nouveau. On est heureux dans une grande ville, où l'on trouve des aides de toute façon, dont les assistances et concours à un même dessein soulagent merveilleusement. J'ay souvent souhaité un jeune homme profond dans l'analyse qui en m'assistant auroit trouvé encor de quoy se signaler luy même, ce qui luy auroit depuis servi de recommandation; mais on n'en trouve point de cette sorte dans ce pays cy, ny dans le voisinage. J'ay plusieurs Methodes qui ne demandent que du temps pour estre mises en estat de servir, par exemple pour aller aux racines du cinquième degré, et autres degrés superieurs; pour pousser les problemes faits à la façon de Diophante qui jusqu'icy n'ont pas esté assez soumis à l'analyse; pour avancer la science des nombres d'une maniere toute nouvelle; pour reduire les lignes Transcendantes aux ordinaires quand il est possible, ce qui comprend encor les quadratures indefinies ou communes à chaque segment; item pour parvenir même aux quadratures speciales ou pour en demonstrer l'impossibilité; ce qui est bien plus difficile que les quadratures infinies, et encor bien au delà de nostre calcul des sommes et des differences. J'ay même le projet d'une Analyse Geometrique toute nouvelle, entierement differente de l'Algebre, qui sert pro situ exprimendo comme l'Algebre est pro magnitudine exprimenda; et les calculs y sont des veritables representations de la figure et donnent directement les constructions; au lieu que la traduction des problemes de Geometrie à l'Algebre, revocando situm ad magnitudinem, est souvent quelque chose de force: tellement qu'il faut de la façon pour mettre le probleme en calcul, et encor plus de façon aprés le calcul fini, pour en tirer une construction. Mais dans ce nouveau calcul la simple enontiation du probléme seroit son calcul et le dernier calcul seroit l'expression de la construction. La chose est faisable, et serviroit à soulager merveilleusement l'Imagination que ce calcul suivroit pas à pas, et ce seroit quelque chose de tres utile pour la mecanique et même pour la physique pour y raisonner mecaniquement.

J'en ay des echantillons qui serviront à fin que cette veue ne se perde point, si je suis empeché de l'executer. L'Algebre et la Geometrie sont asses achevées pour l'usage; l'algebre ordinaire par les racines approchantes, la Transcendante par la Methode des series que je vous ay envoyée, de sorte que ce qui reste est plustost pour la curiosité et perfection de la science ou tout au plus pour trouver des abregés; mais cette Characteristica situs auroit des utilités toutes nouvelles pour la practique meme. Je ne vous diray rien icy des essais que j'ay pour raisonner mathematiquement sur des matieres qui sont entierement eloignées des mathematiques. Mais je parleray à cette occasion de quelques progres que j'ay fait sur les nombres. Comme je me sers souvent de nombres au lieu de lettres, mais en traittant ces nombres comme si n'estoient que des lettres, j'y ay trouvé entre autres utilités celle de pouvoir faire epreuve du calcul literal ou de la speciuse per abjectionem novenarii; et comme l'abjection novenaire n'exclut pas tous les erreurs, quoyque elle les decouvre ordinairement, j'y ay adjouté de plus abjectionem undenarii, ou j'ay trouvé un abregé, qui ne cede gueres à l'abjection novenaire dont vous sçavés la grande commodité et utilité. En cherchant les choses je trouvay des ouvertures sur les nombres qui pourront pousser bien loin cette science. Il est vray, comme vous dites, Monsieur, que M. de Fermat fait quelques fois trop d'estat de peu de choses, mais il semble, qu'il estoit profond sur les nombres, et capable de demonstrer les theoremes dont il fait mention, puisqu'il avoit dit de le pouvoir faire.

Vous avés eu raison de trouver à redire à ce que j'avois dit dans les Actes touchant la courbe dont les elemens estant egaux il y a $addx = dy^3$. Mes distractions sont cause que je me trompe quelques fois, et je ne suis point faché, qu'on me releve. Ce que M. Bernoulli, professeur de Bâle, a aussi fait sur un autre point dans une lettre ecrite à un ami pour m'estre communiquée; j'en ay profité par un aveu public, ce que je pourray faire aussi dans l'occasion sur vostre animadversion. Je n'y pas peu trouver mon brouillon d'alors, pour y voir la cause de l'erreur, mais en examinant la chose, je trouve que dy estant comme des nombres, x sont comme des logarithmes; ainsi je croy que par precipitation, ou *oculorum errore*, j'auray pris y pour dy. Je suis bien aise de sçavoir que l'equation differentielle que vous m'avés envoyée, Monsieur, sert pour un cas de la ligne ou le poids descendant s'eloigne egalement d'un certain point. Cela me servira à y mieux penser un jour. Car autres fois songeant à ce probleme je croyois voir quelque chemin pour le donner.

Vous avés merveilleusement bien trouvé la maniere d'appliquer le calcul differentiel à la determination de la ligne qui touche un rang de lignes c'est qu'en differentiant l'equation commune à toutes les lignes de ce rang, au lieu qu'ordinairement les deux coordonnées sont doubles ou differentiables, icy elles sont simples; et quelques parametres indifferentiables ailleurs sont icy changeans et par consequent differentiables. Il peut arriver que de plusieurs parametres (ou constantes dans l'equation d'une même courbe) l'un soit differentiable, et l'autre demeure invariable, par exemple si une même parabole estoit differemment placée, en sorte que son axe soit tousjours vertical, ou parallele à AL (fig. 44), et le sommet tousjours dans une droite donnée AM, les intersections des situations, ou traces de la parabole, donneront une nouvelle ligne qui touchera toutes les traces. On voit bien qu'elle sera droite, mais pour le calcul soit AB, z, et BC, v, et AL, x, et LM, y, et parametre constant de la parabole f, il y aura $f \cdot ME = EC^2$, or $ME = z - x$ et $EC = v - y$, donc $fz - fx = vv - 2vy + yy$ (1), ou f est *constantissima*, tant pour chaque point de la ligne MC, que pour chaque ligne MC, mais x et y sont *constantes* pour chaque point de la ligne MC, mais non pas pour chaque ligne estant autres pour M que pour (M). Les lignes v et z sont variables tant pour chaque point de la ligne, que pour les lignes, excepté dans le point d'intersection ou elles sont communes à deux lignes prochaines et ces intersections donnent le point de la ligne touchante commune. Ainsi en differentiant l'equation (1) on voit que f, z, v demeurent invariables, mais x et y se differentient; et nous aurons $-fdx = -2vdy + 2ydy$ (2); mais $dx : dy$ est une raison donnée r, car $dx : dy = x : y$ (3) $= r$ (4), car AM(M) est droite; donc par (2) et (3) nous aurons $y = y - \frac{1}{2} rf$ (5). Et de l'equation (4) estant x et y par le moyen des equations (4) et (5) nous aurons $fz + \frac{1}{4} rrff = rfy$ ou bien $z + \frac{1}{4} r^2 f = rv$ (6), ce qui fait voir que la ligne qui touche tousjours la parabole mue comme nous venons de dire, est une droite parallele à AM. Il estoit aisé de prevoir cela, mais j'ay pris sur le champs ce cas aisé pour me mieux expliquer. Si, d'abord on avoit osté une des variables x ou y de l'equation (1) par l'equation (4) en faisant $fz - rfy = vv - 2vy + yy$ (7), la differentialité seroit evanouie d'elle meme; car il y auroit $-rf = -2v + 2y$ (8) ce qui convient avec l'equation (5). On a le choix de suivre l'une ou l'autre façon selon les rencontres. La ligne sur laquelle une autre est revolue (à l'imitation du cercle qui fait la cycloide) est aussi la touchante commune de toutes les traces de la generatrice, ainsi la generatrice et la generée estant données on peut trouver la base de la revolution. Comme je puis tousjours trouver la touchante commune à un rang de lignes, je voudrois pouvoir aussi trouver tousjours la perpendiculaire commune, ou la ligne qui feroit un angle donné commun.

De la maniere que je vois, Monsieur, que vous penetrés les choses tout ce que vous me voudrés communiquer, me sera tres utile et tres agreable, soit pour resoudre des equations differentielles par certains canons que vous ayés fabriqués; soit pour quelque autre chose. Je ne doute point que vous ne m'appreniés des choses que j'aurois de la peine à faire, n'estant pas en estat de m'y appliquer comme il faut; je n'ose pas même dire, qu'avec toute mon application j'y pourrois tousjours arriver. Pour ce qui est de la series pro inveniendo sinu ex dato arcu, la methode que je vous ay envoyée la donne; car soit l'arc a, le sinus y, le rayon soit l'unité, l'equation differentielle pour exprimer la relation entre le sinus et l'arc est $da^2 = dy^2 + da^2 y^2$. Soit maintenant le sinus $y = ba + ca^3 + ea^5 + fa^7 + ga^9$ etc. ce qui donnera encor les valeurs d'y^2 et de dy^2 par series, lesquelles estant substituées dans l'equation differentielle, il en proviendra une equation, qui ne contiendra que l'indeterminée a, et par consequent devra estre rendue identique, en faisant evanouir tous les termes; ce qui donnera moyen de determiner les valeurs des lettres b, c, f, g, et au bout du compte on trouvera $y = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. comme j'ay experimenté. Le même se trouvera encor plus facilement, allant aux differentio-differentielles, et faisant $y\,da^2 + ddy = 0$ si da est supposée constante. On pouvoit faire au commencement $y = b + ca + ea^2 + fa^3 + ga^4 + ha^5$ etc. mais le calcul même fait voir, que les coefficientes des termes dont l'exposant est pair, peuvent estre posées egales à rien.

Je souhaiterois de vous pouvoir contenter si aisément dans tous les autres points de vostre lettre, mais le mal est qu'il y en a qui demandent bien plus de temps et d'attachement, dont je ne suis pas presentement le maistre. Cependant j'auray soin d'y satisfaire aussi tost qu'il me sera possible. J'adjouteray sur vostre postscriptum qu'il est vray que la regle de Mons. Tschirnhaus est plus embarassée que celle de Cardan, mais si sa methode pouvoit aller aux degrés superieurs, j'en serois le plus content du monde. J'ay dit dans ma precedente ou dans celle que j'ay ecrit au Reverend Pere Malebranche, que je tiens les regles de Cardan pour generales à l'egard de toutes les equations cubiques, et que les grandeurs ne laissent pas d'estre reelles non obstant l'intervention des imaginaires, qui se detruisent virtuellement. Il est vray que ces expressions alors ne servent pas à la construction, mais elles satisfont à l'analyse en donnant purement la valeur de l'inconnue; et ont tous les autres usages analytiques qu'on peut souhaiter de sorte que je serois tres content, si j'en avois de semblables pour les degrés superieurs. Je souhaite pourtant d'en sçavoir vostre sentiment, Monsieur, et je vous supplie de considerer pour cet effect, ce que j'en ay déja ecrit.

V.

De l'Hospital an Leibniz.

Toutes les veues que vous avez, Monsieur, pour le progrés de la Geometrie et de l'analyse me paraissent admirables. Il seroit extremement a souhaitter que vous pussiez avoir le loisir de les achever. Je suis persuadé qu'il faut un calcul tres penible et tres ennuyeux pour trouver les racines des egalités du 5ᵉ degré, et je conviens avec vous que tout ce que l'on peut souhaitter la dessus, est de trouver une expression generale renfermée sous des signes radicaux, sans s'embarasser si il y a des imaginaires ou non. Je crois mesme voir quelque jour pour demontrer qu'il est impossible d'exprimer autrement d'une maniere generale les racines des egalités du 3ᵉ degré, dans le cas ou elles sont toutes trois réelles et incommensurables. Les questions a la maniere de Diophante sont resolues pour la pluspart sans methode et par des adresses particulieres, et comme elles ne sont pas d'une grande utilité, il me sembla qu'on seroit fort obligé a ceux qui nous donneroient des methodes generales pour resoudre une infinité de questions semblables, car ce sont proprement les methodes qui etendent la capacité de l'esprit, ce qui est a mon avis un des principaux avantages que l'on peut tirer des mathematiques. La science des nombres a esté jusqu'ici fort imparfaitte, on ne sait pas mesme la nature des nombres premiers, ce qui paroist assez de ce qu'on n'a pû encore demontrer que tout nombre premier plus grand de l'unité qu'un nombre divisible par quatre, est composé de deux quarrés en entiers. Si l'on pouvoit trouver une methode pour parvenir aux quadratures particulieres lorsqu'elles sont possibles, ou pour en demontrer l'impossibilité lorsqu'elles ne le sont pas, je la prefererois a toutes ces autres inventions. Mr. Tschirnhaus pretend en quelqu'endroit des Actes de Leipsic, que lorsqu'on a une quadrature particuliere dans les courbes algebraiques, on en peut trouver une infinité d'autres, au lieu qu'il n'en est pas ainsi des lignes transcendantes. Comme cette remarque m'a parû belle, je l'ay examinée autre fois et j'ay trouvé qu'elle se reduisoit a demontrer qu'on peut tousjours assigner dans toutes les courbes geometriques au sens de Descartes, une infinité de segmens egaux a un segment donné. Je n'ose pas assurer que cela soit universellement vray, mais je crois tousjours avoir reduit la question a quelque chose de plus simple et je serois bien aise de savoir vostre sentiment la dessus. Je ne voudrois pas tomber dans le deffaut de Mr. Tschirnhaus qui prent souvent pour generalement vray ce qu'il n'a pû verifier tant au plus que dans quelque cas particulier, temoin ce qu'il avance dans son Medicina Mentis lorsqu'il pretend qu'on peut decrire toutes les courbes imaginables soit algebraiques soit transcendantes par le moyen de certains filets. Ce que vous me mandez de vostre analyse geometrique reveille beaucoup ma curiosité, mais je ne puis m'en former d'idée juste que je n'en ay veu auparavant quelques essais. J'ay de la peine a croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir de nombres que de lettres dans l'analyse ordinaire. J'ay oui dire autrefois que vous aviez formé le project d'une certaine table qui seroit aussi commode pour le calcul algebraique que les logarithmes le sont pour les nombres. Mandez moy je vous prie ce qui en est.

Je suis fort aise d'avoir bien rencontré la maniere de determiner la ligne qui touche un rang d'autres lignes données. Mais il n'est pas aussi facile de trouver la perpendiculaire commune, car le probleme se reduit alors a prendre les sommes, c'est a dire a la methode inverse des tangentes. Voici un exemple qui quoiqu'aisé sert a prouver cette verité.

Soit une infinité de paraboles qui ayent toutes le mesme sommet (fig. 45) C, et le mesme axe CH, il faut determiner la ligne AME qui les coupe toutes a angles droits.

Solution. Ayant mené l'ordonnée MP, et la perpendiculaire MH a la parabole, et nommé les indeterminées CP, x, PM, y, on aura par la nature de la parabole $PH = \frac{yy}{2x} = -\frac{ydx}{dy}$ (parceque MH doit estre touchante de la courbe AME) et partant $-2xdx = ydy$, et prenant les sommes $-xx$ ou $aa - xx = \frac{1}{2}yy$. D'ou l'on connoist que la ligne cherchée AME est une Ellipse, dont le quarré d'un des axes AB est au quarré de l'autre axe DE, comme 2 est a 1, et generalement pour les paraboles de tous les degrés, comme l'exposant des puissances des ordonnées MP, a l'exposant des puissances des parties CP de l'axe.

Vous ne serez peut estre pas faché, Monsieur, de voir ici la solution que j'ay donnée il y a désia quelque temp dans nostre Journal des Savans du probleme que Mr. de Beaune proposa autre fois a Mr. Descartes, et que l'on trouve dans la 79. de ses lettres tome 3.

Probleme.

Une ligne droite quelconque N estant donnée, et ayant mené deux autres lignes indefinies (fig. 46) AC, AL, en sorte que l'angle CAI soit de 45 degrez; on demande la maniere de decrire la courbe ABB, qui soit de telle nature que si l'on mene d'un de ses points quelconques B, l'ordonnée BC et la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la mesme que celle de la droite donnée N a BI.

Solution. Ayant formé le quarré AG qui a pour coté la droite AH egale a la ligne donnée N, l'on décrira entre les asymptotes GD, GH par le point A l'hyperbole AIL, et ayant prolongé DA en E, en sorte que AE soit egale a AH, l'on prendra le rectangle EC egal a l'espace hyperbolique AKL, l'on prolongera les droites LK, FC, jusqu'a ce qu'elles se rencontrent en un point M, et l'on prendra enfin IB egal a CM, je dis que le point B sera a la courbe qu'il falloit décrire.

Il est evident que la nature de cette ligne courbe ABB dépend de la quadrature de l'hyperbole, et qu'ainsi est mecanique dans le sens de Descartes. Voici maintenant quelques unes de ses proprietez.

1°. Elle a pour asymptote la ligne DO parallele a AI.

2°. Si l'on nomme AC, x, BC, y, l'espace ABC compris par les droites AC, CB, et par la portion AB de la courbe, $= xy - \frac{1}{2} yy + nx$.

3°. La distance du centre de gravité de l'espace ABC de la droite $AC = n + \frac{3xyy - 2y^3}{6xy - 3yy + 6nx}$ et de $AK = \frac{1}{2}n + \frac{3xxy - y^3}{6xy - 3yy + 6nx}$ et l'on a par consequent les solides, demisolides etc. formez par la revolution de cet espace, tant autour de AC que de AK ou BC.

4°. Il est facile de determiner les centres de gravité de ces demi-solides. Mais comme on a besoin d'une adresse particuliere pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce probléme aux Geometres les assurant qu'il merite leur recherche.

J'ay trouvé depuis une autre construction qui me plaist d'avantage et dont vous jugerez.

Ayant pris sur (fig. 47) CA prolongée du costé de A la partie AG egale a la droite donnée N, et mené GH parallele a BC, on décrira par le point A la logarithmique AE qui ait pour asymptote la droite indefinie GH, et pour soustangente une ligne egale a AG; on menera en suite par un point quelconque E de la logarithmique les droites EF, EB paralleles a GH, GA; et ayant pris EB egal a EF, je dis que le point B sera a la courbe requise. Il est facile de rendre cette construction generale tel que puisse estre l'angle donné CAL. Je reserve a la premiere fois a vous envoyer la rectification generale de cette courbe qui est assurement plus difficile que celle de la logarithmique et comme je ne suis désia que trop long ce sera aussi pour la premiere occasion que je vous feray part de ma regle pour l'inverse des tangentes et que je vous prieray en mesme temps de vouloir bien m'envoyer la vostre qui je m'asseure sera tres belle. Je suis, Monsieur, avec une estime tres particuliere vostre tres humble et tres obeissant serviteur.

A Paris ce 23. avril 1693.

VI.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover 28. Avril 1693.

Si j'estois aussi capable d'achever des Methodes, que je suis disposé à en projetter, nous irions sans doute bien loin, Monsieur, et je pourrois remplir vostre attente. J'avois conferé autres fois avec feu M. Prestet touchant les imaginaires, il ne paroissoit pas disposé à les admettre dans les expressions. Cependant je m'en trouve bien. Je crois avec vous qu'on ne sçauroit donner aucune expression des racines des equations cubiques, propre à se passer des imaginaires ou impossibles. Car puisque toute racine cubique tirée d'une grandeur possible, comme n, a trois valeurs $\sqrt[3]{n}$, et $(1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$, et $-(1-\sqrt{-3})\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$, dont les deux dernieres sont impossibles, donc si la racine de l'equation ne contenoit que des racines cubiques des grandeurs possibles, elle n'exprimeroit jamais trois valeurs possibles. Ce qui est pourtant necessaire, puisque une valeur de l'inconnue de l'equation trouvée sans depression qui extraction actuelle doit exprimer toutes les valeurs de la racine de l'equation.

J'ay trouvé que les problemes semblables à ceux de Diophante sont d'une utilité plus grande qu'on ne pense, c'est ce qui m'en fait souhaiter la solution. L'invention des quadratures particulieres, lorsqu'elles sont possibles, ou la demonstration de l'impossibilité est ce qu'il y a de plus sublime dans cette partie de la Geometrie. Cependant si j'avois les quadratures generales par les expressions que je souhaitte, on avanceroit encor de beaucoup les quadratures particulieres. Mons. Tschirnhaus pretendoit de conclure l'impossibilité de la quadrature particuliere, lors que la quadrature generale avoit esté prouvée impossible. Mais pour luy donner une instance contraire, je fabriquay une figure par les ordonnées de la lunule d'Hippocrate, appliquées à une droite, quelques années apres, s'estant apperceu de la verité de mon objection, il nous donna un peu le change. Il est bien vray que la lunule reçoit une certaine façon de quadrature qui est indefinie, sans estre generale; mais c'est parce qu'elle est enfermée de deux lignes courbes: car lorsque la figure n'a qu'une courbe, cela ne sçauroit reussir. Il me paroist difficile de donner une Methode propre à trouver une infinité de segmens egaux à un segment donné d'une courbe Algebraique. Par segmens j'entends une figure comprise d'une droite, et d'un arc de courbe. Si cela se pouvoit dans l'Ellipse et dans l'Hyperbole, je croy qu'on y viendroit à des quadratures. Par exemple dans l'Hyperbole les secteurs *ex centro* sont comme les logarithmes de certaines droites données, c'est pourquoy s'il y avoit encor moyen de comparer les segmens, on viendroit à les quadratures absolues des cas particuliers. Monsr. de Tschirnhaus me proposa un jour *datum segmentum vel semisegmentum figurae ordinariae secare in ratione data ductu cujusdam lineae ordinariae seu Algebraicae.* Je luy envoyay la Methode que je crûs avoir trouvée pour cela. Mais il y a des methodes que je souhaiterois bien d'avantage, par exemple de pouvoir reduire les quadratures aux rectifications des courbes. Car la dimension de la ligne est plus simple que celle d'un espace.

Dés que la *Medicina Mentis* de Monsieur de Tschirnhaus parût (où en effect il y a plusieurs pensées excellentes) je luy manday les difficultés que je trouvois à l'egard de ce qu'il dit du dénombrement des courbes et des determinations de leur tangentes par les filets, et comme je crûs entrevoir un moyen general pour ces tangentes par les filets et fondé sur une jolie consideration de Mecanique, je luy fis esperer la vraye construction. Mais Monsr. Tschirnhaus ne repondit point à cette lettre, ainsi quoyque j'eusse acheyé ma construction, je ne voulus point l'en importuner.

Vous avés bien compris, Monsieur, que pour mener une ligne perpendiculaire à une suite de lignes données, il faut venir à l'inverse des tangentes. Si je pouvois reduire vice versa les inverses des tangentes à ce probleme, j'aurois une nouvelle maniere de les construire independemment des quadratures.

Ayant vû dans le Journal des Sçavans une construction du probleme de M. de Beaune, j'en fus tout surpris, car je ne connoissois alors personne en France, qui eût de l'entrée dans ce qu'il faut pour cela, et je n'estois pas informé alors, qu'une personne de vostre poids prenoit plaisir à ces recherches. Maintenant je suis bien aise d'apprendre, que c'est vous qui l'avés donnée. Je n'ay pas le loisir d'entrer dans le detail des proprietés de cette courbe, et comme vous estes venu à bout de sa rectification, nolim actum agere; ce n'est pas que je me vante de le pouvoir faire quand même je voudrois y penser, car puisque vous dites qu'il faut une adresse particuliere pour cela, je vois assez que la chose ne sera pas de plus aisées. Mais comme vous avés la bonté de ne me pas traiter en estranger dans ces matieres, j'aime mieux d'attendre vos instructions, que de tacher peutestre inutilement de les prevenir, ce que je dis aussi sur vostre methode pour certains problemes des tangentes renversées, que vous m'avés fait esperer. Il est bon cependant de ne pas prostituer nos Methodes, sur tout à l'egard des gens, qui en usent avec un peu de supercherie, temoin un sçavant Mathematicien de Paris, qui voulut prendre part à ma quadrature Arithmetique, dont il avoit appris la demonstration de Mons. de Tschirnhaus à qui je l'avois communiquée. Pour vous, Monsieur, si j'avois beaucoup de lumieres, je prendrois le plus grand plaisir du monde à les vous communiquer, car en y joignant les vostres vous pouvés porter les choses plus loin que je n'aurois pû. C'est pourquoy je vous informeray volontiers de mes methodes tant pour les Tangentes renversées, que pour autres choses. Puisque vous dites que vous avés de la peine à croire qu'il soit aussi general, et aussi commode, de se servir des nombres que des lettres, il faut que je ne me sois pas bien expliqué. On ne sçauroit douter de la generalité en considerant qu'il est permis de se servir de 2, 3 etc. comme d'a ou de b, pourveu qu'on considere que ce ne sont pas de nombres veritables. Ainsi 2.3 ne signifie point 6, mais autant qu'ab. Pour ce qui est de la commodité, il y en a des tres grandes, ce qui fait que je m'en sers souvent, sur tout dans les calculs longs et difficiles ou il est aisé de se tromper. Car outre la commodité de l'epreuve par des nombres, et même par l'abjection du novenaire, j'y trouve un tres grand avantage même pour l'avancement de l'Analyse. Comme c'est une ouverture assez extraordinaire, je n'en ay pas encor parlé à d'autres, mais voicy ce que c'est. Lorsqu'on a besoin de beaucoup de lettres, n'est il pas vray que ces lettres n'expriment point les rapports qu'il y a entre les grandeurs qu'elles signifient, au lieu qu'en me servant des nombres je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose $10 + 11x + 12y = 0$ (1) et $20 + 21x + 22y = 0$ (2) et $30 + 31x + 32y = 0$ (3) ou le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons:

$$\begin{matrix} +10.22 + 11.22x \\ -12.20 - 12.21x \end{matrix} = 0 \quad (4)$$

et par la premiere et troisieme nous aurons:

$$\begin{matrix} +10.32 + 11.32x \\ -12.30 - 12.31x \end{matrix} = 0 \quad (5)$$

où il est aisé de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere antecedent 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{matrix} 1_0 . 2_1 . 3_2 & & 1_0 . 2_2 . 3_1 \\ 1_1 . 2_2 . 3_0 & = & 1_1 . 2_0 . 3_2 \\ 1_2 . 2_0 . 3_1 & & 1_2 . 2_1 . 3_0 \end{matrix}$$

qui est la derniere equation delivrée des deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à decouvrir en employant des lettres a, b, c, sur tout lors que le nombre des lettres et des equations est grand. Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et des Cartes n'en ont pas encor connu tous les mysteres. En poursuivant tant soit peu ce calcul on viendra à un theoreme general pour quelque nombre de lettres et d'equations simples qu'on puisse prendre. Le voicy comme je l'ay trouvé autres fois: Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una, tantum coefficiens uniuscujusque aequationis; secundo, eae combinationes opposita habent signa, si in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; caeterae habent eadem signa. J'avoue que dans ce cas des degrés simples on auroit peut estre decouvert le même theoreme en ne se servant que de lettres à l'ordinaire, mais non pas si aisement, et ces adresses sont encor bien plus necessaires pour decouvrir des theoremes qui servent à oster les inconnues montées à des degrés plus hauts. Par exemple, pour oster la lettre x^1 par le moyen de deux equations dont l'une est de trois degrés, l'autre de deux, je suppose $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ et $20x^2 + 21x + 22 = 0$, ou le caractére anterieur du coefficient marque l'equation et le caractere posterieur marque le degré dont il est coefficient, en remplissant la loix des homogenes. Ce qui sert à les observer dans tout le progres de l'operation. Dans les equations plus hautes pour mieux s'asseurer du calcul, on peut au lieu du dernier terme prendre un nombre tel que l'equation donneroit en prenant x pour l'unité ou pour quelque nombre veritable, par exemple au lieu de $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ on pourroit écrire $10x^3 + 11x^2 + 12x - 11220$, prenant x pour 10, pourveu qu'on se souvienne que 11220 signifie un solide ou une grandeur de trois dimensions; ainsi le calcul se verifiera tousjours en nombres veritables, et se pourra même examiner à tout moment par l'objection du nouenaire, ou de l'ondenaire, et neantmoins les harmonies paroistront par tout substituant 13 pour — 11220. En calculant ainsi on trouvera des theoremes et on dressera les tables que j'ay souhaittées. On voit aussi par là une chose que j'ay indiquée déja dans les occasions, c'est que la perfection de l'Algebre depend de l'art des Combinaisons qui est proprement la Specieuse Generale.

Vous n'avés point voulu toucher à nostre question de Mecanique. Je suis avec passion etc.

VII.

De l'Hospital an Leibniz.

C'est avec un plaisir sensible, Monsieur, que je reçois de vos lettres, j'y trouve toujours de vûes nouvelles auxquelles personne n'avoit encore pensé. La maniere dont vous vous servez de nombres au lieu de lettres dans les equations pour en tirer en suite des regles ou theorèmes est tres ingenieuse, et comme l'analyse n'est que l'art d'abbreger les raisonnements et de representer tout d'une vûe a l'esprit ce qu'il ne pouroit appercevoir autrement que par un long circuit, il est certain que les caracteristiques en font la principale partie. Je ne doute pas que celle dont vous vous servez pour exprimer la situation des lignes et des angles et que vous appellez Caracteristica situs ne contienne quelque chose de tres beau et de tres utile. Vous m'en claircirez d'avantage quand vous le jugerez a propos, je crois avoir oui dire que nous aviez aussi imaginé une espece de caracteristique pour servir a composer des machines de mecanique, cela peut estre d'un grand usage dans cette science qui n'est pas encore arrivée a la perfection.

Il y a deux endroits dans vôtre lettre qui me paroissent recevoir quelque difficulté. Le 1r est conceu en ces termes: „Il „me paroist difficile de donner une methode propre a trouver „une infinité de segmens egaux a un segment donné d'une courbe „algebraique (par segment j'entends une figure comprise d'une „droite et d'un arc de courbe). Si cela se pouvoit dans l'ellipse „et dans l'hyperbole je crois qu'on y viendroit a des quadratu-

„res.“ Voici cependant la maniere de trouver ces segmens dans une section conique quelconque, et je ne vois pas qu'on en soit plus avancé pour les quadratures.

Soit proposé de couper par un point donné C (fig. 48.) sur une section conique un segment CD egal au segment donné AB. Ayant joint AC, et tiré BD parallele a AC, qui rencontre la section au point D, je dis que le segment CD sera egal au segment donné AB. Comme le point C peut estre situé en tel endroit que l'on veut sur la section, il s'ensuit qu'on peut trouver par cette construction une infinité de segmens egaux au segment donné AB.

Dans l'autre endroit vous vous expliquez en cette sorte. „M. de Tschirnhaus pretendoit de conclure l'impossibilité de la „quadrature particuliere, lorsque la quadrature generale avoit „esté prouvée impossible. Mais pour lui donner une instance „contraire, je fabriquai une figure par les ordonnées de la lunule „d'Hippocrate, appliquées a une droite; quelques années apres „s'estant apperceu de la verité de mon objection, il nous donna „un peu le change. Il est bien vrai, que la lunule reçoit une „certaine façon de quadrature, qui est indefinie sans estre gene„rale; mais c'est parcequ'elle est enfermée de deux lignes cour„bes; car lorsque la figure n'a qu'une courbe, cela ne sauroit „reussir.“

Vous avez apparemment fabriqué cette ligne ainsi. Soit le quarré ABCD (fig. 49) qui a pour costé AB et pour diagonale AC. Soient decrits du centre A et des rayons AB, AC les quarts de cercle BD, EF. Soit enfin la courbe GMH telle qu'ayant mené librement la droite MO parallele a AF, qui rencontre les quarts de cercles BD, EF aux points N, O et droite AB en P, sa partie PM soit toujours egale a NO. Cette courbe GMH est celle la mesme que vous proposastes autre fois a M. Tschirnhaus. Or non seulement l'espace entier AGHB est quarrable, mais encore une infinité d'autres moyens tels que MPQR le sont aussi, savoir lorsque la moitié de l'arc NI est semblable a l'arc OK; de sorte que cette figure a une quadrature indefinie sans estre generale, cependant elle n'a qu'une courbe. Il me semble que pour convaincre M. de Tschirnhaus d'erreur dans la maniere dont il s'est expliqué en dernier lieu, il faudroit donner quelques courbes geometriques qui n'eussent ni quadrature generale ni indefinie mais seulement une particuliere, car c'est la precisement ce qu'il pretend estre impossible.

Vous avez sans doute, Monsieur, le theoreme que Mr. Fatio a substitué a celui de Mr. Tschirnhaus pour l'invention des tangentes des lignes courbes qui ont des foyers. De la maniere dont il le propose dans sa derniere reponse que l'on trouve dans la Republique des Lettres, bien loin de lui donner toute la generalité dont il est capable, il le restreint dans les bornes fort limittées comme vous allez voir. Soit une ligne courbe MPN (fig. 50) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques P aux foyers A, B, C etc. des lignes droites PA, PB, PC etc. leur somme ou de telle de leur puissance qu'on voudra demeure partout la mesme. C'est la toute l'etendue que lui donne Mr. Fatio, d'ou l'on voit qu'il n'explique point de quelle maniere il doit estre entendu lorsqu'au lieu de la somme on prend la difference, par exemple si l'on suppose que $AP + PB - CP$ soit toujours egale a une ligne constante a, et de mesme si l'on veut que les plans alternatifs des droites PA, PB, PC soient toujours egaux a un quarré donné aa etc. Voici donc comme je crois qu'on doit enoncer cette proposition afin de la rendre aussi generale qu'il est possible.

Soit une ligne courbe MPN telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques P aux foyers A, B, C etc. des lignes droites PA, PB, PC etc. leur rapport soit exprimé par une equation quelconque donnée, et soit proposé de mener a un point donné P sur cette courbe la perpendiculaire PH.

Solution. Soit prise l'equation differentielle de celle qui exprime la nature de la courbe dont je suppose que tous les termes soient egalés a zero, et ayant decrit librement du centre P un arc de cercle EFG qui coupe les droites PA, PB, PC aux points E, F, G, que l'on conçoive que ces points soient chargés d'autant de poids qui soient entr'eux comme les quantités qui multipliént les differentielles des lignes sur lesquelles ils sont situés. Je dis que la ligne PH qui passe par le point donné P et par le point H commun centre de pesanteur des poids supposés en E, F, G sera la perpendiculaire requise. Ceci s'eclaircira par l'exemple suivant.

Que l'equation $ax + yz - by + zz - cc = 0$ exprime la nature de la courbe MPN, les indeterminées x, y, z marquent les droites PA, PB, PC, et les constantes a, b, c designent des parametres ou des lignes droites données. L'equation differentielle sera $adx + ydz + 2zdz + zdy - bdy = 0$, c'est pourquoi concevant au point E le poids a, au point F le poids $z - b$, et au point G le poids $2z + y$, on trouvera le point H commun centre de pesanteur de ces poids, et on menera la ligne PH qui sera la perpendiculaire cherchée. Il faut observer que si $z - b$ est une quantité negative, il faut imaginer ce poids au point f ou l'arc EFG coupe la ligne BP prolongée au dela de P. Il est evident que cette solution etant bien entendue demeure la mesme lorsque les foyers A, B, C au lieu de points sont des lignes courbes quelconques.

Je n'ai point touché jusqu'ici a la question de mecanique qui est de savoir si la force se doit estimer par la quantité de mouvement, parce que n'y ayant pas une evidence entiere dans ces sortes de questions, il arrive souvent qu'apres avoir disputé long temps on n'en demeure que plus attaché a son sentiment, cependant puisque vous le souhaittés, je vous dirai en deux mots de quelle maniere je crois qu'on peut repondre a vôtre difficulté. Voici donc ce me semble vôtre principale objection. Des forces egales etant appliquées sous les corps A de 4 ℔ et B de 1 ℔ doivent elever reciproquement le corps B a une hauteur quadruple de celle du corps A. Or des quantités de mouvement egales etant distribuées dans ces deux corps elevent le corps B 16 fois plus haut que le corps A. Donc la force ne se doit pas estimer par la quantité de mouvement. Je reponds a cet argument en distinguant la majeure, des forces egales etant appliquées sous les corps A de 4 ℔ et B de 1 ℔ doivent elever le corps B a une hauteur quadruple de celle du corps A, je l'accorde et cela est tres vrai si l'on veut que rien ne s'oppose d'ailleurs au mouvement des corps A et B, ou du moins si la resistance est egale, mais si elle est inegale, je le nie, car il est evident que si rien ne s'opposoit a l'elevation du corps B, c'est a dire que sa pesanteur fust aneantie, la mesme force qui n'auroit pû elever le corps A qu'a la hauteur d'un pied parceque sa pesanteur lui resistoit, eleveroit le corps B a une hauteur infinie. Mais la pesanteur du corps B qui s'oppose a son elevation n'etant que la 4e partie de celle du corps A, le corps B doit monter 4 fois plus haut qu'il ne monteroit si les resistances etoient egales c'est a dire 16 fois plus haut que le corps A. Donc etc. On peut encore ajouster a ceci que si l'on prend d'une part la somme de toutes les vitesses du corps A pendant son élévation a la hauteur d'un pied, et de l'autre celle de toutes les vitesses du corps B pendant son elevation a la hauteur de 4 pieds, et qu'on les multiplie par la masse de ces corps, on aura de part et d'autre des quantités de mouvement egales. De sorte qu'il sera vrai de dire en ce sens avec les Cartesiens que la mesme force qui se consomme pour elever le corps A à la hauteur d'un pied, se consomme aussi pour elever le corps B a la hauteur de 4 pieds. Enfin il me semble que pour eviter de plus longues disputes on pourroit decider la question par une experience facile. Il faudroit laisser tomber le corps A de 12 d'un pied de haut sur le bras d'une balance ou levier dont l'autre bras seroit chargé d'un poids appuyé sur un plan horizontal, et qui doit estre tel que le corps A par sa chûte le puisse soulever. On laisseroit tomber ensuite le corps B de 12 de 4 pieds de haut et on examineroit soigneusement s'il auroit la force de soulever le poids. Pour moi je suis persuadé qu'il ne le pouroit soulever qu'en tombant de 16 pieds. Ce qui feroit voir clairement que le corps A en tombant d'un pied et le corps B en tombant de 16, auroient aquis precisement la mesme force, puisqu'ils produiroient alors le mesme effet. Je suis tres veritablement, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris ce 15e juin (1693).

VIII.

Leibniz an de l'Hospital.

Je suis bien aise, Monsieur, que ma maniere de calculer par nombres au lieu de lettres ne vous a point deplu. Chez moy c'est une des meilleurs ouvertures en Analyse. Ce que j'ay pensé pour la caracteristique qui peindroit les machines sans employer des figures, n'est qu'une suite de la caracteristique de la situation. Je ne sçaurois deviner qui vous en peut avoir informé. Car je n'en ay gueres parlé, sçachant que la chose ne sçauroit paroistre vraisemblable.

Je m'imagine encor que si on pouvoit tousjours trouver des segmens egaux à un segment donné de la même courbe, ce seroit une voye pour arriver souvent aux quadratures. Ce que vous dites des segmens des coniques, me paroist beau, et merite d'estre approfondi comme je ferois dès à present, si mihi liceret ultra extemporanea meditari.

Lorsque je disois, que la quadrature d'une figure bornée par une seule courbe ne sçauroit estre indefinie sans estre generale, je n'entendois pas une quadrature comme vous en donnés qui n'admet point de quadratrice geometrique et qui n'est pas continuelle ou uniforme par tout, quoyqu'elle ait lieu en une infinité d'endroits, mais telle que M. de Tschirnhaus avoit donnée pour la lunule, et la raison est manifeste. Par exemple supposé qu'AD(D) (fig. 51) soit une droite, si on peut trouver la quadrature indefinie de toute portion CD(D)(C)C on pourra ainsi trouver la quadrature generale de toute autre portion produite par une autre maniere de couper; mais si AD(D) estoit une courbe, cela ne s'ensuit point.

J'avois trouvé le theoreme des tangentes par les foyers, avant M. Fatio, mais il l'a publié avant moy. Ma voye a cela de particulier, qu'elle le donne par une simple vue d'esprit sans s'embarasser de calcul ny de figures. Mais vostre enuntiation le porte bien plus loin. Il seroit bon de voir si cette même voye y pourroit servir. Je me souviens d'y avoir vû quelque jour autres fois, mais je ne sçaurois retrouver d'abord mes brouillons, ny rentrer dans ces speculations.

Ce que vous dites, Monsieur, sur mon raisonnement de la force me paroist subtil, et je me reserve aussi de le bien approfondir. Il semble, que vous changés un peu de langage. La question reduite à la practique, pour se degager des varietés de l'expression pourra estre conçue ainsi: soyent deux globes pesans, durs et elastiques, A et B, qui doivent concourir directement dans un plan horizontal, soit la vistesse d'A avant le choc c, apres (c), et celle de B avant le choc v, apres (v), selon Descartes Ac + Bv doit estre égal à A(c) et B(v), c'est ce qu'on appelle la quantité de mouvement. Pour moy je nie que cela peut tousjours reussir et au lieu de cela, prenons les hauteurs aux quelles les corps pourroient monter en vertu de leur vistesses, et soit celle d'A avant le choc h, apres (h) et celle de B avant le choc t, apres (t), je dis que tousjours Ah + Bt sera egal à A(h) + B(t). J'appelle cela la conservation de la même quantité de la force, parce que j'estime la force par l'effect qu'elle peut produire en se consumant. Mais sans disputer sur le langage, je voudrois sçavoir, Monsieur, si vous estes pour mon equation, ou pour celle de Descartes. Je crois de pouvoir prouver que, si la regle de Descartes a lieu, on pourra parvenir au mouvement perpetuel. Vous proposés l'experience suivante à faire pour mieux decider nostre controverse: Supposons qu'un corps de 4 livres tombe d'une hauteur d'un pied sur un bras d'une balance dont l'autre bras seroit chargé d'un poids soutenu et que cette cheute puisse soulever ce poids; On demande de quelle hauteur devroit tomber un poids d'une livre, pour soulever le même poids. Et vous croyés, Monsieur, que ce poids d'une livre devroit tomber de 16 pieds. C'est à peu pres la question agitée entre M. Gassendi et le P. Cazré. Voicy mon sentiment la dessus. Je dis que toute cheute de tout poids, quelque petit qu'il soit, eléve toute pesanteur soutenue, quelque grande qu'elle soit, mais plus ou moins notablement selon la grandeur de la cheute, et du poids qui tombe. Un poids p tombant de la hauteur q et et elevant le poids r à la hauteur s, il y aura equation entre pq et rs, ou bien les poids seront reciproquement comme les hauteurs. Ainsi pour declarer l'experience en sorte qu'elle soit faisable, il faudra voir de quelle hauteur doit tomber le poids d'une livre, pour soulever le troisieme poids aussi haut que celuy de 4 livres, tombant d'un pied, l'avoit soulevé; et en ce cas je tiens qu'il suffira que celuy d'une livre tombe de 4 pieds de hauteur, et non pas de 16, comme vous le jugés, Monsieur, et je ne doute point, s'il tomboit de 16 pieds, qu'il n'elevât le troisieme poids beaucoup plus haut, et presque au quadruple. Pour compter toute la hauteur de la cheute, il faut prendre non seulement la hauteur jusqu'à la balance, mais encor combien le poids apres avoir atteint la balance, descend pour soulever l'autre. Au lieu d'un poids on pourroit prendre quelque matiere elastique, et je soutiens que quatre livres tombant d'un pied et une livre tombant de quatre pieds donneront le même degré de tension ou de compression. Et pour mettre à part la consideration de la pesanteur, je dis que deux corps semblables allant sur un plan horizontal A 4 avec la vistesse 1, et B 1 avec la vistesse 2, et recontrant le même ressort d'une même façon luy donneront le meme degré de tension ou de compression, les forces de ces deux corps estant egales à cause que les cheutes qui les ont produites sont reciproques aux corps.

P. S. Il y a plusieurs mois que j'avois envoyé à Mons. Pelisson ma regle generale de la composition des mouvemens, dont j'avois tiré ma regle des Tangentes par les foyers, à dessein de la faire mettre dans le Journal des Sçavans. Mais comme sa mort est survenu, je l'ay envoyé depuis peu tout de nouveau. La voicy en peu de mots. Si un mobile a plusieurs tendences, je suppose qu'elles reussissent toutes à la fois comme si le mobile se partageoit egalement entre elles, gardant le même progrés, c'est à dire allant d'autant plus loin, qu'il est devenu plus petit par le partage. Et le mouvement composé et veritable du mobile sera le même avec celuy du centre de gravité des partages. Or quand le style est tiré par plusieurs filets, il est tiré egalement par chacun; et la direction composée du style est dans la perpendiculaire à la courbe qu'il décrit. Si les filets ne faisoient point un filet continué, mais estoient tirés par des poids a part, ou si les filets mêmes avoient de la pesanteur, ou si on concevoit quelque autre maniere de varier les forces qui tirent le style, la même methode aura tousjours lieu, et je souhaitterois que le theoreme general, comme vous l'avés conçû, Monsieur, pût estre transferé à la mecanique ou au mouvement propre à décrire la courbe. On pourra aussi concevoir des poids suspendus au lieu des foyers, et même des courbes mobiles, au lieu des courbes fixes d'evolution.

J'adjouteray un mot touchant vostre egalité des segmens de la conique. Puisque nous y avons la comparaison des secteurs, je conçois, que toutes les fois, que les triangles des secteurs comparables ont entre eux la même raison que les secteurs. Il s'ensuit la comparaison des segmens. Et le même a lieu en d'autres retranchemens. Mais s'il y avoit quelque comparaison primitive des segmens non tirée de celle des secteurs, on pourroit esperer d'en tirer quelques quadratures particulieres. La comparaison des portions dans les Coniques à centre (ou nonquadrables) vient de la correspondance qu'il y a entre les aires du cercle et les angles, et entre les aires de l'hyperbole et les logarithmes. S'il y avoit une methode de comparer ensemble des portions d'une même figure à l'egard de toute sorte de courbes, elle seroit fort à estimer. J'entends des portions comprises de droites et d'une seule courbe.

IX.

Leibniz an de l'Hospital.

(Im Auszuge.)

$\frac{6}{16}$ Aoust 1694.

Je croy que le R. P. Malebranche a raison de dire que nostre ame ne sçauroit avoir d'autre objet immediat externe que Dieu seul. Cependant je ne voudrois pas dire pour cela que nous voyons tout en Dieu. C'est comme si on disoit que les yeux voyent les objets dans les rayons du soleil. Mais comme ce n'est qu'une dispute sur la phrase, on peut permettre à chacun de s'expliquer comme il le trouve le plus à propos.

X.

De l'Hospital an Leibniz.

A St. André ce dernier novembre 1694.

Je ne viens que de recevoir, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 16e aoust. La raison de ce retardement est que je suis depuis quelque temps en des terres en Dauphiné eloignées de tout commerce, dont j'ai herité par la mort de Mr. le comte d'Autremonts, oncle de ma femme. Il nous a laissé un bien considerable et fort embarassé; ce qui m'a jetté dans beaucoup d'affaires qui ne sont gueres conformes à mon humeur, mais auxquelles il faut se donner tout entier pour en pouvoir sortir, et goûter ensuitte le repos. C'est ce qui m'a empesché d'entretenir le commerce que vous aviez bien voulu lier avec moi, qui ne pouvoit m'être que tres avantageux. Je n'ai receu aussi depuis fort longtemps qu'une seule lettre de Mr. Hugens qui ne me parle point de ce que vous me mandez.

Je suis ravi de la resolution que vous avez prise de nous donner un ouvrage sur vôtre nouvelle analyse que je souhaitois il y a longtemps et voyant que vos occupations ne sembloient pas vous le permettre j'avois composé quelques cahiers sur ce sujet dont voici l'origine. Il y a environ six ans que les Actes de Leipsic m'etant tombés entre les mains, j'y ai trouvé vôtre methode des tangentes, qui me plût si fort que je composai des ce temps quelques ecrits, ou je l'expliquois plus au long, et je donnois les demonstrations de toutes les regles. Je les communiquai à quelques uns de mes amis, et entr'autres au R. Pr. Malebranche qui en furent tres-contents, et qui me presserent même fort des ce temps de les faire imprimer. Ils en parlerent à Mr. l'abbé Catelan qui etoit de nos amis communs (c'est l'autheur de l'objection du Journal des Sçavans dont vous me demandez le nom) et qui eût à cet egard un procedé tres irregulier comme vous allez voir. Car ayant eu envie de me prevenir, sans en parler à qui que ce soit, il composa un petit livre sur ce sujet qui a paru sous le nom de Science generale des lignes courbes, et bien loin de vous y rendre justice il a deguisé vôtre methode et sans vous citer en aucun endroit il en a donné une comme de lui qu'il pretend n'etre qu'une suitte de celle de Mr. Descartes. Je vous avoue que ce procedé me déplut, et qu'ayant parcouru ce livre et l'ayant trouvé rempli de fautes considerables, je fis imprimer une lettre dans laquelle j'en marquai quelques unes des plus apparentes, et je fis voir que cette methode etant bien entendue n'etoit autre que celle que Mr. Barrow avoit donnée dans ses Leçons geometriques, et qu'à l'égard des incommensurables ou il l'avoit étendue, cela vous etoit entierement dû, et je citai les Actes de Leipsic ou vous en aviez donné les elemens. Je fis voir aussi qu'ayant voulu déguiser cette methode et en rapporter la gloire à Mr. Descartes, il l'avoit presque entierement gâtée, et lui avoit quasi ôté toute son universalité. Mr. l'abbé C. voyant bien que j'avois raison prit le parti d'interrompre la vente de son livre, dont il n'y avoit que dix ou douze exemplaires de distribués, et d'y corriger toutes les fautes que je lui avois marquées, en le remplissant de cartons, apres quoi il le fit distribuer de nouveau. Il fit ensuitte une reponse a ma lettre, dans laquelle il dit entr'autres choses qu'il s'etoit glissé a la verité quelques fautes d'impression dans les premiers exemplaires qu'on avoit distribuez, mais que son attention a les corriger dans ceux qui restoient n'avoit pas laissé la moindre faute ou l'on pût trouver a redire. Il y maltraitoit aussi fort le calcul differentiel, et pretendoit que par sa methode qu'il dit toujours être une suitte de celle de Mr. Descartes, il pouvoit resoudre toutes les questions ou l'on se sert de ce calcul. Cette reponse donna occasion a une replique de ma part, ou apres avoir fait voir toutes les corrections qu'il avoit faites a son livre et qui etoient des fautes essentielles, je m'attachai a ces derniers exemplaires qu'il disoit être si corrects, je lui marquai cinq fautes tres grossieres dans lesquelles il etoit tombé, et pour faire voir au public qu'il n'etoit pas si habile qu'il le vouloit persuader, je lui proposai le probleme de Mr. de Beaune. Le parti qu'il prit en ce rencontre fut de supprimer entierement son livre, voyant bien qu'il ne pouvoit pas corriger toutes les fautes dont il etoit rempli, mais il fit mettre dans nos Journaux des Sçavans sa nouvelle methode pour en prendre date, disoit il, parcequ'il y avoit un homme par le monde qui peu s'en falloit qu'il ne se l'attribuât. Cela m'obligea de faire mettre aussi quelque chose dans les Journaux des Sçavans pour faire voir a ceux qui n'avoient point vû les ecrits dont je viens de vous parler que cette methode avoit été corrigée sur les fautes qu'on lui avoit marquées, et que bien loin de s'en attribuer la gloire comme il sembloit le vouloir insinuer, on le faisoit ressouvenir qu'on lui avoit déja fait connoître que ce qu'il y avoit de bon vous étoit entierement dû. Il est a remarquer que tous ces petits ecrits, et ce que j'ai fait mettre dans les Journaux des Sçavans n'a point été sous mon nom, mais sous celui de M. G***. Cela lui ferma enfin la bouche, mais il a toujours tâché depuis de trouver a redire a ce qui venoit de moi, et c'est je crois ce qui l'a poussé a faire l'objection dont vous me parlez, et dans laquelle il cite le journal ou il a fait mettre sa pretendue methode. J'oubliois encore a vous dire qu'il a promis dès le temps qu'il supprima son livre de donner au public une edition in 4. de ce même livre, dans laquelle il pretendoit expliquer a fond toutes ces matieres. J'ai crû qu'il étoit bon que vous fussiez informé de tout ceci.

Vous sçaurez aussi, Monsieur, qu'etant sur le point de partir de Paris, le P. Malebranche qui avoit entre ses mains un petit traité des sections coniques que j'ai composé il y a longtemps, avec ces cahiers du calcul differentiel, me pressa fort de lui permettre qu'il le fit imprimer et qu'il y ajoutât a la fin ce que j'avois fait sur le calcul differentiel, et ne pouvant m'en deffendre je le laissai le maître de faire ce qu'il lui plairoit, prevoyant bien que de longtemps mes affaires ne me permettroient pas de pouvoir mettre en ordre les vûes que j'avois sur l'inverse de ce calcul. J'attens de vous une reponse sur ceci au plûtost pour sçavoir si vous trouvez bon que cela paroisse, car je le supprimerai entierement si vous le juges a propos. Au reste il n'y a precisement que ce qui regarde le calcul differentiel et je ne touche en aucune sorte l'inverse de ce calcul qui est cependant ce qu'il y a de plus considerable, ainsi cela ne doit point vous empescher de faire imprimer vôtre livre, mais au contraire il me semble que cela pourra servir pour l'entendre plus aisement, et pour vous dispenser d'expliquer si en détail ce qui regarde le calcul differentiel. Je ne manquerai pas non plus si vous trouvez bon que cela s'imprime de marquer dans la preface que vous étes sur le point de donner au public toutes vos inventions sur ces matieres, et que ce que je donne ne doit etre consideré que comme une introduction à vôtre ouvrage.

Je voudrois bien pouvoir vous communiquer quelque chose sur l'inverse des tangentes qui pût vous plaire, mais outre que je n'ai point ici mes papiers, je suis de plus si fort occupé a d'autres affaires que cela ne m'est pas possible pour le present, d'ailleurs je suis persuadé que je ne vous dirois rien de nouveau, et que je n'ai fait qu'effleurer ces matieres en comparaison de vous. Voici cependant une question en ce genre qu'on m'avoit proposée autre fois et dont je n'avois pû alors trouver la solution.

On demande la courbe qui a pour soutangente $\sqrt{ay+xx}$ (l'abcisse est x et l'appliquée y) c'est a dire qui a pour equation differentielle $y\,dx = dy\sqrt{ay+xx}$. Je fais $ay + xx = mm$, afin d'ôter les incommensurables, et je trouve en prenant les differences $dy = \frac{2m\,dm - 2x\,dx}{a}$, ce qui etant substitué dans l'equation precedente avec la valeur de y me donne $2mm\,dm - 2mx\,dx = mm\,dx - xx\,dx$. Je fais $m = zx$, et j'ai $dm = x\,dz + z\,dx$, ce qui me donne $\frac{2zz\,dz}{2z - 2z^3 + zz - 1} = \frac{dx}{x}$, ou les indeterminées avec leur differences sont separées, de sorte qu'il est alors aisé de construire la courbe en supposant les quadratures. Il est a remarquer que cette supposition reussit toujours lorsque les in determinées ont un nombre égal de dimensions dans chaque terme étant jointes ou separées. Vous sçavez apparemment mieux que moi que lorsque l'expression de l'appliquée du cercle ou de l'hyperbole $\sqrt{aa-xx}$ et $\sqrt{xx-aa}$ ou une de ses puissances, se trouve multipliée par dx et par une quantité complexe ou il n'entre que l'indeterminée x avec des parametres, on peut toujours ou en prendre absolument la somme ou qu'elle depend en partie de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. Je vous enverrai si vous le souhaitez la maniere dont j'ai trouvé la solution du probleme de Mr. Bernoulli,*) elle contient quelque chose d'assez singulier parceque j'y resoud une égalité du second degré dont la difference dx est l'inconnue et que j'ai besoin ensuitte de faire diverses suppositions tant pour separer les indeterminées que pour ôter les incommensurables, et qu'on peut par ce même artifice resoudre plusieurs autres questions semblables. J'ai trouvé aussi que dans le point d'inflexion contraire, la raison du cercle baisant n'est pas toujours infini, mais qu'il y a une infinité de lignes ou il est nul; de sorte que dans ce point ddy peut être infiniment grand aussi bien que zero.

Au reste j'ai eu occasion de parcourir le petit traité de Mr. Craige dont vous me parlez, et j'en fais le même jugement que vous; car non seulement on peut aller beaucoup plus loin, mais même les quadratures qu'il donne se peuvent trouver bien plus aisement, en cherchant simplement les sommes et sans avoir besoin de se servir d'aucun theoreme, ni faire les comparaisons qu'il enseigne pour trouver les coefficiens qui menent souvent a des calculs penibles. Je trouve aussi qu'il n'a pas trop bien entendu votre methode des tangentes puisqu'il pretend qu'elle ne s'etend pas aux lignes transcendantes, car je fais voir par plusieurs exemples assez composez dans le petit traité dont je

---

*) De l'Hospital meint wahrscheinlich die Aufgabe, die Joh. Bernoulli im Jahre 1693 zur Lösung vorlegte: Eine krumme Linie der Art zu finden, dass ihre von der Axe begränzten Tangenten zu den zwischen der krummen Linie und diesen Tangenten enthaltenen Theilen der Axe ein gegebenes Verhältniss haben. — Die Auflösung de l'Hospital's findet sich in einem Briefe an Hugens von 28. Sept. 1693. Siehe Christ. Hugen. aliorumque seculi XVII virorum exercitationes etc. ed. Uylenbroek. Tom I. p. 290 ff.

vous ai parlé, qu'elle embrasse toutes ces lignes, et qu'elle est la plus generale et la plus simple qu'on puisse souhaiter. Il me semble aussi comme a vous qu'il traite trop mal Mr. Tschirnhaus, car bien que cet autheur se soit trompé assez souvent dans ce qu'il a donné, on ne laisse pas d'y entrevoir beaucoup d'étendue d'esprit, et qu'il auroit été loin s'il avoit suivi vos methodes. Il est vrai qu'il parle trop avantageusement de ses inventions, et qu'il promet beaucoup et même plus, a ce que je crois qu'il ne peut executer; car il pretend par exemple qu'il a une demonstration exacte de l'impossibilité absolue de la quadrature du cerle non seulement indefinie, mais de chaque segment en particulier, et il pretend aussi avoir une methode generale pour trouver toujours ces quadratures particulieres ou pour en demontrer l'impossibilité.

A l'egard de la ligne que vous appellez isochrone paracentrique, je suis bien aise qu'on en ait enfin trouvé la solution, mais comme mon éloignement de Paris m'a empesché de voir les Actes de Leipsic, je n'en puis encore juger. Il me paroît par ce que vous me mandez que la vôtre sera beaucoup plus simple et plus generale que celle de Mr. Bernoulli, puisque vous trouvez qu'il y en a une infinité ou il n'en trouve qu'une seule, et que vous vous servez de la rectification d'une courbe algebraique lorsqu'il en employe une transcendante.

Je suis fort aise que vôtre machine arithmetique soit enfin executée, et qu'elle reussisse de la maniere que vous me marquez. N'y auroit il point moyen d'en faire une semblable? et de la faire ensuitte venir a Paris. Si vous vouliez bien y donner vos soins, et que cela se pût aisement, vous me feriez un vrai plaisir. Je donnerois a Mr. l'Envoyé l'argent qui seroit necessaire et que vous auriez la bonté de me marquer. Le même ouvrier qui a executé la vôtre pouvoit faire encore celle ci, et je voudrois bien qu'il y employât tout le temps, et qu'il y prit toute la peine requise pour qu'elle fût dans la perfection.

Voila enfin le differend du R. P. Malebranche et de Mr. Arnaud terminé par la mort de ce dernier. Je n'ai jamais aprouvé leur maniere décrire qui m'a paru trop forte pour des personnes de ce caractere, j'ai fort connu autre fois Mr. Arnaud pendant qu'il etoit a Paris, et j'avois conceu pour lui une estime tres particuliere.

Je vois, Monsieur, que vos occupations ordinaires ne vous ont pas empesché de vous appliquer à la metaphisique, de sorte qu'on peut dire que vous excellez dans toutes les sciences, celle ci est bien differente des mathematiques, l'imagination n'y ayant point de part. Au reste je crois qu'on doit vous prier d'inserer dans vôtre livre ce que vous avés trouvé sur la Characteristica situs, ce sera une chose toute nouvelle et qui pourra être fort utile. Je suis avec beaucoup d'empressement, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

XI.

Leibniz an de l'Hospital.

27 Novembr.*) 1694.

Un bon heritage vaut mieux que le plus joli probleme de Geometrie, parce qu'il tient lieu de methode generale, et sert à resoudre bien des problemes. Je vous plaindrois, Monsieur, si la succession que vous venés de recueillir, vous detournoit pour tousjours de vos excellentes meditations, mais comme ce n'est qu'un empechement passager, je vous en felicite.

Quoyque j'aye dessein de composer quelque chose sur nostre nouveau calcul et autres matieres connexes, sous le titre de la Science de l'infini, je n'y suis pas pourtant fort avancé, et j'ay de la matiere sans luy avoir encor donné aucune forme. Ainsi cela ne vous doit point empecher de publier ce que vous avés projetté; et puisque le R. P. de Malebranche a tiré de vous un ecrit, dont vous luy avés laissé la disposition, et qu'il a dessein de faire imprimer, je n'ay garde de le vous dissuader et bien loin de cela je me joindrois à ce pere, pour en obtenir la permission, si elle n'avoit pas esté déja donnée. Outre le profit que le public en retire, et qui revient aussi par consequent à moy, je trouve que l'honneur que vous me faites, en voulant bien qu'on croye que mes pensées ont donné occasion à quelques unes des vostres, est d'autant plus estimable, qu'il vient d'une personne dont le temoignage peut donner du prix aux

---

*) Muss heissen: 27 Decembr. Siehe den Brief de l'Hospital's vom 2. März 1695.

choses. D'ailleurs je suis si peu versé dans mes propres methodes à cause des distractions qui m'accablent quelques fois jusqu'à donner une atteinte sensible à ma santé, que je ne me trouve gueres en estat de les mettre à profit, au lieu qu'ayant les talens extraordinaires que vous avés avec tout ce qu'il faut pour les faire valoir, vous pouvés faire un meilleur usage des remarques d'autruy que les auteurs mêmes qui n'avoient pas le secours des vostres.

Je vous ay eu aussi bien de l'obligation au sujet de M. l'Abbé Catelan, sans l'avoir sçû. Ces particularités que vous me mandés, m'estoient entierement inconnues; et je ne sçavois pas combien je devois à vostre sincerité, qui vous porte à rendre justice à tout le monde. Je voy que M. l'Abbé Catelan ne prend pas le chemin de la veritable gloire, et que sa politique n'a pas esté meilleure que son analyse. Il y a tant de pays à defricher ou l'on ne sçauroit manquer de faire des decouvertes aussi belles qu'utiles pour peu qu'on s'applique, que je m'etonne que des personnes qui ne manquent pas d'habilité s'amusent à ces voyes indirectes. Monsieur des Cartes estoit grand homme, mais de vouloir que tout ce qui se decouvre est une suite des decouvertes de cet auteur, c'est vouloir que toute la mathematique est comprise dans les Elemens d'Euclide. Il y a tant de choses dans l'Analyse qu'il ne sçavoit point, et que nous ne sçavons pas encor non plus avec toutes nos methodes, qu'il faut estre peu versé dans ces matieres pour prendre à la lettre ce que M. des Cartes a dit quelque part avec un peu trop de presomtion, qu'il a donné le moyen de resoudre tous les problemes de Geometrie et qu'il s'est abstenu d'en dire d'avantage, pour laisser encor aux autres le plaisir d'inventer quelque chose.

Je voy que je n'ay gueres besoin de vous expliquer aucune chose, je me souviens par exemple de vous avoir dit que lorsque les inconnues absolues ou ordinaires x et y remplissent de leur chef les loix des homogenes, il y a moyen de reduire l'equation differentielle aux quadratures, et je voy maintenant que vous avés trouvé cette reduction de vous mêmes, aussi bien que les reductions à la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole dans les quadratures de la nature de celles dont vous parlés. Je crois qu'avec l'application convenable on viendroit à bout de l'inverse des tangentes, j'ay des commencemens qui paroissent d'autant plus considerables qu'ils ambrassent de ces assez generaux et peuvent estre poussés plus loin: Soit $m+ny+dy:dx = 0$, ou m et n signifient des formules rationelles, ou irrationelles mais qui ne dependent que de la seule indeterminée x, je dis qu'on la peut resoudre generalement par $\int mpdx + py = 0$, posito $\int dp:p = \int ndx$. Nam differentiando fit $mpdx + ydp + pdy = 0$, sed $dp = pndx$, ergo fit $mpdx + npydx + pdy = 0$ seu $mdx + nydx + dy = 0$, ut desiderabatur.

Si vous voulés avoir la bonté de me communiquer quelques unes de vos analyses (par exemple celle du probleme de M. Bernoulli que vous m'offrés) je les feray entrer avec vostre permission dans le livre que je projette. La remarque du cercle baisant evanouissant quelques fois dans le cas d'inflexion contraire (la ligne generatrice par evolution tombant ainsi dans le point meme de la courbe) me paroist tres belle. Le probleme de M. Bernoulli et tous ceux ou la raison des fonctions est donnée ou constante, donnent des equations differentielles traitables, c'est à dire ou les deux indeterminées absolues (x et y) remplissent ensemble les loix des homogenes, c'est pourquoy j'ay dit dans le Journal, qu'on les peut tousjours resoudre.

Le probleme de l'isochrone paracentrique estoit en mon pouvoir il y a long temps; comme je croy vous avoir marqué autres fois. Mais j'avois egaré le papier et ne doutant pas de le retrouver, je n'y voulois point toucher de nouveau. Je le retrouvay avant que M. Bernoulli l'avoit trouvé aussi, et je l'ay ecrit à M. Hugens. Je me sers d'une voye fort naturelle pour le reduire aux quadratures en employant pour inconnue l'eloignement du point fixe. Messieurs Bernoulli ont enfin trouvé aussi le moyen de la construire par la rectification d'une courbe Algebraique, et leur construction est meilleure que la mienne, car je m'arreste ordinairement à la premiere possibilité, au lieu que ces Messieurs ont le temps et la penetration qu'il faut pour entrer plus avant. Je trouve que M. Craig 'a aussi pensé à la construction des quadratures par les rectifications, et je croy que sa methode est la même avec celle de Messieurs Bernoulli, mais elle est assez bornée et je croy qu'on peut aller plus avant.

Monsieur Tschirnhaus m'a fait l'honneur de me rendre visite en passant icy il y a quelques mois et m'a monstré des beaux effects dont il est parlé dans les Actes de Leipzig.

Il y a deja quelques machines arrestées et mon ouvrier y travaille effectivement; mais vous serés des premiers que j'en accommoderay aussitost qu'il sera libre. Elle ne sçauroit estre en meilleurs mains.

Ma metaphysique est toute mathematique pour dire ainsi ou la pourroit devenir. Je n'ose encor publier mes projets de characteristica situs, car sans que je la rende croyable par des exemples de quelque consequence, elle passeroit pour une vision. Cependant je voy par avance qu'elle ne sçauroit manquer. Je souhaitte de pouvoir venir à l'execution, mais les meditations qui sont seches et abstraites dans leur commencemens m'echauffent trop, c'est ce qui fait qu'ayant esté plus incommode cette année, que je n'avois esté de long temps, je me force de faire abstinence, sans le pouvoir faire autant que je devrois. Plût à Dieu que je fusse quelques fois avec des personnes qui vous approchassent quand ce ne seroit que de bien loin, car une telle conversation m'encourageroit et me soulageroit merveilleusement. Mais je ne l'espere gueres, et cela me fera perdre bien des veues qui seroient peut estre de quelque usage avec le temps si des personnes plus penetrantes que je ne suis, les approfondissoient un jour et joignoient la beauté de leur esprit au travail du mien. Pour vous, Monsieur, vous n'avés besoin de qui que ce soit et vous estes en estat d'aller bien loin: je vous souhaitte pour longues années la santé et le contentement qu'il faut avoir pour faire des choses grandes et belles. Hoc omine finio. C'est ainsi que je finis cette année estant avec zele etc.

Vorstehenden Brief scheint Leibniz in anderer Fassung abgeschickt zu haben. Das Folgende ist wahrscheinlich ein Bruchstück der spätern Umarbeitung:

La Methode dont je me suis servi est expliquée dans le billet cy joint, car outre qu'on ne doit point faire mystere de telles choses à une personne de....*) merite, je suis presque hors d'estat de poursuivre mes methodes, parcequ'il n'y a personne icy ny dans le voisinage, avec que j'en puisse communiquer, au lieu qu'à Paris il est aisé non seulement de trouver des amis habiles, mais aussi d'avoir des persones dont........ sou-

*) Unleserliches Wort; ebenso in den folgenden Lücken.

lage dans le calcul. Il est surtout aisé à vous, Monsieur, d'avoir ces sortes d'assistances. J'ay deja ... cette Methode à des equations differentielles ou dy demeure simple et y arrive au quarré, mais ne le passe point, sans avoir egard à x et je voy qu'on peut aller plus loin. Si vous m'y vouliés faire assister, vous me mettries en estat de rendre mon ouvrage plus considerable et le public vous auroit l'obligation de l'avancement de la science. Les calculs ne sont pas des plus penibles, mais tels qu'ils sont ils me coutent trop dans l'estat ou ma santé se trouve. S'il se rencontroit quelle difficulté, je contribuerois à la faire lever autant qu'il dependroit de moy.

Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes. Je ne connoissois au commencement que les indivisibles de Cavalleri et les Ductus du P. Gregorie de S. Vincent, avec la Synopsis Geometrica du P. Fabri et ce qui se peut tirer de ces auteurs ou leur semblables. Lorsque M. Hugens me presta les lettres de Dettonville ou de M. Pascal, j'examinay par hazard sa demonstration de la mesure de la superficie spherique et j'y trouvay une lumiere que l'auteur n'avoit point veue, car je remarquay generalement que par la même raison, la perpendiculaire quelconque PC (fig. 52) appliquée à l'axe ou transferée en BE donne une ligne FE telle que l'aire de la figure FABEF fournit explanation de la surface faite par la rotation d'AE à l'entour d'AB. Mons. Hugens fut surpris quand je luy parlay de ce theoreme et m'avoua que c'estoit justement celuy dont il s'estoit servi pour la surface du conoide parabolique, mais comme cela me faisoit connoistre l'usage de ce que j'appelle le triangle caracteristique CFG composé des elemens des coordonnées et de la courbe, je trouvay comme dans un clin d'oeil presque tous les theoremes que je remarquay depuis chez Messieurs Gregory et Barrow sur ce sujet. Jusqu'alors je n'estois pas encor assez versé dans le calcul de M. des Cartes et ne me servois pas encor des equations pour expliquer la nature des lignes courbes, mais sur ce que M. Hugens m'en disoit, je m'y mis et ne m'en repentis point, car cela me donna moyen de trouver bientost mon calcul differentiel. Voicy comment. J'avois pris plaisir long temps auparavant de chercher les sommes des series des nombres, et je m'estois servi pour cela des differences sur un theoreme assez connu qu'une serie decroissant à l'infini son premier terme est egal à la somme de toutes les differences. Cela m'avoit donné ce que j'appellois le Triangle Harmonique, opposé au Triangle Arithmetique de M. Pascal, car M. Pascal avoit monstré comment on peut donner les sommes des nombres figurés, qui proviennent en cherchant les sommes et les sommes des sommes de la progression arithmetique naturelle; et moy je trouvay que les fractions des nombres figurés sont les differences et les differences des differences etc. de la progression harmonique naturelle (c'est à dire des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.) et qu'ainsi on peut donner les sommes des series des fractions figurées, comme $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ etc. et $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ etc. Reconnoissant donc cette grande utilité des differences et voyant que par le calcul de M. des Cartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre chose que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la difference est proportionelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientost que trouver les tangentes n'est autre chose que differentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourveu qu'on suppose les differences incomparablement petites. Je vis aussi que necessairement les grandeurs differentielles se trouvent hors de la fraction et hors du vinculum et qu'ainsi on peut donner les tangentes sans se mettre en peine des irrationnelles et des fractions. Et voila l'histoire de l'origine de ma methode. Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Hugens et à l'egard des series infinies à M. Newton, j'en aurois fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avois puisé. Pour l'inverse c'est à dire pour trouver une formule ou equation absolue, dont on pourroit tirer une differentielle proposée, ou pour trouver une ordonnée dont la difference soit donnée, j'emploiay des formules generales ce que M. Tschirnhaus fit aussi depuis pour les quadratures ordinaires. Mais il me semble qu'il ne s'y est pas assez bien pris encor non plus que M. Craig qui s'est aussi trop borné. Mons. le professeur Bernoulli paroist mepriser ces formules generales pour l'inverse des tangentes, cependant vous verrés, Monsieur, par le papier cy joint, que j'ay trouvé par là des theoremes dont j'ay parlé.

Pro Methodo Tangentium inversa specimen.

Incipiamus ab Aequationibus differentialibus ubi $dy : dx$ non assurgit ultra primum seu simplicem gradum, qualis aequatio generaliter sic exprimi potest $b\,dx + c\,dy$, posito b et c haberi per x et y utcunque. Sit quaesita aequatio $m = 0$, ita ut m similiter habeatur per x et y quomodocunque. Hanc differentiando fiet $\delta m\,dx + \vartheta m\,dy = 0$. Ergo fiet $b : c = \delta m : \vartheta m$, seu $b \vartheta m = c \delta m$. Ponamus jam b, c, m esse formulas rationales integras, finitas, secundum y, et b esse $10 + 11y + 12yy + 13y^3 + 14y^4$ etc. continuando pro re nata, et similer c esse $20 + 21y + 22yy + 23y^3$ etc. et m esse $30 + 31y + 32yy + 33y^3$ etc. $= 0$, ipsis 10, 11, 12 etc. 20, 21, 22 etc. 30, 31, 32 etc. significantibus quantitates ab x utcunque dependentes, rationales an irrationales, nil refert. Erit δm *) $= d30 + d31 \,.\, y + d32 \,.\, yy + d33 \,.\, y^3$ etc. et $\vartheta m = 1 \,.\, 31 + 2 \,.\, 32y + 3 \,.\, 33yy$ etc. ubi numeri 10, 11 etc. 20, 21 etc. 30, 31 etc. sunt fictitii seu supposititii, quos literarum loco adhibeo, ordinis et lucis causa, indicantque etiam virtualem quandam legem homogeneorum, hoc observato, quod nota dextra numeri supposititii significat quantitatem cujus gradus sit, quem denotat ipsa nota affecta signo —, ita 32 ejusdem est gradus cum a^{-2} seu cum $1 : aa$. At d semper de gradu detrahit unitatem, itaque $d32$ ejusdem est gradus cum a^{-3} seu cum $\frac{1}{a^3}$ vel ut scribere soleo, cum $1 : a^3$, itaque $32yy$ et $33y^3$ etc. omnes sunt ejusdem gradus, nempe cujus exponens est 0, quasi $y : a$. Sed hoc obiter, tametsi ejus consideratio et in his usum habeat. Explicemus jam aequationem $b \vartheta m - c \delta m = 0$, et prodibit aequatio magna pro re nata producenda,

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllll}
+ 20d30 & + 20d31y & + 20d32yy & + 20d33y^3 & \\
 & 21d30 \,.\,. & 21d31 \,.\,. & 21d32 \,.\,. & \\
 & & 22d30 \,.\,. & 22d31 \,.\,. & \text{etc.} \\
 & & & 23d30 \,.\,. & \\
- 10.31 & - 2.10.32 \,.\,. & - 3.10.33 \,.\,. & - 4.10.34 \,.\,. & \\
 & 1.11.31 \,.\,. & 2.11.32 \,.\,. & 3.11.33 \,.\,. & \\
 & & 1.12.31 \,.\,. & 2.12.32 \,.\,. & \\
 & & & 1.13.31 \,.\,. &
\end{array} \right.$$

Unde facile patet modus continuandi utcunque, numeri autem 1, 2, 3 etc. sunt veri, caeteri supposititii. Sit jam aequatio differen-

*) Siehe den Brief de l'Hospital's vom 2. März 1695.

tialis data resolvenda 10 dx + 11 y dx + dy = 0, ita ut 12, 13 etc. et 21, 22 etc. evanescant, et 20 sit = unitati seu cuicunque constanti, quod semper fieri potest, nam si fuisset 70 dx + 71 y dx + 80 dy = 0, ipsa 80 existente indeterminata seu pendente ab x, possumus dividere aequationem per 80, fiet $\frac{70}{80}\,dx + \frac{71}{80}\,y\,dx + dy = 0$ et facere 10 = 70 : 80 et 11 = 71 : 80, ut prodeat 10 dx + 11 y dx + dy = 0. His positis suffecerit etiam aequationem quaesitam poni tantum 30 + 31 y = 0, ut evanescant 32, 33 etc. Jam aequatione magna existente identica, ita ut omnes termini y^0, y^1, y^2 etc. evanescere debeant, et omnibus praeter duos ultimos per se evanescentibus supersunt pro tollendis duobus ultimis duae aequationes identificativae, et pro iis quantitates quaesitae 30 et 31. Aequationes sunt d30 — 10. 31 = 0 et d31 — 11. 31 = 0, posito 20 = 1 ex hypothesi et aliis literis evanescentibus, et fiet $\int \overline{d31:31} = \int \overline{11\,dx}$ et d30 = 10. 31 adeoque $30 = \int \overline{10.31\,dx}$. Ergo si data sit aequatio differentialis resolvenda: 10 dx + 11 y dx + dy = 0, fiet aequatio constructrix $\int \overline{10.31\,dx} + 31\,y = 0$, posito $\int \overline{d31:31} = \int \overline{11\,dx}$, quod desiderabatur. Potest fieri, ut aequatio talis sit revocabilis ad ordinarias, exempli causa sit 11 = 2 : x, fiet $31 = xx : a^3$, posito logarithmum ipsius a esse 0; sit 10 = xx + ax, : aa, vel alia ut lubet salva summabilitate, et fiet $10.31\,dx = x^4 + ax^3,\,dx : a^5$ et $\int \overline{10.31\,dx} = \frac{4x^5 + 5ax^4}{4.5a^5}$ adeoque fiet $4x^3 + 5axx + 20aay = 0$, ubi 20 est numerus verus, quae proinde aequatio satisfaciet datae $\overline{xx + aa}\,dx + \overline{2aa:x}\,y\,dx + aa\,dy = 0$, ut calculus ostendit, quanqum et aliae ei satisfacientes eodem modo reperiri possint.

Si aequatio differentialis construenda pro suo modulo generalis, fuisset 10 dx + 11 y dx + 20 dy + 21 y dy = 0 adeoque omnis aequatio differentialis, in qua nec y nec dy assurgunt ultra simplicem gradum, quicquid sit de quantitatis x habitudine, constructa habetur. Eandemque Methodum debite prosequendo assurgi potest ad altiores ipsius y potentias, imo et ipsius dy.

XII.

Leibniz an de l'Hospital.

Je vous avés écrit il y a quelques semaines pour lever les scrupules que vostre honnesteté vous avoit naistre sur la publication de vos belles decouvertes et meditations Geometriques. Et j'avois adjouté quelque essay de mes methodes de l'inverse des Tangentes. Cet essay donnoit une solution generale de la formule $dy : dx = vy + wy$ de quelque maniere que les grandeurs v et w soyent données par x, et je voy qu'on le peut pousser plus avant. Cependant comme nous ne sommes peut estre pas encor tout a fait estat de donner tousjours des solutions si generales, il sera bon de donner la Methode de determiner, s'il est possible que la ligne demandée est ordinaire ou Algebraique; et c'est à quoy cette methode nous mene tousjours par une voye asseurée. Mais comme je ne suis pas à present en estat de travailler et ne trouve personne dans ces pays qui m'y puisse aider, j'ay cru qu'on en trouveroit plus aisement à Paris et que vous pourriés et voudriés bien me procurer quelque assistance, puisqu'il y a apparemment chez vous des gens capables de calculer qui ne le refuseroient pas. Comme en effect je ne ferois aucune difficulté de payer leur peine, c'est ce que j'ay deja insinué dans ma precedente.

Il s'agit donc generalement de reduire les equations differentielles aux ordinaires, si cela est possible. Commençons par les plus simples, ou il s'agit des quadratures, c'est à dire où l'une des differentielles se trouve sans sa grandeur absolue. Et au lieu de $dy : dx$ mettons maintenant $e : a$, or l'affaire est vuidée lorsqu'il y a $e + 11 = 0$ supposé que le nombre 11 signifie une formule rationelle donnée par x. J'appelle rationelles, ou l'indeterminée x n'entre pas dans le vinculum. Allons maintenant au cas suivant ou il y a $ee + 11 e + 12 = 0$ (1). Il s'agit de trouver $yy + 21 y + 22 = 0$ (2) car il est aisé de demonstrer qu'il est impossible que la grandeur y puisse monter plus haut que celle d'e. Je me sers des nombres au lieu des lettres parce que la note dextre me fait observer la loy des homogenes et la sinistre pour discerner les quantités qui sont icy données ou cherchées. On peut pourtant se servir des lettres lorsque le nombre n'est pas fort grand, comme en effect il ne l'est pas trop dans l'exemple present. On peut maintenant differentier cette equation cherchée, et il proviendra $2ye + 21e + yd21 + d22 = 0$ (3) ou bien $e = - ad21, y - ad22,:, 2y + 21$ (4) donc par (2) et (4) nous aurons

$$\left.\begin{array}{llll} + d21\,d21\,aayy & + 2d21\,d22\,aay & + d22\,d22\,aa \\ - 2d21\,11\,a\,.. & - 2.11\,d22\,a\,.. & \\ & - 11\,21\,d21\,.. & - 11.21\,d22\,a \\ + 4.12\,.. & + 4.12.21\,.. & + 12.21.21 \end{array}\right\} = 0 \quad (5)$$

donc l'equation

$$\left.\begin{array}{llll} + d21\,d21\,aayy & + 21\,d21\,d21\,aay & + d21\,d21.22 \\ - 2.11\,d21\,a\,.. & - 2.11\,21\,d21\,a\,.. & - 2.11\,d21.22 \\ + 4.12\,.. & + 4.12.21\,.. & + 4.12.22 \end{array}\right\} = 0 \quad (6)$$

(qui provient par la multiplication de l'equation (2)) doit estre coincidente avec l'equation (5). Il faut donc comparer ou coincidentier le second et le 3me terme, et la comparation des seconds termes donnera l'equation (6) et celle des troisiemes termes donnera l'equation (7).

Mais on dira que ces Equations sont autant ou plus difficiles à resoudre, que la quadrature proposée, d'autant que ces deux inconnues sont enveloppées de differentielles; et c'est apparemment aussi ce qui a empeché l'usage de cette Methode. A cela je reponds qu'on peut remedier à ces difficultés. Et pour cela je donneray premierement la Methode Generale de reduire plusieurs equations de differentes inconnues bien que differentiellement enveloppées à une seule, et par apres, je diray comment on pourra resoudre la derniere Equation qui n'a qu'une inconnue seule. Quant au premier point, c'est à dire quant à cette Methode generale, voicy en quoy elle consiste. Considerons les deux equations (6) et (7). L'equation (6) donne la valeur de d22, laquelle estant substituée dans l'equation (7), nous aurons l'equation (8) qui ne contiendra que 21, 22, et d21, et fournira la valeur de 22, laquelle estant differentiée, nous aurons l'equation (9) qui donnera une nouvelle valeur de d22, laquelle comparée avec celle de l'equation (6), nous aurons l'equation (10), dans laquelle il y aura la seule inconnue 21 avec ses affections d21 et dd21. Maintenant au lieu de la demandée 21, on mettra $m : n$ seu $\frac{m}{n}$, et au lieu de d21 il y aura $ndm - mdn, : nn$, et au lieu de dd21 il y aura $\left.\begin{array}{l} + nnddm + 2mdndn \\ - mnddn - 2ndmdn \end{array}\right\} : n^3$.

Soit 11 $=$ ap : q et 12 $=$ ar : q, car on peut tousjours supposer que ces grandeurs ont un commun denominateur, et les valeurs de 11 et 12 données et 21 avec ses affections demandées, estant substituées dans l'equation (10) et ostant les fractions on aura l'equation (11), ou il y aura p, q, r, formules rationelles entieres connues ou données et m, n, formules rationelles entieres demandées avec leur affections dm, ddm, dn, ddn. Et cette equation (11) est le Canon general, par lequel toute quadrature du degré proposé pourra estre resolue en equations ordinaires si cela est possible. Et cela est tousjours dans nostre pouvoir dont la raison est que toutes les grandeurs ne sont que des formules entieres et rationelles, qui enveloppent la seule indeterminée x. Ainsi au lieu de p, q, r mettant leur valeurs données, et au lieu de m mettant $30 + 31x + 32xx + 33x^3$ etc. et au lieu de n mettant $40 + 41x + 42xx + 43x^3$ etc. ou 30, 31, 32 etc. et 40, 41, 42 etc. sont maintenant des quantités constantes, dm sera $1.31 + 2.32x + 3.33x^2 + 4.34x^4$ etc. et ddm sera $1.2.32 + 2.3.33x + 3.4.34xx + 4.5.35x^3$ etc. et dn sera $1.41 + 2.42x + 3.43xx$ etc. et ddn sera $1.2.42 + 2.3.43x + 3.4.44xx$ etc. Et toutes ces valeurs données et demandées estant substituées dans l'equation (11) il faut qu'elle devienne identique, c'est à dire que tout y evanouisse, ce qui donnera moyen d'expliquer ou trouver les constantes 30, 31 etc. et 40, 41 etc. aussi bien que le moyen de determiner jusqu'à ou ces formules (qui sont finies) doivent estre produites. Et la prosecution de ce calcul donnera des theoremes. Il y a même plusieurs abregés avec quelques autres voyes et variations. Et cette même Methode est si generale, qu'elle peut servir à resoudre toute equation differentielle ou differentio-differentielle, et au delà s'il est possible de le faire par des equations ou lignes ordinaires. On pourra même dresser des Tables pour cet effect. Enfin je croy que c'est beaucoup, que cette Methode est maintenant si achevée, et qu'il ne s'agit plus que de la peine de calculer.

Cependant pour ce cas particulier ou pour ce degré dont il s'agit, ou il n'y a qu'ee, il y a une voye plus abregée, que voicy: Puisqu'il y a $ee + 11e + 12 = 0$ il y aura $e = \sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11 - 12} - \frac{1}{2}.11$ ou bien $y = \int \sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11 - 12} - \frac{1}{2}\int 11$, sousentendant dx une fois pour toutes mais que j'omets icy. Maintenant je suppose que la somme de la formule rationelle (11) (c'est à dire $\int 11$ ou $\int 11dx$) ou la solution des quadratures du premier degré est une affaire faite. Il ne reste donc que de trouver la somme des irrationelles comme $\sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11 + 12}$, c'est à dire des racines quarrées dont le contenu sub vinculo est une formule rationelle. Ainsi le tout se reduit à $\int \sqrt[2]{h}$, supposé que la grandeur h soit une formule rationelle par x. Ainsi commençant de nouveau soit $e = \sqrt[2]{ah}$ (1) et $e = a\,dy : dx$ (2), donc si y est trouvable en ordinaires, on peut demonstrer aisement, qu'il est permis de faire generalement $y = q\sqrt{ah} : a$ (3), ou h est une formule rationelle donnée et q une demandée. Et si cela ne reussit pas, il est impossible de trouver y en ordinaires. Differentions maintenant l'equation (3) et nous aurons $e = \frac{2h\,dq + q\,dh}{2h}\sqrt{ah}$ (4) et cette valeur devant estre coincidente avec la valeur de l'equation (1), il y aura $2h\,dq + q\,dh = 2h$ (5). Maintenant pour reduire le tout aux entieres, on n'a qu'à expliquer h donnée par $m : n$ (6) et q demandée par $p : r$ (7). Et nous aurons le canon general $npr\,dm - mpr\,dn + 2mnr\,dp - 2mnp\,dr = 2mnrr$ (8) ou les lettres ne signifient que des formules rationelles entieres. C'est pourquoy dans l'exemple donné on n'aura qu'à expliquer les valeurs des données m et n, et qu'à mettre $30 + 31x + 32xx + 33x^3$ etc. $= p$ (9) et $40 + 41x + 42xx$ etc. $= r$ (10), ou 30, 31 etc. item 40, 41 etc. sont des constantes. Et substituant ces valeurs dans le canon, ou equation (8), on trouvera s'il est possible de la rendre finie, identique, ou d'y trouver 30, 31 etc. item 40, 41, etc. par la destruction des termes, ensorte que p et r soyent des formules finies. On pourra faire encor d'autres preparatifs generaux ex consideratione rationalium et integrorum. Mais cecy peut suffire. Il seroit bon maintenant de faire comme une table de theoremes, en expliquant les données par ordre, par exemple si on faisoit $m = 10 + 11x$ et $12 = 20$ et cherchoit par cette methode la solution pour ce cas (quoyqu'il soit deja connu), puis pour le cas ou $m = 10$ $11x + 12xx$ et $n = 20 + 21x + 22xx$; et ainsi de suite, ou bien par une autre combinaison, comme le calcul monstrera estre a propos; et cette suite comprendra une series de tous les cas possibles; puisqu'en mettant quelques nombres egaux à 0, d'autres cas y seront compris. Et la Table des Theoremes donnera la regle generale pour la resolution de ce degré; autant qu'il est possible de faire par les ordinaires.

On pourra se servir de la même Methode des irrationelles lors qu'on ne passe pas e^4, ou e^4 et qu' y aussi par consequent ne passe pas y^3 ou y^4, parce qu'on peut tousjours tirer les racines des equations cubiques ou quarre-quarrées. Et cela nous peut suffire, car on a peu besoin des courbes quadratrices plus hautes. Mais si on vouloit aller plus loin, on pourroit revenir à la methode que j'ay exposée au commencement de cette lettre. Ce qui est bon aussi pour resoudre l'inverse des Tangentes dans les ordinaires. Il est vray qu'il y a d'autres voyes pour parvenir aux solutions transcendentales, mais je n'en suis pas encor assez le maistre. Je ne crois pas, Monsieur, de vous avoir decouvert beaucoup de nouveautés, car vostre penetration va bien loin. En tout cas vous voyés ma bonne volonté, et je m'assure que si vous trouvés des personnes propres à m'assister dans le detail, vous serés bien aise de le faire pour l'avancement de la Science. Je suis avec zele etc.

P. S.

Il auroit esté plus à propos dans l'equation (1) de faire $e = g\sqrt{ah} : aa$, parcequ'il peut arriver, que ce qui est compris sous le vinculum, soit un produit d'une formule extrahible, ainsi au lieu de l'equation (5) il y aura $2\,ha\,dq + qa\,dh = 2\,gh\,(dx)$, et pour former le canon, il faudroit aussi changer g donnée en k : n. Mais enfin tout revient à la même methode et le calcul monstrera le plus commode.

XIII.

Leibniz an de l'Hospital.

A Hanover $\frac{8}{18}$ Fevr. 1695.

Voicy, Monsieur, la troisième lettre sur le calcul des differences par formules generales. Et comme j'avois commencé un essay dans ma precedente, qui sera propre à donner generalement les quadratures des termes comme $h\sqrt[2]{m}$, supposé h et m formules rationelles selon x; je veux encor adjouter une meditation propre à faciliter ce calcul. Je dis donc, qu'on peut tousjours reduire la chose à la quadrature de $x^e\sqrt[2]{m}$, ou de $\frac{1}{x^e}\sqrt[2]{m}$, supposé qu'e soit un nombre rationel entier, et que la grandeur m soit donnée par une formule rationelle entiere selon x, et qui n'ait aucun diviseur quarré, et par consequent n'ait rien d'extrahible. Cela posé prenons $x^e\sqrt[2]{m} = dy$ (1), on demande y. Soit $y = n\sqrt[2]{m}$ (2). Cette equation estant differentiée donnera $dy = \frac{2m\,dn + n\,dm}{2m}\sqrt[2]{m}$ (3). Or les equations (1) et (3) devant estre coincidentes, nous aurons $dn + \frac{n\,dm}{2m} = x^e$ (4). Or je dis que la formule rationelle selon x, signifiée par n doit estre entiere. Ce que je demonstre ainsi: Supposons qu'elle soit rompue et posons $n = p : q$ (5) ensorte que p et q soyent des formules rationelles entieres, premieres entre elles, et dn sera $= q\,dp - p\,dq, : qq$ (6) et au lieu de l'equation (4) nous aurons $2mq\,dp - 2mp\,dq + pq\,dm, : 2mqq = x^e$ (7), ou bien $2q\,dp - 2p\,dq + \frac{pq\,dm}{m} = 2qqx^e$ (8), donc $\frac{pq\,dm}{m}$ est entier (9), et par conséquent $p\,dm : m$ (10) est encor entier. Divisons l'equation (8) par la lettre q et nous aurons $2dp - \frac{2p\,dq}{q} + \frac{p\,dm}{m} = 2qx^e$ (11). Et $2p\,dq : q$ (12) sera entier, quisque (par 10) tous les autres termes de l'equation (11) sont entiers. Mais p et q estant premieres entre elles par l'hypothese à l'equation (5) et q estant une indeterminée rationelle entiere selon x, il est impossible que $2p\,dq : q$ soit entier. Donc l'equation (5) est impossible, et par consequent n est entier (13). Cela estant demonstré, retournons à l'equation (4), je dis que dm et m sont premiers entre eux (14). Car c'est un theoreme general que la grandeur comme m, estant rationelle entiere indeterminée, ne sçauroit avoir un diviseur commun (j'entends qui soit indeterminé) avec sa differentielle dm, à moins que cette grandeur m n'ait un diviseur montant à quelque puissance, comme si m estoit egale à $t^r.v$, mais cela est contre nostre hypothese, car en ce cas r estant plus grande que l'unité et contenant au moins 2, il est visible qu' m seroit divisible par t^2, et par consequent contiendroit quelque chose d'extrahible, car $\sqrt[2]{m}$ seroit $t\sqrt{t^{r-2}v}$, ce qui est contre nostre hypothese faite avant l'equation (1). Donc dn et m sont premiers entre eux, comme il est enoncé par l'article (14). Donc n dm : m (15) estant entier par l'equation (4) il faut que la demandée n soit divisible par la donnée m (16) et il faudra prendre pour n une formule rationelle divisible par m. Soit donc $n = mr$ (17), et au lieu de l'equation (4) nous aurons $dn + \frac{1}{2}\, r\, dm = x^2$ (18), ce qui est le canon general et apres cela il ne reste que de prendre pour r (puisque m est donnée) une formule generale rationelle, entiere, indeterminée, finie, comme $10 + 11x + 12xx$ etc. $= r$ (19) la quelle estant substituée dans l'equation (17) et (18), il faudra que tout se detruise dans (18) à peu pres comme dans ma methode des series infinies. Ce qui donnera la valeur des coefficientes constantes 10, 11, 12, etc. et montrera en même temps jusqu'à, ou il faudra aller dans (18), et ce qui sera possible par les ordinaires, pour resoudre l'equation (1) par (2). Et on se servira de semblables considerations fondées sur la nature des rationelles et entieres, pour abreger les calculs encor en d'autres rencontres. Mais il s'entend icy que lors qu'il est parlé des rationelles et entieres, il suffit, que la lettre x dans les formules soit hors du vinculum et du denominateur, et il n'importe point si les coefficientes constantes sont sourdes ou rompues. Et en cela cette methode a de l'avantage sur celle de Diophante, dont elle emprunte le secours.

Si m estoit irrationelle et valoit par exemple $f + \sqrt{g}$, en sorte que $\sqrt{m}$ seroit une racine universelle, cette methode ne laisseroit pas de servir. Elle servira encor pour les racines cubiques ou autres plus hautes.

XIV.

De l'Hospital an Leibniz.

J'ai receu, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 27. decembre. Ce qui m'a empesché d'y faire reponse plûtost, c'est que je suis parti de St. André dans le temps qu'on me l'envoyoit en ce pays là. Je vous suis infiniment obligé de la maniere honneste dont vous en usez à mon egard, au sujet de l'écrit qui est entre les mains du P. Malebranche. C'est peu de chose n'y traitant que du calcul des differences, mais puisque vous souhaitez qu'il soit imprimé, je luy dirai qu'il peut le faire quand il lui plaira, mais c'est à une condition et dans l'esperance que vous voudrez bien donner au public l'ouvrage que vous meditez sur la science de l'infini et dont celui-ci ne doit être regardé que comme une introduction. Je souhaiterois extremement de pouvoir vous y aider en achevant les calculs que vous avez commencé, mais à present cela ne m'est pas possible par l'embaras où me jettent mes affaires; d'ailleurs je ne connois ici personne qui entende vos calculs quoiqu'il y en ait plusieurs qui le souhaiteroient beaucoup et qui ne le peuvent pas faute de livres qui les expliquent clairement. Je vous renvoye vôtre essai pour l'inverse des tangentes qui me paroît très beau et fort general quoique je ne l'aye pas encore examiné à fonds y trouvant à la premiere inspection quelques difficultez. 1° Je crois qu'il y a une erreur de calcul lorsque vous dites $\partial m = d50 + d51 \cdot y + d52 \cdot yy$ etc. et qu'il faut $d30 + d31 \cdot y + d32 \cdot yy$ etc. 2° Je ne vois point bien encore comme il faut resoudre l'equation differentielle $10dx + 11ydx + 20dy + 21ydy = 0$, car il est evident que l'equation cherchée doit avoir trois termes, c'est à dire qu'elle doit être $30 + 31y + 32yy$ et qu'ainsi la grande equation identique sera en ce cas

$$\begin{array}{llll} & +\,20d32.yy & +\,20d31.y & +\,20d30 \\ & +\,21d31 & +\,21d30 & -\,10.31 \\ 21d32y^3 & -\,2.11.32 & -\,2.10.32 & \\ & & -\,1.11.31. & \end{array} = 0$$

dont tous les termes doivent être egaux chacun separément à zero. Il s'ensuit donc que $d32$ doit être nul ce qui determine 32 ou sa valeur $\frac{21.31}{2}$ à être une quantité constante, et ainsi l'on ne resout pas l'equation generalement.

.717.

Mr. Hugens m'a mandé il y a quelque temps que vous aviez resolu l'equation differentielle, $2xydy = 2axdx - xxdx - yydx$, et que vous aviez trouvé qu'elle convenoit non seulement au cercle, mais aussi à une certaine transcendente. Je serois bien aise de sçavoir si vous vous étes servi de cette methode generule pour la resoudre, et de quelle maniere vous l'avez appliquée en ce cas.

J'ai enfin vû les Journaux de Leipsic où se trouve la solution de Mr. Bernoulli de l'isochrone paracentrique, et aussi la vôtre par laquelle on voit assez que ce probleme étoit en vôtre pouvoir avant qu'il eût publié sa solution qui est beaucoup moins simple que la vôtre, puisqu'il se sert de la rectification d'une courbe transcendente ou vous n'employez qu'une algebraique ou ordinaire. Je me souviens bien que vous m'avez écrit autre fois que vous aviez trouvé une voye pour resoudre ce probleme dans le temps même que vous le proposâtes.

Vous faites fort bien voir à Mr. Bernoulli que lorsqu'une ligne courbe dépend de la quadrature du cercle on peut par le moyen de la ligne des sinus en déterminer algebraiquement une infinité de points; de même que par la logarithmique lorsque la description de la courbe depend de la quadrature de l'hyperbole. Mais il me semble que vous vous étes equivoqué page 370 lorsque vous dites que pour quarrer une figure qui a pour ordonnée $\sqrt{a^4+x^4}$ on peut employer l'extension de l'hyperbole, car je trouve que cette quadrature depend de la rectification de la parabole cubique $x^3=3aay$.

A l'egard des theoremes de Mr. Bernoulli pour les rayons des developpées desquels il dit de quibus fratri nec adhuc constat, il y a fort longtemps que je les ai trouvez, et je les ai fait imprimer dans nos Memoires de Mathematiques du 31e Aoust 1693, dans lesquels je donne aussi diverses manieres pour trouver les points des caustiques.

Il y a longtemps que la methode des cascades ou chûtes de Mr. Rolle est imprimée dans un traité d'algebre qu'il a composé, je l'ai prié de faire un extrait de cette methode que je vous enverrai à la premiere occasion avec mon analyse du probleme de la tractoria de Mr. Bernoulli.

Je vous serai tout à fait obligé si vous voulez bien vous resouvenir de me faire faire une de vos machines d'arithmetique aussi tost que celles qui sont de commande chez l'ouvrier seront finies. Je voudrois bien qu'elle fût des plus propres, et je vous ferai tenir l'argent qu'elle coûtera par la voye que vous aurez la bonté de me marquer.

Il y a ici deux livres nouveaux qui paroissent depuis peu, l'un est intitulé Essai de dioptrique par Nicolas Hartsoeker, cet autheur est un Hollandois qui demeure ici. Et l'autre est composé par Mr. de la Hire qui contient differens traitez dont voici les titres. Un traité des epicycloides et de leurs usages dans les mechaniques. L'explication des principaux effets de la glace et du froid. Une dissertation des differences des sons de la corde et de la trompette marine. Un traité des differens accidens de la vüe divisé en deux parties. Tous ces traités ne font qu'un petit in 4. On y trouve la dimension de l'espace et de la ligne courbe de l'epicycloide à la maniere des anciens. Il y a aussi l'examen de la courbe formée par les rayons reflechis dans le cercle, où il maltraite fort Mr. Tschirnhaus; mais il me semble que cela vient trop tard, tout cela se trouvant dans les Actes de Leipsic desquels cependant Mr. de la Hire ne fait aucune mention.

Il me resteroit, Monsieur, de vous remercier de toutes les honnestetez dont vos lettres sont remplies, je vous prie d'être bien persuadé que j'en ai toute la reconnoissance possible; et que je suis avec une estime parfaite vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

Après ma lettre écritte Mr. Rolle m'a envoyé l'ecrit que vous trouverez ci inclus.

A Paris ce 2e Mars 1693.

De la Methode des Cascades Algebraiques.

Cette Methode a esté faite pour resoudre, en nombres, les Egalitez ordinaires de tous les degrez, et l'on y peut distinguer deux sortes de Principes. Les Principes de la premiere sorte regardent l'invention des Limites qui conviennent à chaque racine separement. Et les autres Principes regardent l'usage que l'on peut faire de ces Limites pour trouver les racines exactes, ou pour faire l'approximation de celles qui sont irrationnelles. Et dans ce dernier cas on peut se servir des Limites, non seulement pour les égalitez numereuses, mais encore pour celles qui sont conceues en termes generaux. — Les Limites se divisent en Limites moyennes et en Limites extrémes. Il y a deux limites extrémes, l'une plus petite et l'autre plus grande que toutes les racines. Et il est aisé de les trouver par plusieurs voyes. Pour les Limites moyennes, l'on cherche une Egalité qui les renferme toutes, et qui soit d'un degré plus simple que l'Egalité proposée. Ce qui se fait en multipliant chaque terme par son Exposant. Pour trouver les racines de cette Egalité on en cherche un autre, par le même moyen qui renferme les limites de ses racines et l'on continue de la meme maniere jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une Egalité du premier degré. Toutes ces Egalitez s'appellent Cascades. On peut les former toutes à la fois en substituant un binome au lieu de l'inconnue, et les former aussi en d'autres manieres que l'auteur a designées. Suivant cette generation, il arrive que la Cascade qui a esté formée en dernier lieu renferme la limite moyenne de la penultieme Cascade, que les racines de la penultieme sont les limites moyennes de l'antepenultieme et ainsi de suite en retrogradant jusqu'à l'Egalité proposée. Ensuite l'auteur qui a publié cette Methode, donne 3 Régles pour regler la maniere de se servir de ces Limites, soit pour trouver les Racines effectives ou pour reconnoitre les défaillantes et pour trouver les contradictions qui constituent les differentes especes d'imaginaires de chaque Egalité ou bien pour approcher de plus en plus de ces Contradictions quand elles sont irrationnelles. Cela se pratique par le moyen de deux régles qui suffisent chacune à part pour poursuivre la racine dont on connoist les Limites jusques à ce qu'on l'ait trouvée. Voilà ce qui est du Traité d'algebre touchant les Cascades.

Dans un petit volume separé, l'auteur a prouvé l'infaillibilité de cette Methode, et sur la fin de cette démonstration il donne une idée d'une autre Methode pour l'approximation des racines des Egalitez dont les termes sont conceus en termes generaux. Il a aussi donné quelques Régles sur cette derniere Methode dans les Memoires academiques du 15e mars 1692 et il se propose de la traiter à fond, si son Algebre speculative se poursuit. Cette démonstration des Cascades est suivie d'une Methode pour resoudre les Egalitez par Geometrie où l'on peut voir aussi comment les Cascades se peuvent expliquer par la Generation des Courbes ordinaires. Et que Mr. l'Abbé Catelan n'avoit rien donné de nouveau sur cette explication qui fut considerable, dans ce Livre qui disparut en naissant; si ce n'est une suite de fautes dont la pluspart ont esté remarquées dans le Journal des Sçavans par M. Nicolas. — Enfin cette Methode de resoudre les Egalitez par Geometrie est suivie d'un demonstration pour prouver en chaque occasion que si un nombre entier n'est pas la somme de deux quarrez en entier, il ne sçauroit estre la somme de deux quarrez en fraction. Ce qui doit aussi s'entendre des nombres en fraction dont le denominateur est un quarré en regardant le numerateur comme un nombre entier etc. Il paroit par une lettre que Monsieur Leibniz a publiée, qu'il seroit bon de l'informer aussi de plusieurs autres Methodes qui ont paru en ces païs icy. Mais comme je ne sçais pas s'il trouveroit bon que je luy en envoye un Memoire, et que je n'oserois risquer de vous fatiguer sur cela, je n'en diray pas davantage que je n'aye eu l'honneur de vous voir.

XV.

Leibniz an de l'Hospital.

Je vous suis d'autant plus obligé de vostre lettre, que vos occupations vous laissoient moins de loisir pour m'écrire. Je n'ay garde de vous demander cette assistance, que je croyois pouvoir trouver par vostre entremise dans quelque personne qui y auroit esté propre à Paris, quand même la chose auroit demandé quelque depense. Mais je voy bien qu'il y a peu d'apparence. Ainsi je remettray la partie à un temps ou je me trouveray plus capable de travailler moy même. Je diray autant des deux lettres que je vous ay envoyées ensuite toutes deux adressées au R. P. de Malebranche. Cependant je seray bien aise d'en apprendre vostre sentiment.

En donnant la methode des Differences dans vostre écrit, vous donnerés, Monsieur, la Methode des sommes virtuellement, et en effect je ne distingue pas ces deux calculs. Ainsi vostre écrit sera plus qu'une introduction et j'espere d'en faire profit moy même; le mien ne sera pas en estat de paroistre si tost, si ma santé ne devient meilleure. Il ne sera point necessaire aussi, que vous vous borniés aux seules differences puisque, leur calcul est le même avec celuy des sommes, l'un estant seulement reciproque de l'autre. Par exemple j'ay trouvé comme x^{-1} est $= 1 : x$ que de même $d^{-1}x = \int x$. Par exemple, ayant trouvé cette equation generale $\int \overline{z^e d^m n}$ *) $= z^e d^m n - e z^{\frac{e-1}{\cdot}} d^{\frac{m-1}{\cdot}} n + ee . z^{\frac{e-2}{\cdot}} d^{\frac{m-2}{\cdot}} n - e^3 . z^{\frac{e-3}{\cdot}} d^{\frac{m-3}{\cdot}}$ etc. (supposant que dz est l'unité) et faisant specialement $m = 1$, il en proviendra cette equation $\int \overline{z^e dn} = z^e dn - e . z^{\frac{e-1}{\cdot}} n + ee . z^{\frac{e-2}{\cdot}} \int \overline{n} - e^3 . z^{\frac{e-3}{\cdot}} \int\int n$ etc. Car $d^0 n = n$ et $d^{-1} n = \int n$ et $d^{-2} n = \int\int n$ ou $\int^2 n$, c'est à dire $\int \overline{\int n\, dz\, dz}$. Si m estoit 2, $d^m n$ seroit ddn, $d^{\frac{m-1}{\cdot}} n$ seroit dn, $d^{\frac{m-2}{\cdot}} n$ seroit n, $d^{\frac{m-3}{\cdot}} n$ seroit $\int n$, et $d^{\frac{m-4}{\cdot}} n$ seroit $\int\int n$ etc. Je me souviens que pour resoudre l'equation differentielle proposée par M. Hugens, dont parle vostre lettre, je m'estois servi de la methode qui convient à ce que je vous ay envoyé; et je le chercheray, car je m'y estois pris d'un biais singulier, que ne me revient pas à la premiere veüe. Et je ne suis maintenant capable de faire que ce qui ne demande point de meditation. Lorsqu'il y a des inconveniens dans les comparaisons, qui font naistre trop de determinations, il y a plusieurs biais pour les eviter, cependant je me suis mepris en ecrivant d50, d51 etc. au lieu de d30, d31 etc. Je desireray aussi vostre jugement sur ma maniere de trouver radios osculationum, qui est si courte, et sur la maniere que j'ay donnée de mener l'isochrone par un point donné, au lieu que M. le professeur Bernoulli croyoit qu'en seule pouvoit satisfaire, et sur ma maniere de décrire les transcendantes mecaniquement, qui est fort generale. Quant à ce qui est de trouver puncta vera quadratricium, je voudrois qu'on allât plus avant à des constructions plus composées, de la même maniere qu'on trouve ces points veritables per sectionem rationis vel anguli. Il est vray que la rectification de l'Hyperbole ne donne directement que la quadrature de $\sqrt{a^4 + x^4} : xx$, au lieu que celle de la paraboloide cubique donne directement $\sqrt{a^4 + x^4}$, mais lorsque j'ay dit qu'encor cette derniere quadrature depend de la Rectification de l'Hyperbole, j'ay crû voir le moyen de reduire l'un à l'autre.

Je remercie M. Rolle de son instruction des Cascades, cependant elle ne m'instruit pas assez, estant sans exemples. Si j'estois maintenant bien propre à ces meditations, j'eun trouverois peut estre le sens; je crois qu'il y a quelque chose

*) In Bezug auf diese Formel ist zu vergleichen das Schreiben Leibnizens No. XXI.

de bon là dedans, quoyque nous ne manquions pas d'autres Methodes peut estre plus aisées. Son memoire dit, qu'on juge par une lettre que j'ay publiée, qu'il seroit bon de m'informer aussi de plusieurs autres methodes qui ont paru en France. Je serois bien aise de pouvoir recevoir un jour ces informations, et d'apprendre de quel endroit de ma lettre on parle. Personne jugera mieux que vous, Monsieur, si ces methodes sont de quelque consequence, et je me fierois tousjours la dessus à vostre jugement. Je ne manqueray pas de me souvenir de la Machine Arithmetique.

Je ne suis pas faché que M. de la Hire veut bien se donner la peine que je ne voudrois point prendre de reduire en demonstrations à la façon des anciens, ce que nous découvrons aisement par nos Methodes. Ce seroit encor mieux, s'il se servoit de nouveaux moyens capables d'avancer l'art d'inventer, mais c'est de quoy je doute. En tout cas il me semble, que bien loin de maltraiter M. Tschirnhaus on deuvroit luy témoigner de l'obligation. Je souhaiterois d'obtenir un extrait des paroles de M. de la Hire, qui regardent M. Tschirnhaus. J'espere que M. de la Hire rendra justice au moins à M. Hugens et à M. Romer qui ont déja donné des belles choses sur ces Epicycloides.

Puisque M. Hartsoecker pretend particulierement d'expliquer la refraction, je souhaitterois de sçavoir s'il explique la loy des sinus par une methode juste et differente de celle de M. Hugens. Ce n'est pas expliquer les couleurs fixes, que de les faire venir de certaines teintures, comme il fait selon le rapport du Journal des Sçavans. J'ay remarqué pourtant autres fois que feu M. Mariotte estoit dans le même sentiment. Mais quand il y auroit de telles teintures, comme en effect les experiences des chymistes font croire qu'il y en a quelques unes, la même question de la raison de la couleur de ces teintures revient tousjours.

Je souhaitterois une liste de ceux qui sont maintenant dans l'Academie Royale des sciences, et de leur ouvrages. M. Rolle n'en est il pas? Si M. Osannam pouvoit avancer considerablement l'Analyse de Diophante, on luy auroit de l'obligation. Je m'etonne que M. Prestet, qui ne pensoit à autre chose que je sçache que l'Algebre, n'a point avancé la science et n'a rien donné de considerable la dessus. Quand j'estois à Paris, il y avoit un jeune homme de Lion, qui me revenoit merveilleusement, il estoit de la connoissance de P. Deschales, mais il me disoit, qu'il retournoit à Lion et suivroit je crois la profession de marchand; par malheur j'ay oublié son nom. Je ne sçay s'il aura quitté ces etudes entierement. M. Renaud at-il repliqué à l'écrit de M. Hugens, mis dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans. N'y at-il rien de M. Sauveur? M. Hugens me mande qu'il publiera un traité philosophique. J'en suis ravi. Peut estré que j'en donneray aussi un jour quelque chose, et particulierement l'explication de l'unité de l'action mutuelle et communication des substances aussi bien que de l'union de l'ame et du corps; et cela en peu de mots dans un journal.

XVI.

De l'Hospital an Leibniz.

A Paris le 25e avril.

J'ay receu trois de vos lettres, Monsieur, auxquelles je dois reponse, il y en a deux qui m'ont été renduës par le R. P. Malebranche. Je vous demande mille pardons de n'y avoir pas fait reponse plustost, mais deux proces que j'ai presentement ne me laissent point le loisir de m'appliquer aux sciences, surtout à celles qui demandent beaucoup d'application et un esprit libre. Je vous dirai seulement en gros que vos methodes pour l'inverse des tangentes et les quadratures me paroissent tres generales et fort belles, mais je crains, que le calcul ne soit long et difficile, et qu'il ne demande même souvent la vûe de celui qui les a inventées pour eviter plusieurs difficultez qui peuvent naitre dans la comparaison des termes. Je souhaiterois extremement de trouver ici quelqu'un qui fust capable de vous aider et j'y donnerois avec plaisir mes soins, mais cela est plus difficile que vous ne pensez et nous sommes ici fort denuez de ces sortes de gens. Si vous pouviez avoir quelqu'un aupres de vous, cela seroit beaucoup mieux et en verité il me semble qu'un homme comme vous qui a fait tant de belles decouvertes et qui est rempli de vûes si importantes pour l'art d'inventer meriteroit bien d'être soulagé.

Vôtre maniere pour trouver les rayons des cercles baisans est tres courte et tres ingenieuse. Il me semble qu'elle ne sert que pour les courbes dont les appliquées sont paralleles entre elles. Je crois vous avoir deja mandé que j'ai donné il y a environ deux ans dans les Memoires de mathematique tous les theoremes de Mr. le professeur Bernoulli qu'il appelle dorez et dont il dit de quibus adhuc nec fratri constat, avec la maniere dont je les ai trouvez qui est tres simple. Je vous les enverrai si vous le sonhaitez. Il n'y a point de doute qu'on peut mener l'isochrone paracentrique par un point donné comme vous le pretendez contre Mr. Bernoulli et vôtre maniere de decrire les transcendantes mechaniquement est aussi facile que generale. Il seroit trop long de vous envoyer un extrait de ce qué Mr. de la Hire dit de Mr. de Tschirnhaus, il suffira de vous faire remarquer que c'est dans un endroit qui a pour titre, Examen de la courbe formée par les rayons refléchis dans un quart de cercle. Il fait d'abord un narré de ce qu'il se passa lorsque Mr. de Tschirnhaus fit part de cette decouverte à l'Academie dans lequel il dit, „il nous „voulut demontrer quelle etoit la grandeur de cette ligne courbe „par rapport au diametre du quart de cercle dans lequel elle „est decrite; mais comme la methode dont il se servoit pour sa „demonstration etoit une espece d'evolution fort differente de „celle dont Mr. Hugens s'est servi dans son traité des pendules „et qui ne nous sembloit point geometrique, n'ayant pas de„montré quelques lemmes qui devoient preceder cette evolution." Il explique sept ou huit pages plus bas quelle est cette evolution en ces termes, et il rapporte d'abord les paroles de Mr. Tschirnhaus dans son livre de medicina mentis.

„Novi equidem quendam de veritate primarii theorematis, „nempe in quo ostendo, solis radios incidentes in curvam et „inde reflexos suis intersectionibus curvas formare, rectis semper „aequales, dubitasse, et, ut mihi relatum est, etiam nunc dubi„tare; quia vero demonstrationes hae jam dudum fuere probatae „a D. Hugenio et D. Leibnitio, qui absque dubio inter primos „nostri aevi mathematicos numerantur, parum his moveor: pra„stat pergere.

„Il n'y a personne qui puisse douter que les courbes for„mées par les intersections des rayons du soleil réfléchis lors„qu'ils tombent au dedans d'une courbe, ne soient egales à des „lignes droites, non plus que toute autre sorte de courbes et le „cercle même; mais la difficulté est de demontrer quelle est la

„grandeur de cette ligne droite egale à la courbe par rapport „à quelque ligne droite connuë et donnée, comme de connoître „la circonference du cercle par rapport à son diametre.

„Dans l'exemple que j'ai rapporté ci devant, Mr. de Tschirnhaus voulant nous faire voir un échantillon de sa methode pour „trouver des lignes droites egales à des courbes, nous proposa „celle qui est formée par les rayons du soleil reflechis dans le „quart de cercle, sans nous parler alors de la maniere de la „décrire, et il nous dit qu'elle etoit egale aux trois quarts du „diametre du cercle. Car, disoit-il, si l'on couche un fil au long „de cette courbe (fig. 53) BHE, et qu'ensuite ayant plié ce fil „avec une pointe vers quelqu'un des points du quart de cercle „comme en M, ce fil etant tendu depuis M jusqu'à la courbe en „H, et le reste de ce fil comme ML etant mis parallele à AC, „son extremité L se rencontre sur la ligne AE; et cela etant de „même par tout, il arrivera que lorsque le fil sera entierement „developpé de dessus la courbe, le point M sera en C, et le „point L au point A; mais le fil etant plié depuis B jusqu'en C, „il s'ensuivra que toute la courbe BHE sera egale à la ligne AC „plus CB.

„Quoi qu'il soit vrai que si l'on commence par le point E „à developper le fil qui est couché sur la courbe en le tenant „toujours tendu par son extremité E, ce fil touchera toujours la „courbe, ou ce qui est la même chose representera une tou-„chante, et alors l'extremité de ce fil par l'evolution ou le de-„veloppement de la courbe BHE décrira une autre ligne courbe; „mais il ne s'ensuit pas pour cela que ce fil etant replié au „point comme M ou il rencontre le quart de cercle, et etant „etendu parallelement à AC, décrive par son extremité comme „L la ligne droite AE; et quand même la courbe BHE seroit „egale à AC plus BC, il ne s'ensuiveroit pas non plus que ce „point L parcourust la ligne droite AE. Enfin quoi que Mr. de „Tschirnhaus puisse dire, je connois trop bien qu'elle est l'ex-„actitude de Mrs. Hugens et Leibniz pour pouvoir me persuader „qu'ils se soient contentez de sa parole au lieu de demonstration; „car il falloit démontrer comme j'ai fait à la fin de ce traité, „que le point L doit toujours se rencontrer sur AE; d'ou il „suit aussi que la portion HE de la courbe BHE est egale aux „deux lignes droites HM et ML jointes ensemble. Mais il „semble que Mr. de Tschirnhaus n'en avoit point d'autre dé-

„monstration que l'expérience qu'il en avoit faite, comme il „disoit."

Il ne fait aucune mention de ce qui se trouve dans les Actes de Leipsic ou Mr. Bernoulli a fait voir que Mr. Tschirnhaus s'etoit trompé dans la maniere de trouver les points de la caustique, ni de ce que Mr. Tschirnhaus y a fait mettre depuis ou il avoue sa meprise et enseigne sa methode pour trouver les points des caustiques et fait voir ensuitte que cette caustique est une roulette formée par la revolution d'un cercle sur un autre cercle; et c'est pourtant tout ce que Mr. de la Hire donne dans ce traité, et ainsi il n'y a rien de nouveau, sinon les demonstrations qui sont a la maniere des anciens et par consequent fort ennuyeuses et longues. Il ne parle en aucun endroit de Mr. Romer qui a cependant trouvé de belles choses sur ces roulettes.

A l'egard de Mr. Rolle il est vrai qu'il falloit quelques exemples pour eclaircir sa methode. Je pourrai vous en envoyer si vous jugez que la chose en valle la peine. Pour ce qui est des autres methodes qu'il dit qui ont paru en France, il veut parler apparemment de quelque chose qu'il a fait mettre dans les Journaux des Sçavans sous le nom de Remi Lochel qui est son nom retourné. Je n'ai point vû ce que c'est, mais je m'en informerai de lui; comme il sçait fort peu de geometrie ne s'etant appliqué qu'a l'algebre et qu'il ignore vos methodes, je suis persuadé qu'il n'y a rien là de nouveau qui merite de vous être envoyé. Il est de l'Academie des sciences. Je prierai Mr. du Hamel qui en est le secretaire de me donner une liste de ceux qui la composent et de leur ouvrages pour vous l'envoyer. Mr. Sauveur n'a rien fait imprimer que je sçache. Mr. Hugens m'a mandé qu'il faisoit imprimer un traité philosophique touchant la theorie des planettes, leur habitances, ornemens etc. Mr. Renaud lui a repliqué. Je vous envoye ici tout ce qui s'est passé la dessus a fin que vous en puissiez juger. Je vous enverrai a la premiere occasion ce que Mr. Harsoeker met sur les refractions dans son livre. Je voudrois bien sçavoir qui est cet homme de Lion dont vous me parlez, mais comme le Pere Deschales qui le connoissoit est mort il y a long temps et que vous n'en sçavez point le nom, il seroit tres difficile de le deterrer.

Mr. Bernoulli le medecin m'a mandé qu'il avoit proposé le probleme qui suit: trouver la courbe (fig. 54) AB qui soit telle que le poids B en descendant le long de cette courbe la presse par tout avec la même force centrifuge: ou ce qui revient au même, trouver la courbe DC telle que le poids B que l'on conçoit la developper en tombant par sa pesanteur tire par tout le fil BC avec la même force. Je trouve que la ligne AB a pour equation differentielle $\frac{yydy - aady}{\sqrt{2yy - aa}} = a\,dx$ ($AE = x$, $EB = y$), d'ou il est facile de voir que cette courbe depend de la quadrature de l'hyperbole ou de la rectification de la parabole.

Je suis, Monsieur, avec beaucoup d'estime etc.

XVII.

Leibniz an de l'Hospital.

$\frac{13}{23}$ Maj. 1695.

Je vous remercie des pieces de Mons. Renaud contre M. Hugens. Les prejugés ou presomtions sont pour M. Hugens, et j'aimerois tousjours mieux de parier pour luy que pour un autre. Cependant il faudroit estudier la matiere à fonds, et lire la theorie même de la Manoeuvre, pour juger avec connoissance de cause. J'ay cette theorie, mais je ne l'ay pas encor lûe avec assez d'attention, et je le differe jusqu'à ce que je me mette à achever mes dynamiques, pour ne faire la même chose deux fois.

Si je pouvois trouver un jeune homme d'une esperance extraordinaire et d'une curiosité un peu etendue, ce seroit mon fait, et je pourrois peut estre luy procurer même quelque avantage, mais il est rare d'en trouver et en Allemagne autant et peut estre plus qu'ailleurs. Si la hazard vous en presente ou vos amis, vous aurés la bonté de vous souvenir de moy.

Je serai bien aise de voir la Methode dont vous vous estes servi, Monsieur, pour les rayons des cercles baisans. Celle que j'ay employée est une suite de cette espece du calcul differentiel ou les coordonnées sont considerées comme indifferentiables. Et vous jugés bien qu'il n'est pas difficile de l'appliquer, soit qu'on considere les ordonnées comme paralleles ou comme convergentes. Monsieur Bernoulli le Medecin en respondant à Monsieur le Professeur son frere, rapporte que vous aviés déja trouvé ces raisons que M. le Professeur croyoit avoir trouvé le premier.

Pour ce qui est de ce joli probleme, que vous avés resolu, Monsieur, touchant la figure d'une ligne propre à faire que le contrepoids fasse tousjours equilibre avec ce qui doit estre remué, et dont M. Bernoulli le medecin a trouvé une construction fort simple, j'ay remarqué qu'il y auroit peu arriver, sans considerer le centre de gravité, par les seules differentielles; en remarquant seulement que pour faire tousjours equilibre, l'accension elementaire du poids doit estre à la descente elementaire du contrepoids en raison reciproque de leur pesanteurs; car ainsi il y aura tousjours autant de descente que d'ascension. Or les ascensions ou descentes elementaires sont les differentielles des ordonnées verticales des lignes du mouvement que les poids decrivent; et par consequent les sommes de ces differences, c'est à dire ces ordonnées mêmes seront en cette même raison. En effect le centre de gravité ne retranche la consideration des differentielles que parcequ'il en represente la somme.

Si Messieurs de l'Academie Royale des sciences n'ont trouvé d'autre difficulté dans la demonstration de Mr. Tschirnhaus que celle que M. de la Hire y represente, il estoit aisé d'y satisfaire et de suppleer à ce qu'il dit manquer à la demonstration de Mons. Tschirnhaus. Car il suffit de s'imaginer que le fil BHML (fig. 55) se trouve en partie a l'entour de la courbe BH, en partie en l'air HM et en partie LM appliqué à la regle LMN, laquelle demeurant tousjours perpendiculaire à AE peut courir la dessus et s'approche d'AC à mesure qu'on fait l'evolution avec un stile qui tient tousjours le fil tendu; ainsi il est manifeste que BH + HM + ML est tousjours egal à la même somme. Or au commencement de l'evolution, L estant en E, le fil est egal à toute la courbe BHE, et à la fin il est egal à BC + CA. Donc BHE courbe est egale à BC + CA droites. Ce mouvement même fait voir que le point L parcourt tousjours AE, il reste seulement de faire voir, que la perpendiculaire à la courbe que le style decrit, coupe l'angle du fil HML en deux; pour monstrer que cette courbe BHE est la même avec la Caustique. Mais cela se trouve aussi aisement que dans la maniere de decrire les coniques avec des fils, la tension ne se changeant point, soit que le point H soit fixe, ou mobile. Cependant je trouve fort bon, que Monsieur de la Hire demonstre les nouvelles découvertes à la façon des anciens Geometres et on luy en aura de l'obligation, parce qu'il rend ainsi temoignage à la verité. Mais il aura souvent besoin de beaucoup de paroles. Il faut que cet homme de Lion qui me paroissoit si propre à cultiver la Geometrie soit mort ou ait entierement abandonné les pensées mathematiques. Il deuvroit estre connu au moins des vieux Jesuites de cette ville là; mais comme il ne donne rien, il semble qu'il doit estre compté pour mort.

Je suis bien aussi de sçavoir que Remi Lochel et Mons. Rolle est la même personne. Mais ce qu'il donne dans le Journal sous ce nom, me paroist un peu enigmatique, et tellement même que je ne sçay, si l'auteur luy même ne se trouvera empeché, quand il faudra s'en servir.

Je suis ravi que M. Hugens s'est resolu de nous donner un traité philosophique sur la Theorie des planetes, et il seroit à souhaiter, qu'il pût estre porté à nous donner ses conjectures encor sur des autres matieres, je l'en ay déja prié au nom de public et je vous supplie, Monsieur, de vous joindre à moy. Je luy écrivois, que nous avons perdu des pensées excellentes de Galilei et d'autres personnes eminentes en sçavoir, parceque ces personnes ne vouloient donner que des choses qu'ils pouvoient demonstrer à la façon des Geometres.

J'applaudis à vos belles découvertes parmy lesquelles je compte vostre construction de la courbe dans laquelle la force centrifugue du mobile est egale. Je n'ose plus penser à de tels problemes dans la situation, ou ma santé se trouve. Ainsi je doute si j'y aurois reussi.

Pour me décharger de quelques unes de mes pensées et pour les empecher de se perdre (si elles en valent la peine) j'envoyeray à Paris ma maniere d'expliquer la communication des substances et l'union de l'ame avec le corps, et je seray bien aise sur tout d'apprendre la dessus les reflexions du R. P. Malebranche, aussi faut-il avouer que j'ay profité de celles qu'il a deja données. Je suis avec zele etc.

P. S.

Je vous supplie de me garder et communiquer les Analyses de vos découvertes, pour que je les puisse joindre un jour à l'ouvrage que je projette, à fin de suppleer par là à ce qui me manqué. J'espere que vostre ouvrage dont vous m'avés parlé sera maintenant sous la presse. Mons. de Tschirnhaus vient de publier une seconde edition de son Medicina Mentis, ou il a omis les paroles, que M. de la Hire en cite. Il donne aussi pag. 100 et 101 une maniere de determiner les tangentes par les foyers, que j'en ay fait copier, pour vous l'envoyer. La vostre que vous m'envoyates un jour, estoit non seulement plus courte et plus reglée, mais encor plus generale; puisqu'elle n'estoit pas seulement pour les puissances, mais encor pour les combinaisons des lignes ou de leur puissances entre elles. Ainsi vous me feriez une faveur, Monsieur, en me communiquant la demonstration ou l'origine. Et pag. 107 il pretend donner une table de toutes les courbes Algebriques. Mais je ne sçaurois comprendre comment elle puisse estre suffisante, par exemple pour le troisieme degré il donne les courbes suivantes $y^3 = x$, $y^3 = xx$, $y^3 = x + xx$, $y^3 = x + x^3$, $y^3 = xx + x^3$, $y^3 = x + xx + x^3$, et ainsi dans les autres degrés. Mais je ne crois pas qu'on puisse tousjours oster tous les termes ou y se trouve hors le supreme. Quant à ce que M. Fatio Duillier a corrigé dans la premiere maniere de M. Tschirnhaus de donner les Tangentes par les foyers, il dit, qu'il y a eu une erreur dans la figure de sa premiere edition.

XVIII.

De l'Hospital an Leibniz.

Je crois, Monsieur, que vous aurez receu ma derniere lettre dans laquelle je repondois aux dernieres que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Je vous y envoyois les ecrits de Mrs. Hugens et Renaud touchant leur dispute. Je vous envoye à present la derniere reponse de Mr. Hugens qui m'a été rendue depuis peu par un homme de ses amis afin qu'étant instruit à fonds de toutes leurs raisons vous puissiez decider cette dispute, qui me paroist d'importance pour la marine et phisique.

J'ai vû depuis peu les Actes de Leipsic du mois d'octobre, ce qui m'a donné occasion de composer un petit ecrit que je prends la liberté de vous envoyer, et de vous prier en même temps de le faire inserer dans les Actes, si vous jugez qu'il en valle la peine. Le probleme que j'y resoud et qui avoit été proposé par Mr. Bernoulli le professeur me paroist des plus curieux par rapport à la methode directe des tangentes. Vous y en trouverez aussi un autre dont je donne une construction tres simple quoi qu'il soit fort generale, et j'ai de la peine à croire qu'on pût resoudre ces sortes de problemes par la geometrie ordinaire; de sorte que c'est à vous à qui on en a l'obligation toute entiere, ces choses etant faciles lorsqu'on possede le calcul differentiel dont vous etes l'autheur. Je crois que vous aurez vû dans les Actes un probleme que j'ai resolu qui sert à trouver une certaine ligne de balancement.

Je l'avois envoyé il y a deja longtemps à Mr. Jean Bernoulli qui me manda quelque temps apres qu'il avoit trouvé une construction generale, je lui fis reponse des le même jour et lui en envoyé une qui etoit aussi fort simple, en le priant de voir si elle convenoit avec la sienne et de la faire aussi inserer dans les Actes en même temps. On m'a mandé cependant que la sienne paroissoit et que la mienne n'y etoit pas, j'entens la generale, parceque la premiere que j'avois donnée ne servoit que pour l'élévation d'un pont-levis. Nous avons ici toutes les peines du monde d'avoir les Actes, et ainsi nous ne sommes instruits que fort tard de ce qui s'y rencontre.

Le R. P. Malebranche m'a fort prié de vous faire mille complimens de sa part, et de vous marquer l'estime parfaite qu'il a pour tout ce qui vient de vous. Pour moi, Monsieur, je reconnois que je vous dois entierement le peu de progrés que j'ai fait dans la geometrie interieure, et je vous regarde avec justice comme nôtre maistre à tous.

Il y a longtemps que je n'ai receu de lettre de Mr. Hugens. Je ne sçais si son traité philosophique des planettes est achevé d'imprimer. J'aurois un extrême desir que vous eussiez les secours necessaires et le loisir pour perfectionner vos vûes, et je vous asseure qu'on ne peut être avec plus d'estime, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 27e may (1695).

Extrait du journal d'Hollande contenant la derniere reponse de Mr. Hugens.

Ayant deja tâché deux fois (Mr. Hugens) en vain de desabuser Mr. Renaud touchant les erreurs qu'il y a dans son livre de la manoeuvre, je crois que ce seroit perdre le temps que de vouloir insister d'avantage, apres ce que j'ai dit dans ma replique que vous avez inserée dans le mois d'avril 1694. J'en demeure donc là, et puisqu'il a bien voulu faire imprimer cette replique ensemble avec la reponse qu'il y a faite, je ne suis pas en peine que ceux qui auront bien examiné ces deux pieces, puissent juger en sa faveur. Je crois même que Mr. Renaud apres avoir consideré plus à loisir mes objections, pourra reconnoistre sa faute, puisqu'il agit de bonne foi, et qu'il ne soutient la theorie, que parce qu'il est persuadé que la raison est de son côté. Il pourra s'appercevoir qu'il explique mal dans cette derniere reponse à quoi se reduit nôtre dispute; puisqu'il prend le mot de force ou de puissance dans un autre sens que je ne l'ai pris; d'où il arrive aussi necessairement, à cause des differentes definitions, qu'il prend des conclusions differentes des miennes. Mais celle ou il détermine les espaces que doit parcourir le vaisseau dans les deux cas, suit si peu de son raisonnement precedent, que je m'etonne qu'il l'ait pû prendre pour legitime. Il verra ici ce que m'ecrivent touchant nôtre difference deux illustres geometres, que je pourrai nommer s'il est necessaire, apres leur en avoir demandé la permission. L'un conclut par ces mots: Quand on est entesté sur tout dans les questions ou la physique a part, je trouve qu'on en revient difficilement. Il me semble que si vôtre replique ne le fait point, il seroit assez inutile que d'autres l'entreprissent. L'autre dit: J'ai vû avec chagrin que Mr. Renaud ne l'est point rendu à vos raisonnemens, et qu'il se croyoit assez fort pour s'opposer tout seul et à vous, et à tout ce qu'il y a de mathematiciens au monde; j'aurois eté tenté de joindre mes raisons aux vôtres, et d'imprimer une double demonstration que j'ai de la proposition que l'on conteste, si etc.

XIX.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover ce $\frac{14}{24}$ Juin 1695.

Je ne doute point, Monsieur, que vous n'ayiés receu celle que je me suis donné l'honneur de vous écrire ou j'avois joint un extrait de la nouvelle edition de la Medecine de l'Esprit de Mons. Tschirnhaus. Maintenant je n'ay point voulu manquer de vous donner avis de la reception de la vostre, et du soin que j'ay eu d'envoyer à Leipzig, ce que vous y avés inseré pour les Actes qu'on y publie. Vos constructions sont tres simples et l'adresse avec laquelle vous les avés obtenues est singuliere. Il n'est que trop vray qu'on s'enfonce aisement dans les grands calculs, quand on neglige de preparer les figures.

Vostre construction de la courbe propre à l'elevation d'un pont levis est dans les Actes du mois de fevrier de cette année. Mais la generale n'y est pas, car je me souviens que Mr. Jean Bernoulli m'ecrivit, que vos seconds ordres n'estoient arrivés, que lors qu'il avoit deja envoyé le probleme avec les solutions à Leipzig. Il vous en aura rendu compte sans doute, luy même vous honnorant comme il temoigne de faire et avec raison.

Il semble aussi a moy que M. Renaud prend le terme de la Force un peut autrement qu'à l'ordinaire, et comme cela fait naistre des equivocations, je seray obligé de lire un jour son livre avec application pour dechifrer son sens, et pour trouver en quoy il aura manqué.

Je viens de recevoir deux livres qu'un mathematicien de Hollande, nommé Monsieur Bernard Nieuwentiit vient de faire imprimer et m'a envoyé exprés. Il se plaint de vous, Monsieur, de Messieurs Bernoulli, et de moy, parceque nous employons nos raisonnemens fondés sur le Calcul de differences, sans avoir donné des demonstrations de nos principes. Il croit même que de nostre calcul s'ensuit, que lorsqu'on prend les differences des abscisses x egales, celles des ordonnées y et des courbes ou arcs c le devroient estre aussi. Il passe encor plus avant, et blâme quasi tous les Mathematiciens qui ont raisonné sur ces matieres; parce qu'il n'ont point distingué i n f i n i t e p a r v u m a nullo; car selon luy pour que deux grandeurs soient egales, il faut que leur difference soit nulle. Il pretend d'avoir trouvé le moyen de rectifier les demonstrations des Geometres; et il met pour fondement que tout ce qui multiplié par un nombre infini ne devient pas une grandeur ordinaire n'est rien. C'est pourquoy il veut que les quarrés ou rectangles des lignes infiniment petites comme dxdx ou dxdy ne sont rien et que c'est pour cela qu'on a raison de les rejetter dans le calcul de M. Fermat. C'est pour cela aussi qu'il ne veut point admettre les grandeurs differentio-differentielles comme ddx. Cependant ces objections sont proposées d'une maniere fort honneste; je luy repondray de même dans les Actes de Leipzig, et monstreray en quoy il s'est trompé en croyant que dy sont egales, si dx le sont; et je remarqueray qu'encor suivant son propre principe dxdx et ddx sont des grandeurs, puisque estant multipliés per numerum infinitum (sed altiorem seu infinities infinitum) ils donnent des grandeurs ordinaires. Et que lors que les x sont en progression geometrique, alors x, dx, ddx, d^3x etc. le sont aussi. Or il seroit estrange de dire que x et dx sont des grandeurs, et que leur troisième proportionelle ddx ne le soit point, outre l'utilité des differentio-differentielles, tant aux osculations qu'ailleurs, que l'effect même a fait connoistre.

Je m'imagine, Monsieur, que vos explications ou demonstrations de ces calculs paroistront bien tost, selon ce que vous m'avez fait esperer, et qu'alors ces plaintes cesseront. Je l'ay renvoyé en attendant à mes lemmes des incomparables inserés dans les Actes de Leipzig Fevrier 1689, et je compte pour egales les quantités dont la difference leur est incompárable. J'appelle grandeurs incomparables dont l'une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne sçauroit exceder l'autre, de la même façon qu'Euclide la pris dans sa cinquieme definition du cinquieme livre. Je suis avec zele etc.

P. S.

J'ay oui dire que M. Hugens a esté un peu malade. Je luy écriray au premier jour, esperant qu'il se portera mieux. Sa conservation nous importe infiniment. Et il luy faudroit encor à plus juste titre qu'à moy des jeunes gens capables de profiter de ses avis, et de l'aider à executer ses pensées. Apres Galilej, Kepler et des Cartes, c'est luy qu'on doit nommer. C'est aussi à luy apres ceux là, à qui j'ay le plus d'obligation. Je n'ay pas oublié de le temoigner publiquement dans les rencontres. Et j'ay fort estimé en luy outre la connoissance profonde qu'il a, la sincerité qu'il a fait paroistre dans les occasions, en rendant justice aux autres. Apres avoir connu par vostre entremise, Monsieur, l'usage de mon calcul, il pouvoit aisement le travestir et l'accommoder aux expressions anciennes; mais il en a usé tout autrement. Si vous luy écrivés, Monsieur, je vous supplie de l'exhorter avec moy, à nous donner quantité de belles pensées qu'il ne peut manquer d'avoir même en philosophie, et sur tout en physique; sans s'attacher à faire des traités reguliers; ce qui luy donneroit de la peine.

Pour vous, Monsieur, comme vous estes dans la fleur de vostre age, et que le plus haut point ou nous sommes arrivés en Geometrie, ne fait que vos commencemens, il est aise de juger, quels progrés on doit attendre de vos lumieres extraordinaires. En voulant bien m'avoir quelque obligation, vous augmentés celles que je vous ay, et vous faites connoistre, que vostre penetration va du pair avec cette humeur obligeante, dont la source est un grand fonds d'honnesteté, qui vaut encor mieux que la science la plus profonde.

Ayés la bonté, Monsieur (je vous en supplie) de témoigner encor au R. P. Malebranche, combien je suis obligé à ses honnestetés. Je luy dois beaucoup en metaphysique, et je crois que prenant les idées comme il fait pour l'objet immediat exterieur de nos pensées, il peut dire, que nous les voyons en Dieu. Cependant mon explication est un peu differente de son systeme des causes occasionnelles, à cause de la notion que j'ay de la substance. J'espere qu'il le verra bien tost, et je seray ravi d'en avoir son jugement.

XX.

De l'Hospital an Leibniz.

Je crois que vous aurez receu, Monsieur, il y a deja du temps ma derniere lettre dans laquelle je repondois à vos precedentes, et vous envoyois un petit ecrit latin pour le faire inserer dans les Actes de Leipsic, si vous le jugiez à propos. J'ai receu incontinent apres celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire par laquelle je vois que vous etes tombé dans la même construction de la courbe de balancement que celle dont je vous ecrivis la derniere fois, car je n'y considere point du tout le centre de gravité. Mr. Bernoulli à qui j'avois fait connoistre ma surprise de ce qu'elle ne paroissoit point dans les Actes ni du mois de mars ni de celui d'avril, m'a fait reponse qu'il n'en étoit pas moins surpris que moi, mais qu'on l'avoit mise dans la section 6. tome second des supplémens qui a paru en même temps que le mois d'avril.

Je vous envoye la methode dont je me suis servi pour trouver les rayons des cercles baisans, soit que les ordonnées soient paralleles ou convergentes, avec une methode facile pour trouver les points des caustiques par reflexion et par refraction telle qu'elle est inserée dans les memoires de nôtre academie. Je vous envoye aussi ma methode pour trouver les tangentes des courbes decrites par les foyers *). Elle a un avantage tres considerable par dessus celle de Mr. Tschirnhaus, car outre que la construction est beaucoup plus simple, elle est encore infiniment plus generale, parcequ'elle sert pour trouver les combinaisons de lignes et de leurs puissances, et encore ce qui est à remarquer non seulement pour leur sommes, mais aussi pour leur differences. Je l'aifait copier sur le petit ecrit que je fais imprimer l'y ayantmise.

Il est arrivé un accident bien facheux à Mr. Hugens. Il a l'esprit troublé et ne peut entendre raison sur rien. On dit que son traité des planettes etoit fort avancé d'imprimer. Ce sera une perte considerable pour la republique des lettres.

Je metterai à part quelques unes de mes analyses, puisque vous le souhaitez et je vous les enverrai quand vous me marquerez qu'il sera temps. Elles ne meritent en aucune maniere de trouver place dans l'excellent ouvrage que vous projettez. Vous voulez bien que je vous fasse encore de nouvelles instances pour vous porter à le finir et à le publier incessamment.

Vôtre maniere d'expliquer la communication des substances et l'union de l'ame avec le corps vient de paroître dans les deux derniers Journaux des Sçavans. Je n'ai pas encore eu le loisir de l'examiner. Pour le Pere Malebranche il est à la campagne depuis un mois. Lorsqu'il sera de retour, je ne manquerai pas de lui dire ce que vous me marquez. Je vous prie

*) Siehe unten.

de ne me pas oublier pour la machine d'arithmetique que j'ai fort envie d'avoir. Je suis avec beaucoup d'estime, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 8. juillet (1695).

Proposition.

Probleme.

Soit une ligne courbe AMB (fig. 56) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M aux foyers F, G, H etc. les droites MF, MG, MH etc. leur relation soit exprimée par une equation quelconque: et soit proposé de mener du point donné M la perpendiculaire MP sur la tangente en ce point.

Ayant pris sur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit; et mené les droites FRm, GmS, HmO, on décrira des centres F, G, H, les petits arcs de cercles MR, MS, MO, et du centre M et d'un intervalle quelconque le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E, d'où l'on abaissera sur MP les perpendiculaires CL, DK, EI. Cette preparation etant faite je remarque

1°. que les triangles rectangles MRm, MLC sont semblables; car en ôtant des angles droits LMm, CMR le même angle LMR, les restes RMm, LMC seront egaux et de plus ils sont rectangles en R et L; on prouvera de même que les triangles rectangles MSm et MKD, MOm et MIE sont semblables, et partant puisque l'hypotenuse Mm est commune aux petits triangles MRm, MSm, MOm, et que les hypothenuses MC, MD, ME des triangles MLC, MKD, MIE sont egales entr' elles, il s'ensuit que les perpendiculaires CL, DK, EI ont même rapport entr'elles que les differences Rm, Sm, Om.

2°. que les lignes qui partent des foyers situez du même côté de la perpendiculaire MP croissent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure FM croist de sa difference Rm, pendant que les autres GM, HM diminuent des leurs Sm, Om.

Si l'on suppose à present pour fixer ses idées que l'equation qui exprime la relation des droites FM (x), GM (y), HM (z) soit $ax + xy - zz = 0$ dont la difference est $adx + ydx + xdy - 2zdz = 0$; il est evident que la tangente en M (qui n'est autre chose que la continuation du petit côté Mm du polygone que l'on conçoit composer la courbe AMB) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ses points quelconques m des paralleles mR, mS, mO aux droites FM, GM, HM, terminées en R, S, O par des perpendiculaires MR, MS, MO à ces mêmes droites on ait toujours l'equation $a + y \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = 0$: ou ce qui revient au même en mettant à la place de Rm, Sm, Om leur proportionnelles CL, DK, EI; que la perpendiculaire MP à la courbe doit être placée en sorte que $a + y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$. Ce qui donne cette construction.

Que l'on concoive que le point C soit chargé du poids $a + y$ qui multiplie la difference dx de la droite FM sur laquelle il est situé, et de même le point D du poids x, et le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parceque le terme 2zdz est negatif) du poids 2z. Je dis que la droite MP qui passe par le commun centre de pesanteur des poids supposez en C, D, E, sera la perpendiculaire requise.

Car il est clair par les principes de la mecanique que toute ligne droite qui passe par le centre de pesanteur de plusieurs poids les separe en sorte que les poids d'une part multipliez chacun par leur distance de cette droite sont precisement egaux aux poids de l'autre part multipliez aussi chacun par leurs distances de cette même droite. Donc posant le cas que x croissant y et z croissent aussi, c'est à dire que les foyers F, G, H, tombent du même côté de MP, comme l'on suppose tousjours en prenant la difference de l'equation donnée selon les regles prescrites; il s'ensuit que la ligne MP laissera d'une part les poids en C et D, et de l'autre le poids en E, et qu'ainsi l'on aura $a + y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$, qui etôit l'equation à construire.

Or je dis maintenant que puisque la construction est bonne dans ce cas, elle la sera aussi dans tous les autres; car supposant par exemple que le point M change de situation dans la courbe en sorte que x croissant, y et z diminuent, c'est à dire que les foyers G, H passent de l'autre côté de MP, il s'ensuit 1°. qu'il faut changer dans la difference de l'equation donnée les lignes des termes affectez par dy et par dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI; de sorte que l'equation à construire sera dans ce nouveau cas $a + y \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$. 2°. que les poids en D et E changeront de côté par rapport à

MP, et qu'ainsi l'on aura par la proprieté du centre de pesanteur $a + y \times CL - x \times DK + 2z \times EI = 0$, qui est l'equation à construire. Et comme cela arrive tousjours dans tous les cas possibles, il s'ensuit etc.

Il est evident que le même raisonnement subsistera tousjours tel que soit le nombre des foyers, et telle que puisse être l'equation donnée, de sorte que l'on peut enonçer ainsi la construction generale.

Soit prise la difference de l'equation donnée dont je suppose que l'un des membres soit zero, et soit décrit librement du centre M un cercle CDE qui coupe les droites MF, MG, MH aux points C, D, E dans lesquels soient entendus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantitez qui multiplient les differences des lignes sur lesquels ils sont situez; je dis que la ligne MP qui passe par leur commun centre de pesanteur sera la perpendiculaire requise. Il est à remarquer que si l'un des poids est negatif dans la difference de l'equation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

XXI.

Leibniz an de l'Hospital *).

Un Hollandois, nommé Monsieur Nieuwentiit, a fait des objections contre nostre calcul. Il s'imagine qu'on ne doit jamais rejetter en calculant, que ce qui n'est rien absolument, et non pas ce qui est infiniment petit. Il croit ainsi de pouvoir profiter de nostre calcul, et de l'habiler à sa mode, en mettant des lettres ordinaires, comme e, v etc. au lieu de dx, dy. Mais se trouvant arresté par les differentio-differentielles, il prend le parti de les rejetter absolument comme des riens. Ainsi selon luy ddx n'est pas une quantité, et même le quarré de dx n'en est point, ce qui est plaisant de toutes les manieres, car qui a

*) Dass Leibniz in diesem Briefe die Streitsache mit Nieuwentiit noch einmal berührt, berechtigt zu der Annahme, dass er den Brief vom 14 Jun. nicht abgeschickt hat.

jamais oüi dire, que le quarré d'une quantité n'est rien. Mais il a eu besoin de ce paradoxe, pour soutenir son sentiment. Car dans les calculs de M. Fermat et Slusius (qu'il attribue à M. Barrow) on garde les e et o, et on rejette les termes ou se trouvent leur quarrés. Mais la raison n'est pas celle qu'il suppose, sçavoir que les quarrés ne sont rien. Mais c'est parceque ces termes sont incomparablement moindres que ceux qui sont affectés par des e et o simples, qui restent seuls. Cependant comme il propose ses objections d'une maniere fort honneste, je luy ay repondu avec beaucoup de retenue et je n'ay pas voulu faire sentir au lecteur toute l'incongruité de ce qu'il avance.

Dans le theoreme que je vous avois envoyé dans une de mes precedentes, je m'estois abusé par pure inadvertence. Car au lieu des coefficientes 1, e, ee, e^3, e^4 etc. il falloit mettre, 1, e, $e.\overline{e-1}$, $e.\overline{e-1}.\overline{e-2}$, etc. Ainsi il y aura

$$\int \overline{z^e d^m n} = z^e d^{\overline{m-1}} n - e.z^{\overline{e-1}} d^{\overline{m-2}} n\, dz + e.\overline{e-1}.z^{\overline{e-2}} d^{\overline{m-3}} n\, dz^2$$

etc.

XXII.

Leibniz an de l'Hospital.

(Im Auszuge.)

$\frac{12}{22}$ Juillet 1695.

Je seray ravi d'apprendre vostre jugement sur les meditations inserées dernierement dans vos Journaux du Juin et Juillet. Ce sont les mathematiciens qu'il faut demander pour juger, et non pas le vulgaire des philosophes. Les pensées Metaphysiques ne peuvent manquer de paroistre estranges aux esprits peu accoustumés aux meditations. Mais j'espere qu'ils ne s'en rompront pas la teste. Je suis fort du sentiment du R. P. Malebranche en ce qu'il croit, qu'il n'a y que Dieu qui agisse immediatement sur les substances par une influence reelle. Mais mettant à part la dependance ou nous sommes à son égard, qui fait que nous sommes conservés par une creation continuelle, mettant dis je cela à part pour ne parler que des causes secondes ou du cours ordinaire de la nature; je tiens que sans avoir besoin des nouvelles operations de Dieu, on peut se contenter pour expliquer les choses, de ce que Dieu leur a donné d'abord. Ainsi selon moy toute substance (exprime deja par avance*) et) se produit a elle même par ordre tout ce qui luy arrivera interieurement à jamais, Dieu s'estant proposé de n'y concourir que conformement (à ces delineations primitives ou) à la nature primitive de la chose dont les suites ne sont que des developpemens de l'avenir. Mons. Arnaud avoit crû à la premiere veue, que cela pourroit donner atteinte à la grace, et favoriser les Pelagiens. Mais ayant receu mon eclaircissement, il me dechargea de cette accusation. Cependant je crois pouvoir dire qu'il n'y a rien qui soit plus favorable à nostre liberté que le sentiment que je viens de dire. La clef de ma doctrine sur ce sujet consiste dans cette consideration que ce qui est proprement une unité reelle, Monas.

XXIII.

De l'Hospital an Leibniz.

Je commence, Monsieur, par vous demander mille pardons d'avoir tardé si longtemps à vous faire reponse. J'ai eté si fort accablé d'affaires et d'embaras domestiques que je n'ai point eu l'esprit libre depuis ce temps.

J'ai eté extremement faché de la mort de Mr. Hugens, il etoit d'un tres bon commerce, et j'avois pour lui une estime singuliere. Il a fait à ce qu'on m'a dit un testament dans lequel il a nommé deux Mathematiciens de Holande pour revoir ses manuscrits et les faire imprimer.

Mr. Bernoulli m'a mandé il y a quelque temps qu'il partoit pour prendre possession de la chaire de Mathematique de Groningue, je crois qu'il pourra peut-estre passer par Hanover, et qu'ainsi il aura l'honneur de vous y voir.

Je suis bien aise qu'il y ait déja deux exemplaires de vos machines arithmetiques d'achevées, j'espere que vous penserez à

---

*) Hier hat Leibniz eingeschaltet: hoc omisi, d. h. das was in den Klammern steht.

m'en faire avoir un, quand il sera temps, je vous en serai tres obligé, car j'estime infiniment tout ce qui vient de vous.

J'ai toujours eté du sentiment de Mr. Bernoulli sur le nombre des racines des osculations, et je ne pouvois pas comprendre ce que vous dites dans les Actes de Leipsic du mois d'aoust de l'année derniere que trois intersections d'un cercle et d'une ligne courbe toujours concave du même côté se reunissent en une, il s'ensuit que la quatrieme s'y trouve aussi; car il est evident que si l'on décrit d'un point quelconque de la develop pée de la parabole comme centre et d'un rayon egal à la tangente en ce point terminée par la parabole, un cercle, il touche et coupe la parabole dans le même point ou il la baise, et la va couper ensuitte de l'autre côté de son axe dans un autre point. Il n'est pas surprenant qu'ayant autant de differentes occupations que vous en avez, vous n'ayez pas le loisir d'approfondir quelques fois certaines pensées qui vous paroissent d'abord vrayes. Il est même impossible que dans des matieres nouvelles dont vous êtes l'inventeur, vous vous attachiez toujours aussi scrupuleusement qu'il seroit necessaire en quelques rencontres a en expliquer les consequences. Mais a propos de nouveautez ce que vous avez fait mettre dans les Journaux des Sçavans en porte le caractere. Vôtre hypothese que Dieu en creant un esprit lui donne d'abord toutes les operations et fonctions dont il est capable, et que les suittes ne sont que des developpemens me paroist tres conforme a celle que l'on observe dans la nature, et dont bien d'habiles gens demeurent à present d'accord, qui est que dans le pemier grain de bled par exemple tous les epis et grains de bled qui sont venus depuis et qui viendront jusqu'à la fin des siecles etoient renfermez en racourci, et ainsi du reste. Le R. P. Malebranche a qui j'ai dit que vous souhaitiez d'avoir son sentiment, m'a prié de vous assurer de sa part qu'il a pour vous une estime tres particuliere, qu'a l'egard de vos meditations metaphisiques elles ne lui paroissoient pas assez expliquées et qu'il etoit bien difficile de philosopher par lettres sur ces matieres qui sont d'elles mêmes si abstraites. Il faut avouer que les demonstrations de ce genre n'ont pas la même evidence, que celles des mathematiques, car il me semble qu'on demeure ordinairement attaché au sentiment que l'on a embrassé d'abord, et entre nous je ne crois pas que le Pere Malebranche veuille abandonner son sistence des causes occasionnelles.

J'ai parlé à Mr. l'Abbé Bignon qui m'a dit avoir receu de vôtre part un livre in folio dont il trouva la preface que vous y avez mise excellente, et ensuitte un petit écrit ou il étoit parlé du nombre des livres possibles, et du nombre et du temps des ouvriers qu'il faudroit avoir pour les ecrire. Il ma dit qu'il avoit remis cet ecrit entre les mains de Mr. l'Abbé Galoys pour l'inserer dans nos memoires, et que ce qui a apparemment empeché que cela n'ait été executé est qu'il y a deja longtemps qu'on ne fait plus de memoires, et qu'il falloit que Mr. l'Abbé Galoys eût dans ce temps là plusieurs autres écrits pour composer les memoires parcequ'il les mettoit ordinairement selon l'ordre du temps que l'on les lui avoit donnez. Lorsque je verrai ce dernier, je lui en parlerai et je trouve que nos memoires auroient eté fort honnorez si vous avez bien voulu les enrichir de quelques unes de vos decouvertes.

Il me pareist par ce que vous me mandez de l'ouvrage de Mr. Nieuventiit qu'il n'est pas bien profond dans vos nouvelles inventions, et qu'aparemment il ne les entend point. Il n'etoit pas difficile de repondre a des objections aussi mal fondées que les siennes.

Mon livre s'imprime fort lentement ayant eu des affaires qui m'en ont detourné, cependant je crois qu'il sera achevé d'imprimer à la fin de cette année. Je m'en vais a la campagne pour quelque temps, ainsi si vous me faites l'honneur de m'ecrire vous aurez la bonté de faire envoyer vos lettres chez Mr. le Comte de Ste. Mesme mon pere, rue des lions quartier St. Paul qui aura soin de me les faire tenir et moi d'y repondre exabtement; car il y auroit à perdre pour moi de ne le pas faire. Je suis, Monsieur, avoir bien de l'estime vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 3. Septbre 1695.

XXIV.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover 30 Sept. st. n. 1695.

Ayant trouvé dans le Journal des Sçavans que M. l'Abbé Foucher, chanoine de Dijon, a donné quelques reflexions sur mon

Hypothese philosophique, je prends la liberté de vous adresser ma reponse, vous suppliant de la faire communiquer à M. le President Cousin, qui aura peutestre la bonté de l'inserer dans son Journal, quand il le trouvera à propos. Si je ne croyois que M. l'Abbé Foucher est maintenant en Bourgogne, je l'aurois adressée à luy même. Si j'estois capable de vous rendre quelque service pour vous témoigner mon zele, je me tiendrois honnoré de vos ordres. Vos dimensions des Cycloides se trouvent dans les Actes de Leipzig du mois d'Aoust. Il y a aussi une proposition de M. Bernoulli le jeune, ou il prouve que deux lignes courbes décrites à la fois par l'evolution font leur somme ou leur difference egales à un arc de cercle connu. Cela m'a fait souvenir de ce dont je m'estois avisé autres fois, pour étendre l'usage du centre de gravité dans les dimensions. C'est que le produit du chemin de ce centre mené dans le mobile est égal à la figure engendrée, quand même le centre de la rotation se changeroit continuellement, comme cela arrive dans les evolutions, et quand même une partie du mobile seroit tantost en mouvement et tantost en repos; d'ou il s'ensuit que CDEFC (fig. 57) est egal au rectangle CD par GH, et ADBFCA est egal au rectangle du fil entier BF mené en LNM chemin du centre de gravité du fil tout entier, L estant le centre de l'arc ADB, M de la droite FB, et N du composé de la droite CD et de l'arc DB. Or de ce que CDEF est egal à CD par l'arc GH, joint au theoreme de M. Bernoulli, qui donne la somme ou difference de deux arcs de cette nature, s'ensuit que la difference ou somme de deux aires de pareille hauteur décrites à la fois, est mensurable par la quadrature du cercle. Je ne doute point, que M. Bernoulli ne vous ait informé de son theoreme. Ainsi vous verrés cette consequence d'un coup d'oeil.

Vous verrés aussi, Monsieur, par ma reponse à Mons. l'Abbé Foucher, en quoy mon Hypothese est differente de celle du R. P. Malebranche, ou des Cartesiens, qui sont de son sentiment, et que je crois que les Actions des Ames non seulement ne sçauroient rien changer dans la quantité de la force mouvante des corps (de quoy Mons. Descartes demeuroit d'accord) mais qu'elles ne changent pas même les loix de la direction, comme il avoit pourtant crû. Ainsi les changemens qui se font dans l'un en consequence de ceux de l'autre, ne sçauroient arriver que par l'harmonie pre-établie; et sont toujours entierement conformes aux loix naturelles de chaque substance à part. Peut estre que le R. P. de Malebranche luy même, apres avoir consideré ce que j'en dis le trouvera conforme à la raison. On peut dire que ce n'est pas tant un renversement qu'un avancement de sa doctrine, et que c'est à luy que je suis redevable de mes fondemens sur ce sujet. Nous convenons que l'esprit et le corps n'ont point d'influence l'un sur l'autre, et que toutes les perfections des choses sont tousjours produites par l'operation de Dieu. J'adjoute seulement que ce qu'il produit en A, conforme à ce qu'il produit en B, est aussi exactement conforme aux loix propres qu'il avoit établies pour A, ce qui n'avoit pas esté assez consideré. Cependant s'il a peut estre quelque consideration pour ne se point declarer la dessus, je ne voudrois point le presser, quelque envie que j'aye d'en apprendre son sentiment. Car je sçay combien des mesures on doit garder quelques fois; quoyque dans le fonds je ne voye rien dans cette opinion, non seulement qui puisse estre sujet à quelque censure, mais même qui ne soit avantageux sur tout à la religion, et qui ne tende à une plus grande admiration de la souveraine substance.

Comme M. Jean Bernoulli sera maintenant en chemin apparement pour aller s'etablir à Groningue; et que peut estre durant ce changement il ne pourra pas si bien satisfaire à ce que vous pourriés desiderer de luy à l'egard de l'Allemagne, je vous supplie, Monsieur, de me tenir pour son substitut, et de me charger de tout ce que vous trouverez à propos, particulierement pour les Actes de Leipzig.

Je voy que dans vos belles meditations sur les dimensions des aires des Cycloides vous avés trouvé quelque chose d'Analogique à la quadrature que M. Hugens avoit donné d'un segment de la Cycloide vulgaire. Vous sçavés sans doute que j'ay trouvé celle d'un autre segment ABCA (fig. 58.) qui est egal au triangle ADE. Je ne sçay si vous avés trouvé aussi quelque chose qui y reponde.

Je crois de vous avoir mandé dans une precedente qu'il me semble que la derive doit changer lorsque la vistesse du vaisseau est differente, au lieu que la regle de Mons. Renaud la fait tousjours la même. Il y a quelque temps que je pris la peine d'examiner la chose plus exactement, et je crois d'en pouvoir donner la regle veritable. Je me propose aussi de considerer un jour le reste de la Theorie du Manoeuvre. Car la matiere est belle et me donne occasion de faire voir l'application de mes Dynamiques.

Je regrette de plus en plus la perte de l'incomparable M. Hugens. Il avoit sans doute une infinité de belles choses dans l'esprit, qui ne se reconnoistront point dans les papiers qu'il a laissés. On m'écrit de la Haye, que son Cosmotheoros, dont une seule feuille avoit esté imprimée avant sa mort, sera continué. J'espere aussi qu'on nous donnera sa Dioptrique, et bien d'autres belles meditations. Je suis avec zele etc.

P. S.

Je viens de recevoir tout presentement l'honneur de vostre lettre. Comme il n'y a point de presse pour l'insertion de ma reponse dans le Journal, je continue dans le dessein de vous l'adresser maintenant, quoyqu'elle vous trouvera à la campagne. Je vous suis obligé, Monsieur, et à Mons. l'Abbé Bignon, de ce que vous me mandés de sa part. Vous exprimés si bien et si plausiblement ma pensée philosophique, que je ne le sçaurois faire mieux moy même. Elle a encor bien des suites, qui me paroissent belles et considerables. Je suis obligé aux expressions honnestes et obligeantes du R. P. Malebranche. Je seray content, s'il est persuadé, que ce que j'ay mis en avant, vient plustost de l'amour de la verité, que de celuy de la nouveauté. Cela est si vray, que j'ay retracté plus d'une fois mes opinions, lors même que je les avois deja publiées. Il y a longtemps que je pense à un moyen de donner quelques demonstrations rigoureuses en métaphysique. Mons. Jean Bernoulli me mande qu'il ira droit à Groningue, ayant sa famille avec luy. Il vous aura parlé apparemment d'une ouverture singuliere que je luy ay faite d'une analogie merveilleuse entre les differences ou sommes et les puissances ou multiplications et divisons, en sorte qu'on peut dire dans un certain sens, que les formules avec la suite de leur differences, sçavoir premieres, secondes, troisiemes, sont en progression quasi-geometrique. Il espere d'en tirer bien des consequences. Et en effect il y a des mysteres cachés la dessus. Il l'a communiqué à M. le Professeur son frere et j'en suis bien aise, a fin qu'on approfondisse junctis studiis. Vous en voyés un echantillon icy ad marginem.*) La somme

*) Siehe unten.

n'estant qu'une difference, negative on peut demander ce que c'est, qu'une difference dont l'exposant est un nombre rompu, on le peut exprimer per seriem infinitam, sed quid est in Geometria?

Puisqu' aussi bien cette page est vuide, j'adjouteray quelques remarques tirées de l'analogie entre les puissances et les differences, par exemple, $p^{-1}\,\overline{x+y} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{xx} + \frac{yy}{x^3} - \frac{y^3}{x^4}$ etc. $= p^{-1}x \,.\, p^0 y - p^{-2}x \,.\, p^1 y + p^{-3}x \,.\, p^2 y - p^{-4}x \,.\, p^3 y$ etc. Eodem modo $\int \overline{xy} = d^{-1}\,\overline{xy} = d^{-1}x \,.\, d^0 y - d^{-2}x \,.\, d^1 y + d^{-3}x \,.\, d^2 y - d^{-4}x \,.\, d^3 y$ etc. ou bien, si au lieu de la lettre x, on mettoit dx et au lieu $d^{-..}$ ... $d^{-..}$ on mettoit $\int^{..}$ il y auroit $\int \overline{ydx} = yx - dy \int x + d^2y \int\int x - d^3y \int^3 x$ etc. et posant dx constante, il y auroit $\int \overline{y\,dx} = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{1.2}xx\,dy + \frac{1}{1.2.3}x^3 d^2y - \frac{1}{1.2.3.4}x^4 d^3y$ etc. ce qui est une proposition que M. Jean Bernoulli a deja publiée mais trouvée tout d'une autre façon, et que j'avois decouverte il y a plusieurs années par une voye encor toute differente de la sienne que je luy ay communiquée. Il est vray que M. Bernoulli a aussi remarqué que cette proposition vient de nostre analogie quoyqu'il l'ait encor trouvée un peu autrement. J'en tire une encor plus generale, dont celle là n'est qu'un cas, car comme $p^e\,\overline{x+y} = x^e + \frac{e}{1}x^{e-1}y^1 + \frac{e.\overline{e-1}}{1.2}x^{e-2}y^2 + \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{1.2.3}x^{e-3}y^3$ etc. $= p^e x \,.\, p^0 y + \frac{e}{1}p^{e-1}x \,.\, p^1 y + \frac{e.\overline{e-1}}{1.2}p^{e-2}x \,.\, p^2 y + \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{1.2.3}p^{e-3}x \,.\, p^3 y$ etc. il y aura de même $d^e\,\overline{xy} = d^e x\, d^0 y + \frac{e}{1}d^{e-1}x \,.\, d^1 y + \frac{e.\overline{e-1}}{1.2}d^{e-2}x \,.\, d^2 y + \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{1.2.3}d^{e-3}x \,.\, d^3 y$ etc. $= d^e x \,.\, y + \frac{e}{1}d^{e-1}x \,.\, dy + \frac{e.\overline{e-1}}{1.2}d^{e-2}x \,.\, ddy$ etc. ubi rursus pro x potest poni dx et si sit quantitas negativa $= -n$, convertetur d^e in $\int^n$.

Vous voyés par là, Monsieur, qu'on peut exprimer par une serie infinie une grandeur comme $d^{\frac{1}{2}}\,\overline{xy}$, ou $d^{1:2}\,\overline{xy}$, quoyque cela paroisse eloigné de la Geometrie, qui ne connoist ordinairement que les differences à exposans entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'egard des sommes, et pas encòr celles, dont les exposans sont rompus. Il est vray, qu'il s'agit encor de donner $d^{1:2}x$ pro illa serie; mais encor cela se peut expliquer en quelque façon. Car soyent les ordonnées x en progression Geometrique en sorte que prenant une constante $d\beta$ soit $dx = xd\beta : a$, ou (prenant a pour l'unité) $dx = xd\beta$, alors ddx sera $x.\overline{d\beta}^2$, et d^3x sera $= x.\overline{d\beta}^3$ etc. et $d^ex = x.\overline{d\beta}^e$. Et par cette adresse l'exposant differentiel est changé en exposant potentiel et remettant $dx : x$ pour $d\beta$, il y aura $d^ex = \overline{dx : x}^e . x$. Ainsi il s'ensuit que $d^{1:2}x$ sera egal à $x.\sqrt[2]{dx : x}$. Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des consequences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a gueres de paradoxes sans utilité. Vous estes de ceux qui peuvent aller le plus loin dans les decouvertes, et je seray bientost obligé ad lampadem aliis tradendam. Je voudrois avoir beaucoup à communiquer, car ce vers: Scire tuum nihil est nisi te scire hoc sciat alter, est le plus vray en ce que des pensées qui estoient peu de chose en elles mêmes peuvent donner occasion à des bien plus belles.

$p^0\overline{x+y}$	$p^0x.p^0y$	id est	1
$p^1\overline{x+y}$	$1.p^0xp^1y + 1.p^1xp^0y$		$1y + 1x$
$p^2\overline{x+y}$	$1.p^0xp^2y + 2.p^1xp^1y + 1.p^2xp^0y$		$1y^2 + 2xy + 1y^2$
$p^3\overline{x+y}$	$1.p^0xp^3y + 3p^1xp^2y + 3p^2xp^1y + 1p^3xp^0y^2$		$1y^3 + 3y^2x + 3yx^2 + x^3$

d^0xy	d^0xd^0y	id est	xy
d^1xy	$1d^0xd^1y + 1d^1xd^0y$		$1xdy + 1ydx$
d^2xy	$1d^0xd^2y + 2d^1xd^1y + 1d^2xd^0y$		$1xddy + 2dxdy + ddxy$
d^3xy	$1d^0xd^3y + 3d^1xd^2y + 3d^2xd^1y + 1d^3xd^0y$		$1xd^3y + 3dxddy + 3ddxdy + 1d^3xy$

XXV.

De l'Hospital an Leibniz.

J'ai receu, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 30. Septb. dernier avec vôtre reponse a Mr. Foucher. Je ne manquerai pas de la porter moi même a Mr. le President Cousin aussi tost que je serai de retour a Paris qui ne sera que dans le mois de janvier prochain. Je ne doute pas qu'il ne se fasse honneur et plaisir de ce que vous voulez bien de temps en temps enrichir ses Journaux de quelques unes de vos decouvertes. La loi que vous donnez pour la direction des corps à la fin de vôtre lettre est tout a fait belle, je voudrois bien savoir l'endroit ou vous l'avez demontrée, mais pour la force des corps que vous distinguez toujours de leur quantitez de mouvement, je vous avoue que j'ai beaucoup de difficultez la dessus, et je ne puis comprendre qu'un corps puisse agir autrement que par sa masse et par sa vitesse, et je ne vois point qu'on ait demontré que la même quantité de mouvement ne se conserve point dans la nature. Je sçais bien que le mouvement paroist se perdre dans les experiences que l'on fait, mais ne pourroit il pas arriver, qu'il se communiqueroit à une matiere invisible contenue dans les pores des corps choqués. Mais quand même on accorderoit que la même quantité de mouvement ne se conserveroit pas dans la nature, il ne s'en suivroit pas que la quantité de la force en fust differente, et il me semble qu'on pourroit penser en ce cas, que la loy que Dieu a etablie consiste en ce, que la même quantité de mouvement se conserve toujours non pas absolute mais relative vers un certain costé, ce qui s'accorderoit tres bien avec toutes les experiences de Mr. Mariotte et autres. Enfin je souhaiterois extremement qu'on pust faire quelques experiences convainquantes par lesquelles on pust s'assurer, si la force est distinguée ou non de la quantité de mouvement, car il me semble qu'il faudroit bien demontrer ce principe et sensiblement avant que d'en tirer des consequences, car etant un prealable necessaire. Il y a encore un autre principe dont on vous est redevable, et dont je conviens avec vous, et qui est d'une utilité merveilleuse pour resoudre plusieurs questions tant phisiques que mathematiques, c'est que la nature n'agit point per saltum, et qu'ainsi le repos peut être consideré comme un mouvement infiniment petit etc. Au reste vôtre systeme philosophique previent beaucoup de difficultez, et fait voir une sagesse infinie dans l'autheur du monde d'avoir si bien combiné les loix de l'union des esprits avec les corps que ce qui arrive dans les uns en consequence des volontez des autres est toujours entierement conforme aux loix naturelles de chaque substance a part.

L'usage du centre de gravité pour les dimensions est beaucoup augmenté par vôtre theoreme, et je vois aisement qu'en y joignant celui de Mr. Bernoulli on peut trouver une infinité d'espaces de même hauteur qui etant joints deux a deux soient egaux à des cercles. Je ne sçavois point vôtre quadrature absolue du segment ACBA de la cicloide ordinaire qui est egal au triangle ADE (fig. 58) en supposant que le point D soit le centre du cercle generateur. Je trouve qu'elle depend de cette autre dont j'ai parlé, qui est que l'espace AEB renfermé par les arcs AE, AB, et par la droite EB est egal au quarré du rayon, car le segment ACBA est toujours la moitié de cet espace en quelqu'endroit que tombe le point D.

Vous ouvrez un grand champ de meditations par l'analogie merveilleuse que vous avez decouverte entre les differences et les puissances, et les consequences que vous en tirez déja et dont vous avez bien voulu me faire part sont tres belles. Je trouve bien difficile de se former une idée nette de ces differences qui ont pour exposans des nombres rompus et que vous avez trouvé le moyen d'exprimer par des suittes infinies. Je suis bien aise que vous en ayez fait part a Mr. Bernoulli le jeune. Je le crois tres propre a pousser loin nos pensées et a perfectioner vos vûes. Il a une sagacité merveilleuse pour toutes ces matieres. J'en viens de recevoir une lettre par laquelle il me marque qu'il est arrivé a Groningue, et qu'il se prepare a faire une harangue inaugurale. Je suis avec bien de l'estime, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Ouques le 1. Decembre (1695).

XXVI.

Leibniz an de l'Hospital.

le 15 januar 1696.

Puisque vous jugés, Monsieur, que ma reponse à Mons. l'Abbé Foucher peut paroistre, je m'en remets à vostre jugement qui est des plus éclaires; et ce sera tousjours assez à temps qu'elle entrera dans le Journal des Sçavans par vostre entremise. La Loy de la Nature, que j'y ay touchée a esté demonstrée dans un projet de mes Dynamiques que j'avois ebauché en Italie et laissé même à un ami de Florence intelligent en ces matieres, qui se chargea de l'impression. Mais ce fut moy qui l'a suspendue, car je luy en devois envoyer la fin ce que j'ay differé, à cause de quantité de meditations qui me sont survenues. Pour ce qui est de vos doutes sur mon opinion de la Force, vous pouvés bien vous asseurer, Monsieur, que rien ne me peut estre plus agreable que vos objections, puisqu' elles partent d'un esprit aussi penetrant que le vostre. D'ailleurs plus les objections sont fortes et poussées, et plus elles me plaisent, car elles ne sçauroient manquer ainsi d'estre instructives, soit que je puisse répondre ou que je sois obligé de me rendre; ce que je feray asseurement au besoin avec la même impartialité, que j'aurois si on les avoit faites à un autre.

Je demeure d'accord avec vous, qu'un corps agit par sa masse et par sa vistesse; aussi n'est ce que par ces choses que je determine la force mouvante. Mais il ne s'en suit point que les forces sont en raison composée des masses et des vistesses. Les cones droits sont determinés par la hauteur et par la base du triangle generateur, mais ils ne sont pas en raison composée de ces deux quantités. Cependant comme deux de ces cones sont egaux en grandeur quand les triangles generateurs ont la même base et la même hauteur, il est vray de même, que deux corps sont egaux en forces, quand leur masses et leur vistesses sont egales. D'on j'infere qu'en corps AB (fig. 59) ayant vistesse H, et un corps BCD, double du corps AB, ayant vistesse M egale à vistesse H, la force du double corps BCD, sera double de celle du simple corps AB, lorsque leur vistesses M et H sont egales. Car BCD, ayant deux parties BC et CD, egales chacune à AB et chaque partie de BCD, ayant sa vistesse egale à celle du tout, celle de BC sçavoir L sera egale à M, et par consequent à H, et de même celle de CD sçavoir N, sera aussi egale à M, ou bien à H. Donc le cas de BC avec vistesse L est precisement congruant au. cas AB avec vistesse H et par consequent equipollent; de même le cas CD avec vistesse N. Donc le cas BCD avec vistesse M contient precisement deux fois le cas AB avec vistesse H, et par consequent il contient aussi le double de sa force; ou bien un double corps est double en force d'un simple corps de même vistesse. Cela n'est que trop clair, dirés vous, Monsieur. Cependant c'est là le fondement de ma Dynamique, et même de toute l'estime mathematique ou mensuration; pouveu qu'on joigne icy ce seul principe, que l'effect entier est equipollent à sa cause. Car c'est de leur rapport qu'il s'agit icy puisque la force se connoist par l'action. Et comme l'estime se fait par repetition de la mesure, il y a deux repetitions, une formelle que j'appelle congruence, quand le même sujet dans le quel la force se trouve est repeté; l'autre virtuelle que j'appelle equipollence, quand cette repetition formelle ou congruence ne se trouve pas dans les sujets mêmes, qu'on compare, mais dans leur causes pleines, ou dans leur effects entiers. Mais on ne sçauroit demonstrer ny par le principe de la congruence, ny par celuy de l'equipollence que le corps simple DE, avec vistesse double P, est double justement en force, du corps simple AB avec vistesse simple H; ou bien que le corps double BCD avec vistesse simple M, est egal en force du corps simple DE avec vistesse double P. La congruence n'y est point et l'equipollence monstre le contraire, car prenant ED avec P, il est vray que la vistesse H est comprise deux fois en P, mais le corps AB n'est pas compris deux fois dans le corps DE. Ainsi il n'y a point de congruence repetée. Et de dire que la vistesse recompense virtuellement le corps, en prenant pour mesure de la force le rectangle de la masse et de la vistesse, c'est prendre quelque chose qui n'est point demonstrée, et donc même le contraire se demonstre par le principe de l'equipollence. Ainsi comme les cas de deux corps de differente vistesse ne sçauroient estre comparés par la simple congruence, ou repetition exacte d'un même, ou d'un congruant, il faut avoir recours à l'equipollence de la cause et de l'effect; c'est à dire il faut chercher s'il n'y a pas moyen de produire par un corps de double vistesse un effect qui repete precisement celuy d'un corps de simple vistesse. Or cela se peut obtenir de plusieurs façons. Car par exemple si un corps de simple vistesse peut elever une livre à un pied, un corps de double vistesse peut elever precisement quatre fois une livre à un pied, soit qu'il eleve quatre livres à un pied, ou qu'il eleve une livre à quatre pieds; car l'un et l'autre est precisement la repetition quadruple de l'elevation d'une livre à un pied. De sorte que (pour le dire en passant) l'egalité de l'elevation d'une livre à quatre pieds, et de quatre livres à un pied, se demonstre aussi par le principe de la congruence. Cela prouvé donc qu'un corps d'une double vistesse est quadruple en force d'un corps pareil d'une simple vistesse. Et si le corps A (fig. 60) avec une vistesse simple AQ peut bander un ressort Q (qu'il rencontre en son chemin) à un certain degré de tension, sans rien pouvoir d'avantage, le corps pareil E avec une vistesse double ET pourra bander precisement à un degré pareil quatre de tels ressorts T, S, R, Q. Et qui plus est: un corps de vistesse double peut donner la vistesse simple non seulement à deux, mais à quatre corps qui luy sont pareils en grandeur, comme il est aisé de demonstrer. Donc (par le principe de l'equipollence de l'effect et de la cause) un corps de vistesse double est equipollent à quatre corps pareils de vistesse simple; mais (par le principe de la congruence) quatre corps egaux qui ont la vistesse simple, sont quadruples en force d'un seul entre eux dont la vistesse est simple; donc enfin un corps simple de vistesse double est quadruple en force d'un corps simple de vistesse simple.

Vous voyés, Monsieur, comment icy vis unita est fortior. Car c'est à cause de l'inertie naturelle des corps, que Kepler a observée (luy ayant même imposé le nom) que les substances agissent seulement, quantum non noxia corpora tardant, pour donner aux paroles de Virgile un sens philosophique. Ainsi quand il y a un plus grand degré de vistesse avec moins de matiere, il y a moins d'empechement ou plus de force, que s'il y avoit la même quantité de mouvement, mais avec plus de materialité. Cela ne soit dit que pour illustrer. Mais les preuves se voyent dans ce que j'ay dit auparavant. J'en ay même d'autres encor plus à priori et plus abstraites, que je proposeray un jour et que j'ay deja promis autresfois, en proposant et soutenant mon objection contre les Cartesiens; et ces preuves s'accordent toutes exactement à donner les mêmes conclusions. Vous voyés que l'égalité de la cause et de l'effect, c'est à dire l'exclusion du mouvement perpetuel mechanique donne mon estime de la force, qui par cela même se conserve tousjours la même, c'est à dire il se conserve tousjours ce qu'il faut pour produire le même effect; elever le même poids à la même hauteur, bander le même ressort au même degré, donner la même vistesse au même corps etc. sans qu'on puisse gagner quelque chose et sans qu'on perde aussi quand on prend l'effect tout entier, quoyque une partie en soit souvent absorbée par les parties insensibles des corps ou de l'ambiant, qu'il ne faut pourtant pas negliger de mettre en ligne de compte, mais il n'y a rien qui prouve que la quantité de mouvement se doit conserver dans la nature; l'experience y est contraire dans les corps visibles, et la raison n'offre rien qui nous porte à la croire cette conservation dans la matiere invisible, ou les effects des corps sensibles doivent avoir lieu à proportion. Il est manifeste aussi que ce que je dis sur ces corps sensibles n'est point fondé sur les experiences du choc, mais sur des principes qui rendent raison de ces experiences mêmes; et qui sont capables de determiner les cas dont on n'a pas encor ny experiences ny regles; et cela par ce seul princip de l'egalité de la cause et de l'effect.

Vous dites, Monsieur, que quand on accorderoit que la quantité de mouvement ne se conserve point dans la nature, il ne s'ensuivroit pas que la quantité de la force en est differente. Mais il se trouve que la force se conserve tousjours, elle est donc differente de ce qui ne se conserve point. De plus on voit par ce que dessus que l'estime de ce qui se doit conserver c'est à dire du pouvoir de produire tousjours le même effect, est differente de l'estime de la quantité de mouvement parce qu'il se peut que lorsque ce pouvoir est doublé, la quantité de mouvement ne se redouble point; par exemple, lorsqu'on veut doubler le pouvoir d'un même corps, on ne doit point doubler sa quantité de mouvement, parce que ainsi on luy donneroit un pouvoir quadruple. Car pour doubler la quantité de mouvement d'un même corps, on luy doit donner une double vistesse, mais alors il aura le pouvoir de faire un effect mechanique quadruple de celuy qu'il pouvoit produire auparavant; et s'il pouvoit elever auparavant une livre à un pied, il pourra maintenant elever quatre livres à un pied. Et la même quantité de mouvement doublée de differentes façons donne des pouvoirs inegaux. Car la quantité de mouvement qui se trouve dans un corps d'une livre, qui n'a qu'un simple degré de vistesse, peut estre redoublée de deux façons, l'une se fait en redoublant le corps et gardant la vistesse, en sorte qu'on ait deux livres avec un simple degré de vistesse; et l'autre se fait en gardant le corps et redoublant la vistesse, en sorte qu'on ait une livre avec deux degrés de vistesse. Or ces deux cas sont inegaux en pouvoir, et le second peut le double du premier, car si deux livres avec un simple degré de vistesse peuvent elever deux livres à un pied; une livre avec deux degrés de vistesse pourra elever quatre livres à un pied.

Vous poursuivés, Monsieur, qu'il semble qu'en cas que la quantité de mouvement ne se conserve pas *absolute*, elle se conserveroit au moins *relative* vers un certain costé; conformement aux experiences de M. Mariotte, et autres. Je reponds qu'il est vray qu'il se conserve tousjours ce que j'appelle la même quantité de progrés vers un certain costé, et cela est justement la regle de la conservation de la même quantité de direction, que j'ay avancée dans ma reponse à M. l'Abbé Foucher et que j'ay même demonstrée à priori, par le principe de l'egalité de la cause et de l'effect, dont je tire ma Dynamique, comme j'ay dit au commencement de cette lettre. Mais il faut considerer que la quantité de progrés n'est coincidente avec la quantité de mouvement c'est à dire avec la somme des mouvemens d'un chacun, que dans le cas ou les corps tendent tous d'un même costé, mais lors qu'ils tendent en sens contraire, la quantité du progrés de deux corps vers un des costés est la difference de leur mouvemens particuliers. Et quand il y en a plusieurs corps, le mouvement de celuy qui va en sens contraire au costé vers lequel on estime le progrés, ne doit estre adjouté qu'avec le signe de moins, c'est à dire cette quantité de mouvement doit estre soustraite, son progrés estant le negatiy de la quantité de son mouvement, de sorte que cette quantité du mouvement respectif ou du progrés est proprement la quantité de la direction que M. des Cartes a fort bien distingué de celle du mouvement. Mais il s'est trompé en croyant que la quantité du mouvement se conserve, même à l'egard de l'ame, et point celle de la direction, car c'est justement le contraire.

Vous conclués ce sujet, en disant que vous souhaiteriés extremement qu'on pût faire quelques experiences convaînquantes, par les quelles on pût asseurer si la force est distinguée ou non de la quantité de mouvement parce qu'il faudroit bien demonstrer ce principe, et sensiblement, avant que d'en tirer des consequences. Ce souhait fait connoistre vostre exactitude, et l'amour que vous avés pour la verité. Ce qui me fait croire que toutes les experiences qu'on pourroit encor projetter, s'accorderoient aveo mon systeme, est, que toutes celles qu'on a déja faites s'y accordent; soit qu'on employe la pesanteur ou des ressorts ou qu'on se serve du choc des corps. Et comme la science du mouvement causé par la pesanteur est plus simple et a déja esté reglée par Galilei et confirmée par l'experience, je m'en suis servi pour etablir mon estime et pour rendre raison par là de tout ce qui arrive dans le choc des corps, et je trouve tousjours qu'il se conserve la même quantité de la force (même absolue) en mon sens, mais non pas tousjours la même quantité de mouvement. Je n'ay pas encor fait l'experience des ressorts, mais cependant je ne doute point qu'elle ne verifie ce que j'ay avancé des quatre ressorts Q, R, S, T pareils et pareillement bandables par le corps de deux degrés de vistesse, qui les rencontreroit dans son mouvement horisontal; lorsque ce même corps n'ayant qu'un simple degré de vistesse n'en pourroit bander ainsi, qu'un seul. Et je ne voy pas quelle experience plus decisive se puisse faire dans les corps sensibles. Cependant on peut faire telles qu'on voudra, et j'ose repondre qu'elles seront d'accord avec ce que je viens d'expliquer puis que tous mes sentimens ne sont appuyés que sur la seule egalité de la cause et de l'effect, confirmée déja par une infinité d'experiences, et par le soin que prend la nature d'eluder tout ce qu'on peut inviter pour le mouvement perpetuel mecanique ou la cause seroit surpassée par son effect.

Je suis bien aise, que mon principe de la continuité, suivant lequel la nature n'agit pas per saltum ne vous a point deplû, Monsieur. Je vois que le R. P. de Mallebranche n'a pas eu le loisir de le mediter assez, parcequ'il y a encor des regles dans son dernier discours imprimé sur le mouvement, qui ne s'y accordent point. Mais je n'y ay point voulu toucher, pour ne luy point donner de deplaisir; car il s'occupe à tant d'autres belles meditations qui ne luy permettent pas de donner assez de loisir à ces matieres.

Au reste je seray bien aise d'apprendre ce que de habiles philosophes diront un jour sur mes pensées, sur tout lorsque ma réponse à M. Foucher paroistra. J'espere que plus on les examinera, plus elles paroistront solides. Ma quadrature du segment cycloidal ABCA (fig. 61) egal au triangle, m'estoit venue par ce même theoreme que vous avés trouvé aussi comme je vois; et que je tirois d'un autre encor plus general, que voicy. Soit une ligne quelconque ACB, par A soit menée AT, et du point C de la ligne soit menée la tangente en C, sçavoir CT, rencontrant AT en T, je dis que la figure faite par toutes les AT prises dans les ordonnées FC est egale au double segment ACA. Ce qui se prouve incontinent par le calcul des differences. Or dans la Cycloide GC est tousjours egale à AT, donc la figure des toutes les GC, ou la Trompe AGCA est égale au double segment ACA. Cependant dans le cas particulier du segment ABCA j'en avois donnée une demonstration independante du theoreme generale, que feu M. l'Abbé de la Roque avoit inserée dans son Journal des Sçavans, mais comme l'imprimeur y a fait des fautes pour ne pas avoir bien exprimé ce que j'avois mis, il semble que c'est une espece d'enigme. Quant aux differences dont les exposans sont des nombres rompus, j'avoue qu'on ne les sçauroit comprendre, mais ces sortes de grandeurs quand elles ne seroient qu'imaginaires peuvent servir à trouver des verités réelles. Et il est tousjours vray qu'elles ont fundamentum in re. Je vous supplie d'excuser la prolixité de ma lettre, à la quelle je ne m'attendois pas en la commençant, et de croire que je seray tousjours avec zele etc.

XXVII.

De l'Hospital an Leibniz.

Je ne suis de retour de la campagne, Monsieur, que depuis quelques jours. La cause de ce retardement vient d'une maladie assez facheuse que j'ai eue des le commencement de cette année et dont je ne suis pas encore tout a fait remis. C'est ce qui m'empesche de pouvoir m'appliquer presentement. Je remets donc a une autre occasion a vous faire reponse sur ce qu'il y a de science dans vôtre derniere. Mon premier soin a eté aussitost apres mon retour d'aller trouver Mr. le President Cousin et de lui porter vôtre reponse a Mr. Foucher. Il m'a promis de la mettre incessamment das ses Journaux et d'y marquer qu'il y a fort longtemps que vous l'avez envoyée. Je vous prie de ne pas oublier que vous m'avez promis de me faire faire une de vos machines d'arithmetique, je crois que vous m'avez marqué dans quelques unes de vos precedentes que l'ouvrier avoit fini celles qui etoient de commande. Je vous en serai infiniment obligé, etant avec une estime parfaite, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 19. Mars (1696).

XXVIII.

Leibniz an de l'Hospital.

Mon ouvrier jusqu'icy a esté obligé de faire le tout luy seul. A peine acheverat-il cette année le second exemplaire. Pour avancer il faut que je puisse prendre des mesures pour faire plusieurs pieces à la fois. Content cependant d'avoir fait en sorte que l'invention ne se perdue plus, quoyque bien loin d'en avoir tiré de l'utilité, j'y aye fait des tres grands frais.

Vostre lettre qui parle d'une maladie facheuse que vous avés sontenue, m'auroit allarmé extremement, si elle ne m'avoit appris en même temps, que vous l'avés surmontée. C'est de quoy je suis fort rejoui, et souhaitte de tout mon coeur que ce soit un affermissement de vostre santé pour longtemps, comme en effect les grandes maladies sont souvent suivies d'une melioration generale de nostre constitution. Plût à Dieu qu'on pût faire que les Medecins philosophassent, ou que les philosophes medicinassent; je crois qu'on pourroit aller bien loin, mais j'ay souvent preché inutilement là dessus surdis fabulam.

XXIX.

Leibniz an de l'Hospital.*)

Hanover $\frac{20}{30}$ Juillet 1696.

Je serois fort en peine de vostre santé, si je n'esperois, Monsieur, que vostre silence doit venir de ce que vous profités de la belle saison à la campagne. Outre que ma lettre ne vous ayant point donné beaucoup de matiere pour ecrire, vous en attendés peutéstre d'ailleurs pour m'en gratifier. Il est vray, que si vous voulés ouvrir vos propres tresors, vous n'avés point besoin de secours pour écrire des nouveautés en matiere de sciences.

De mon costé, quoyque je n'y puisse presque songer qu'à la derobbée, parceque ce n'est pas ce qu'on demande de moy dans ce pays cy, je ne laisse pas de faire quelques fois de pas qui pourront conduire un jour les autres plus loin, pour perfectionner l'Art de mediter, qui est le plus grand et le plus important de tous, parceque tous les autres en sont les fruits. Je trouve que pour le perfectionner deux sciences servent le plus, la Geometrie pour ce qui est des demonstrations, et la Jurisprudence lorsqu'il s'agit d'appuyer sur des conjectures.

Je ne sçay si je vous ay mandé, Monsieur, que Mons. Bernoulli professeur de Groningue apres avoir pesé meurement tout ce qui a esté agité entre mes antagonistes et moy sur la Dynamique, a pris enfin mon parti. Ainsi l'ayant fait avec connoissance de cause, il a pû adjouter quelques pensées du sien, qui sont fort bonnes, comme par exemple, quand il monstre que la proposition capitale de Mons. Hugens sur le centre d'oscillation n'est qu'une suite fort aisée de ma maniere d'estimer la force. Mais je croy qu'il a esté obligé de faire une petite trève avec nos methodes analytiques, d'autant plus que sa charge de Professeur l'oblige de penser non seulement aux recherches nouvelles, mais aussi aux preceptes ordinaires en faveur de ses auditeurs.

---

*) Leibniz hat bemerkt: anders abgangen.

J'esperois que l'ouvrage de feu M. Hugens, intitulé Cosmotheoros, paroistroit bien tost, parceque j'avois oui dire, qu'il l'avoit achevé un peu avant que de mourir. Mais j'en n'entends point parler, et je serois bien faché s'il ne paroissoit pas. Car il y a de l'apparence qu'il y aura des pensées considerables, et dignes de l'auteur.

J'ay vû la Dioptrique de Mons. Hartsoeker, mais je n'ay pas encor vû ses principes. Sur ce qu'en dit le Journal des Sçavans, j'y trouve bien des difficultés, et je suis persuadé qu'on ne sçauroit supposer deux elemens dont l'un soit parfaitement dur, l'autre parfaitement fluide; parceque je tiens pour demonstré, que chaque corps a un certain degré de fermeté en comparaison des plus fluides, et un degré de fluidité par comparaison de plus fermes. Je voy aussi que M. Hartsoecker a entrepris de rendre raison de la Theorie Magnetique de feu M. Bond Anglois, qui croyoit d'avoir demonstré la raison des variations de l'aiguille aimantée, et avoit publié la dessus un livre intitulé Longitude found, la longitude trouvée. Mais on me manda alors d'Angleterre, que la Societé Royale n'en estoit nullement contente, et que les phenomenes n'y repondoient point. Aussi quelque autre y avoit opposé un livre intitulé Longitude not found, la longitude non trouvée. J'ay l'un et l'autre de ces livres. Il suppose un Pole Magnetique, au quel il attribue un certain mouvement, mais si cela estoit, toutes les aiguilles regarderoient le même point en même temps, ce qui n'est point. Je n'ay pas bien compris ce qu'on disoit un jour d'une pensée de M. de la Hire, pour avoir un instrument magnetique sans declinaison, dont je vous supplie, Monsieur, de m'apprendre vostre sentiment, si vous en estes informé; aussi bien que si nous aurons un jour la nouvelle mappemonde de l'observatoire; et si on a chez vous d'autres decouvertes utiles ou curieuses.

Il est vray, que la guerre est un grand obstacle à l'avancement des sciences. Nous nous flattons par tout d'une paix, qui pourroit donner une bonne fin à ce sicle presque achevé. Je souhaitte qu'on la fasse en sorte qu'elle puisse durer bien avant dans le suivant.

Que fait le R. P. Malebranche? Il y a long temps que je n'entends plus rien de luy. J'espere cependant qu'il se portera bien, et je doute point, qu'il n'ait tousjours des belles meditations, aussi bien que ses amis, qui suivent le même train de penser.

Monsieur Nieuwentiit a fait inserer dans les Actes de Leipzig, un grand discours pour repondre à mes remarques sur son ouvrage; mais comme il estoit trop prolixe, Messieurs de Leipzig s'en sont excusés; et comme je crois que s'il ne se rend point sans estre opiniastre, ce ne sçauroit estre que par un mesentendu, j'ay conseillé de le renvoyer à l'instruction de Mons. Bernoulli à Groningue, qui est maintenant son voisin.

Mons. Bernoulli, professeur à Bâle, m'a donné avis, que vous aviés dessein, Monsieur, de publier un traité du Calcul des Differences; je luy en ay rendu graces, luy marquant en même temps, que vous m'aviés fait l'honneur de m'en donner part. Entre nous, il m'a paru, qu'il aimeroit peutestre mieux d'en écrire par prevention, quoyqu'il n'en dise rien. Il a du merite, mais suivant les plaintes que son frere fait de luy, et suivant d'autres marques, il doit estre d'une humeur un peu extraordinaire. Je souhaitte de tout mon coeur que nous ayions le bien de voir vostre ouvrage où je m'attends d'apprendre considerablement. Cependant M. Bernoulli de Bâle m'a envoyé quelques echantillons d'Analyse, qui pourroient estre joints un jour à mon traité que je medite sur nos calculs sous le titre de la Science de l'infini. Et j'en espere encor bien d'autres de vostre liberalité, pour les mettre entre les additions de mon ouvrage, si vous le jugés a propos. Je l'entends si vous ne les employés pas vous même. Je suis avec passion etc.

P. S.

Oserois je vous supplier, Monsieur, de faire donner la cyjointe à Mons. des Billettes, mon ancien ami, qui l'estoit aussi de feu M. Arnaud, avec lequel il demeuroit dans une même maison du Fauxbourg S. Jaques. J'espere qu'il sera encor en vie, il l'estoit encor quand j'écrivois à feu M. Pelisson. Les amis du R. P. Malebranche sçauront sans doute où M. des Billettes demeure.

XXX.

De l'Hospital an Leibniz.

A Paris le 20. Juillet (1696).

Je n'ai receu que depuis peu, Monsieur, la lettre que vous me faites l'honneur de m'ecrire du 25e May. Celui qui l'apporta au logis dit que la raison etoit mon changement de demeure.

J'ai donné a un frere de Mr. Bernoulli qui passoit par ici pour s'en retourner a Basle trois exemplaires de mon livre qui ne venoit que d'être achevé d'imprimer, sçavoir un pour vous, Monsieur, un pour Mr. Menkenius et le troisieme pour son frere le Professeur a Basle, a qui je les ai addressez tous trois et l'ai prié en mesme temps de les faire tenir. Ainsi je crois que vous pourrez l'avoir bien tost.

Quoique ma santé soit assez bonne a present, je ne puis cependant m'appliquer encore a des speculations abstraites sans que j'en ressente quelque incommodité. C'est ce qui m'a fait prendre le parti de demeurer quelque temps sans penser a ces sortes de sciences. Si tost que je le pourrai, je ne manquerai pas d'examiner avec soin ce que vous m'avez mandé dans une de vos lettres touchant vos Dynamiques, et je vous en marquerai librement mon sentiment, puisque vous le souhaitez. Je compte pour beaucoup que vous avez convaincu sur Bernoulli, professeur a Groningue. C'est un jeune homme d'une grande sagacité, et je ne connois personne plus propre que lui pour entrer dans les ouvertures nouvelles que vous avez, et les pousser aussi loin qu'elles peuvent aller. Nôtre correspondance a été fort interrompue depuis son sejour en Holande à cause de ma maladie.

Au reste, Monsieur, j'ai pris la liberté d'anoncer vôtre ouvrage dans ma preface de même que Mr. Bernoulli l'a deja fait dans les Actes de Leipsic. Je vous prie de ne nous point faire passer pour faux evangelistes, le public attendant cela de vous avec impatience et moi en mon particulier, qui suis Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

XXXI.

Leibniz an de l'Hospital.

Je vous fais des grands remercimens, Monsieur, pour le beau present que vous avés fait au public et à moy en particulier, aussi bien que pour la mention avantageuse que vous y faites de moy. Je suis faché que vostre santé ne vous a point permis d'adjouter ce que vous aviés medité sur les usages physiques de nostre calcul. J'ay peur aussi que les lecteurs ne se plaignent de moy, parce qu'il semble que l'attente de mon ouvrage futur vous a detourné du dessein d'adjouter au vostre ce qui regarde les sommes.

Mons. Bernoulli de Groningue vous aura confirmé ce que je vous avois mandé de son changement d'opinion en faveur de la mienne. Je trouve que plusieurs sont arrestés parce qu'ils ne discernent pas assez les loix de l'Equilibre ou de la force morte de l'estime de la force vive. Car les changemens momentanés ou croissances et decroissances infiniment petites de la vistesse se font tousjours selon la loy de l'equilibre, c'est ce que fait que la regle du progrés ou du centre de gravité y est conforme. Mais les loix mêmes des changemens momentanés inferent la conservation de la force vive conforme à mon estime. Mons. Papin commence luy même à s'en appercevoir, et aprés une discussion fort longue entre nous par lettres, il a abandonné les argumens qu'il pressoit les plus, et sur lesquels il avoit insisté principalement dans des imprimés.

XXXII.

De l'Hospital an Leibniz.

A Paris le 23. Novembre (1696).

On ne peut pas être plus sensible que je le suis, Monsieur, aux marques d'honnestetez que vous me donnez. Quoi que ma santé soit assez bonne presentement, je n'oserois encore m'appliquer fortement, car l'ayant voulu faire, j'ai eu une espece de recheute, ce qui m'a obligé de cesser encore pour quelque temps sur tout l'etude des mathematiques, qui est cependant celle qui me fait le plus de plaisir. Je suis fort surpris que vous n'ayez pas encore receu l'exemplaire que je vous ai envoyé, car il y a pres de six mois que Mr. Bernoulli de Basle en a receu deux dont l'un etoit pour vous et l'autre pour Mr. Menkenius. Si vous ne l'avez pas encore, faitez moi l'amitié de me marquer par quelle voye je pourrois vous le faire tenir.

Je suis bien aise que vous aprofondissiez autant qu'il est possible vôtre sentiment sur la dinamique et que vous en tiriez des consequences. C'est un sentiment tout nouveau qui doit faire bien de l'honneur a son auteur, si on peut le mettre dans un jour assez clair pour lever les doutes et faire bien sentir la difference qui se trouve entre la force et la quantité de mouvement. Je comte pour beaucoup que Mr. Bernoulli de Groningue se soit rendu a vôtre sentiment; il m'a marqué que ce n'a eté qu'apres avoir essayé de le combattre par toutes les raisons possibles, et qu'il ne doute pas que si l'on voyoit les objections et vos reponses qu'on ne fust enfin obligé de se rendre. Il me mande que Mr. Hugens etoit aussi de vôtre sentiment, cependant quoi que je luy aye parlé de cette matiere dans quelques unes de mes lettres, il ne m'a point fait de reponse la dessus. Je crois que nous aurons bien tost son ouvrage posthume. On ne fait pas ici grand cas des livres de M. Harsoeker, sur tout de celui de phisique, il est retourné en Holande.

Je n'ai pu donner a Mr. des Billettes vôtre lettre aussitost que je l'eusse souhaité parcequ'il etoit à la campagne. C'est un homme que je connois des mon enfance, il travaille maintenant a reformer les caracteres pour l'impression, vous savez que ce sont les mecaniques ou il s'est toujours appliqué.

Je ne puis vous rendre encore raison de ce que vous souhaitez de savoir sur l'instrument magnetique sans déclinaison de M. de la Hire, il etoit allé a la campagne pendant ces vacances et je ne sçais mesme s'il est de retour, ce sera pour la premiere fois que j'aurai l'honneur de vous ecrire.

Les meditations metaphisiques de Guillaume Vander ont pour auteur l'Abbé de Lannion. Je l'ai veu autre fois chez le Pere Malebranche, mais il y a longtemps qu'ils ne revoyent plus cet abbé ayant eu depuis bien des avantures qui l'ont empesché de philosopher. J'oubliois a vous dire qu'on a reimprimé ici depuis peu les Entretiens metaphisiques du Pere Malebranche. Ce qu'il y a de nouveau dans ce livre est une preface dans laquelle l'auteur pretend prouver par plusieurs passages de St. Augustin que le sentiment de ce docteur sur les idées est que nous voyons les corps en Dieu aussi bien que les veritez purement intelligibles; et en trois entretiens sur la mort.

Mandez moi je vous prie si Mr. Pappin s'est enfin rendu à vos raisons. Je suis, Monsieur, votre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

XXXIII.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover $\frac{4}{14}$ Decembre 1696.

Vous aurés appris, Monsieur, par ma precedente que j'ay enfin receu vostre important ouvrage sur l'Analyse infinitesimale, et je vous repete mes tres humbles remercimens. Je scay par ma propre experience et encor plus par celle de feu Monsieur Hugens et par ce qu'on m'a raconté de M. Pascal, combien les meditations font du tort aux esprits, quand on les pousse avec trop d'attention. Ainsi vous avez toutes les raisons du monde, Monsieur, de vous moderer la dessus pour retablir entierement vostre santé. Pour moy je trouve sur tout que les calculs m'incommodent, quand même ils sont assez petits. Mon esprit rempli d'autres choses ne s'assujettit pas à l'attention qui y est necessaire, ce qui me fait brencher à tous momens et lors que je veux apporter de l'attention, je me trouve incommodé par une maniere de chaleur qui s'excite.

Sans cela j'aurois peut estre déja projetté mes Elemens du calcul de la situation. C'est dommage que des calculateurs de fer ou d'airain, tels que Mons. Frenicle, et maintenant Monsieur Ozannam, à qui il ne couste rien de remplir des feuilles de nombres ou de lettres, ne se tournent point à ce qui seroit plus digne de leur peine, ou que nous ne trouvons pas des jeunes gens, qu'on puisse animer à quelque chose de consequence, pour se décharger sur eux d'une partie de la peine; en leur faisant part aussi de l'honneur et de l'avantage comme il est bien juste.

Quant aux Dynamiques je croy que M. Hugens estoit de mon sentiment dans le fonds, et qu'il reconnoissoit qu'il se conserve tousjours la meme force, comme j'avois avancé. Apres avoir examiné mon sentiment, il trouva à propos d'appeller cette force Ascensionale, parcequ'il se conserve tousjours autant qu'il faut precisement pour faire montrer le même poids à la même hauteur. Mais comme cette même force a lieu, soit qu'on employe des corps pesans ou des ressorts ou autre chose, parce qu'en general l'effect entier doit estre egal à sa cause; j'ay crû qu'il falloit mieux se tenir à ce que j'avois dit d'abord; et concevoir cette conservation en tout ce que j'appelle force vive, laquelle s'estime selon la quantité de l'effect violent, qu'elle peut produire; et naissant par le resultat d'une infinité de degrés de forces mortes est à leur egard comme la superficie est à la ligne. Les Forces mortes, comme la pesanteur, le res sort et la tendence centrifugue ne consistent pas dans une vistesse assignable, mais seulement dans une vistesse infiniment petite que j'appelle solicitation, et ne sont qu'un embryon de la force vive que la continuation des solicitations fait enfanter. Elles gardent les loix de l'equilibre, c'est à dire la compensation de la masse et de la vistesse, de la maniere qu'on le conçoit dans la quantité de mouvement; au lieu que je trouve que la force vive, c'est à dire celle qui se conserve, ne les sçauroit observer. J'ay encor decouvert une chose considerable, c'est que la quantité de l'Action dans le mouvement est autre chose que ce que les Cartesiens appellent quantité de mouvement, et j'ay esté surpris de trouver que selon mon estime de la force qui se conserve, il se conserve aussi tousjours la même quantité d'Action dans le monde. Et j'ay toutes les raisons de croire, que j'ay dechifré une partie de ce mystere de la nature.

Quant à ma collation avec M. Papin, il s'en faut beaucoup qu'il parle comme auparavant. Au commencement il insistoit fortement sur l'argument qu'il avoit fait imprimer pretendant que la cause gravifique trouvoit tousjours le corps pesant en même estat à son egard et luy donnoit ainsi à chaque moment un même degré de force. Mais après avoir reduit cet argument en forme et poussé à plusieurr prosyllogismes, il fut abandonné en effect, et on passa à un autre qui fut que Mons. Papin pretendit prouver tres subtilement et tres ingenieusement, que deux corps: masse 4 vistesse 1; et masse 1 vistesse 4, pouvoient consumer toute leur force en produisant precisement le même effect et qu'ils estoient par consequent equivalens. Mais cet argument très specieux apres avoir esté examiné à fonds manqua encor et cette coincidence de leur effects ne se trouva point. Enfin il insista sur ce que j'accorde, que deux corps qui ont la même quantité de mouvement s'arrestent mutuellement, et j'avoue volontiers qu'on peut dire qu'ils ont la même force d'equilibre ou si vous voulés, la même force de l'entrempechent; mais non pas la même force absolue et vive, ou celle dont la quantité se conserve. Mais la raison, pour quoy deux corps concourans entre eux observent les loix de l'equilibre ou de la force morte, c'est parcequ'à chaque moment il ne se perd et ne se met en balance qu'un degré infiniment petit de vistesse, ainsi il se perd de part et d'autre à chaque moment un même degré de force morte et par consequent un même degré de la quantité de mouvement. Mais la quantité de mouvement des deux corps estant supposée egale: ils perdent donc leur mouvement en même temps. Ainsi on peut dire en general que les loix de l'equilibre sont observées dans tout accroissement et decroissement infinement petit ou quand il ne s'agit que de l'acquisition ou perte de la force morte.

Mais cela même produit qu'on tient du compte quand on examine combien a esté gagné ou perdu de force vive; on n'a rien gagné n'y perdu selon l'estime que j'en fais. Cependant je croy que ceux qui voyent cette observation des loix de l'equilibre dans les corps qui agissent entre eux, et ne sont pas informés à fonds de mon sentiment, s'imaginent que je m'eloigne de ces loix. Ainsi je ne m'estonne point s'ils ont de l'eloignement de mon opinion. Mons. Papin ayant enfin compris mon sentiment sur cela cherche maintenant s'il ne pourra point trouver un moyen d'effectuer, que de ce que j'ay accordé, il s'ensuive un accroissement ou decroissement de la force vive; j'ay deja repondu au premier qu'il a proposé, et il est maintenant occupé à le fortifier. Mais je suis bien asseuré que ce moyen ne se trouvera point. Et c'est là l'abregé de nostre controverse dispersée par un grand nombre de lettres.

Je vous supplie, Monsieur, de vous souvenir un jour de l'instrument magnetique de Monsieur de la Hire dont je trouve qu'il est parlé dans les observations du R. P. Gouye. J'estime beaucoup Monsieur de la Hire et je suis même bien aise qu'il adjoute à des meditations de nostre Analyse une synthese à la façon des anciens. Je n'ay pas encor vû ses epicycloides. On nous envoye de France des bagatelles pendant que nous manquons de bons livres.

Je crois qu'on peut dire avec le R. P. de Malebranche que Dieu seul est nostre objet immediat exterieure. Il faut avouer que S. Augustin avoit quelques fois des pensées profondes, mais je croy que souvent elles n'estoient pas assez distinctes, ny bien digerées. Monsieur l'Abbé de Lanion a de la penetration; mais il me semble, que ses meditations metaphysiques vont un peu viste. J'espere que ce qui l'empeche maintenant de mediter ne sera pas de durée et que ses avantures n'auront rien eu de trop facheux. Je vous supplie, Monsieur, de me faire quelques fois donner part des nouvelles productions physico-mathematiques, et je suis avec zele etc.

XXXIV.

De l'Hospital au Leibniz.

A Paris le 17 Mars 1697.

Je n'aurois pas été si longtemps, Monsieur, sans repondre à vôtre derniere lettre, si je n'eusse attendu que Mr. de la Hire m'eust fait part de ce que vous me demandiez que vous trouverez ci joint. Je vous suis infiniment obligé de la maniere honneste dont vous parlez de mon livre. Ce ne sont proprement que des elemens par rapport à ce que nous attendons de vous, et je ne les ai publiez que pour faciliter d'avantage l'impression de vôtre ouvrage. La distinction que vous faites de la force vive et morte commence à me faire quelque impression et je prendrai le temps d'examiner cette question à fonds, car elle me paroit d'une grande consequence pour la phisique. Je n'ai pas manqué de donner à Mr. des Billettes vôtre lettre et je vous en envoye la reponse.

Mr. Bernoulli, professeur de Mathematique a Groningue, m'ayant envoyé une espece de manifeste au commencement de cette année, dans lequel il invite tous les geometres a la recherche de son probleme de la courbe de la plus vite descente et en propose en mesme temps un autre. Je n'ai pu m'empescher de m'y appliquer serieusement et j'en suis enfin venu heureusement a bout. Je vous envoye la solution de tous les deux, afin que vous ayés la bonté de les envoyer a Mr. Menkenius a Leipsic, pour les mettre dans les Journeaux, sçavoir le premier en mesme temps que vôtre solution et celle de Mr. Bernoulli paroitront, et pour le derniere quand il le jugera a propos. Je vous enverrois la methode dont je me suis servi pour resoudre le premier, qui m'a donné comme vous verrez une solution generale pour toutes les hypotheses possibles de la chute des corps pesans, si je ne sçavois que Mr. Bernoulli vous en a fait part. Il m'a fait quelques objections sur ma methode aux quelles j'ai repondu d'une maniere, qui je crois le contentera, car pour l'equation generale qui exprime la nature de la courbe, il m'a mandé qu'elle convenoit au fonds avec la sienne, ce qui est une grande conviction de la bonté de ma methode, puisque non seulement elle reussit dans les cas de Galilée, mais aussi dans tous les autres.

Je vous demande mille pardons, Monsieur, de toutes les peines que je vous donne, mais vous faites les choses de si bonne grace que vous vous les attirez. Si je puis en revanche faire quelque chose en ce pays, qui vous soit agreable, je vous prie de ne me point epargner, vous assurant qu'il n'y a personne a ce monde, a qui je sois plus veritablement qu'a vous, Monsieur, tres humble et tres obeissant serviteur etc.

P. S. Mr. Sauveur m'avoit donné une pretendue solution pour envoyer a Mr. Bernoulli. S'il vous en a fait part, vous aurez veu qu'il s'y trompoit beaucoup. Pour moi je l'avois point examiné les principes dont il se sert, je m'etois contenté d'examiner sa proposition qui me paroissoit fort embarassée, je trouve neantmoins qu'elle etoit vraye et qu'elle se pouvoit demontrer d'une maniere beaucoup plus aisée comme j'avois fait voir dans une petite remarque que j'avois ajoutée à la fin. Vous verrez assez par cet echantillon que nous n'avons ici gueres de geometres capables de pousser vos principes, je crois que mon livre en mettra quelques uns dans ce train là quoi qu'il y en ait encore d'assez opiniâtres pour pretendre que l'on peut tout faire par les methodes anciennes.

XXXV.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover ce $\frac{15}{25}$ Mars 1697.

Vous aurés receu, Monsieur, celle que je me suis donné l'honneur de vous écrire dernierement pour marquer que j'ay vû vostre solution du probleme de M. Jean Bernoulli qu'il m'a communiquée. Il y trouvoit quelque difficulté, mais il se repondoit luy même, et je l'y ay fortifié.

Je luy envoyay aussi mon sentiment sur le calcul de M. Sauveur, ou je trouvay effectivement de la penetration et du genie. Mais comme il n'a pas encor assez approfondi nos methodes, je ne m'etonnois point qu'il avoit pris le change. Outre qu'il avoit cherché tout une autre ligne, je trouvay deux defauts contre nostre methode infinitesimale, l'un qu'il faisoit des differences du second, l'autre qu'en cherchant le Moindre il ne faisoit pas un denombrement parfait de tous les cas parmy lesquels il faut choisir. Les points dont il ne choisit qu'un, tombent tous dans une même ligne droite. Je ne laisse pas de fort estimer M. Sauveur. Il me semble d'avoir lû dans un vieux Journal des Sçavans qu'il avoit fait quelque chose sur la bassette que je souhaiterois de voir un jour aussi bien que s'il a donné quelque autre chose au public. Quand j'estois à Paris je connoissois un jeune homme de Lion, dont le P. des Chales m'avoit donné la connoissance qui me parut très avancé dans la geometrie profonde, et tres capable d'aller loin. Mais il quitta Paris et temoigna de vouloir songer à autre chose. De quoy je fus faché. Car un dessein estoit de la faire connoistre et j'aurois peut estre reussi à son avantage. La main de M. Sauveur (que M. Bernoulli m'envoya) me parut approchante de celle de ce jeune homme de Lion. Neantmoins je ne crois point que ce fait le même. Et cependant j'oserois vous supplier, Monsieur, de luy temoigner dans l'occasion que ce que j'ay vû de luy m'a paru digne d'estime, quoyque ce n'ait pas esté justement ce que nous demandions ny dans la derniere exactitude de nos methodes.

Je ne manqueray pas d'envoyer à Leipzig vostre solution du probleme de la ligne de la plus courte descente pour estre publiée avec les autres. Et quant à la solution du second probleme, ce sera comme vous ordonnés, Monsieur, lorsque Mr. Menkenius le trouvera à propos, qui ne manquera pas sans doute. Je vous diray la dessus que j'ay aussi trouvé une Methode generale pour des lignes données par cette espece de conditions qui demandent plus d'un point; il me semble qu'elle donne moyen de trouver toutes les courbes possibles; et j'ay observé qu'on peut donner de plusieurs autres façons des courbes equivalentes à celles que M. Bernoulli a marquées. C'est de quoy je luy ay envoyé des échantillons. Cette recherche me plaist beaucoup à cause de son etendue. J'avois pensé à quelque chose d'approchant, mais non pas justement à cela. C'est que j'avois examiné des proprietés paradoxes des courbes qui employent aussi plusieurs points, mais d'une matiere qu'on peut douter si une telle courbe est possible. Telle est par exemple la proprieté du cercle, suivant laquelle les rectangles sous les segmens que façonnent des droites qui se croisent sont egaux. Car on a raison de douter si une telle ligne est possible avant l'examen. Mais lorsqu'au lieu des segmens quelconque son vient à des restrictions convenables, le probleme cesse d'estre paradoxe, et il en resulte de M. Bernoulli. La difference est cependant qu'il est plus aise de resoudre des problemes paradoxes; et toute la difficulté y est de s'aviser de tels qui soyent possibles. Car les proprietés paradoxes sont les plus belles.

Je vous remercie, Monsieur, de l'ecrit de M. de la Hire, qui me paroist considerable, et que je liray avec attention. Je le parcours presentement et trouve sa meditation tres profonde et tres digne d'estre poursuivie. Comme il l'a publiée il y a dix ans, j'espere qu'on aura travaillé la dessus. Quand on ne trouveroit pas justement cette analogie qu'il a raison de juger vraisemblable, je ne doute point qu'on n'en tire un jour quelque chose de consequence. Il est difficile qu'il nous donne quelque des pensées qui n'aient rien de solide. C'est dommage que des telles pieces imprimées se perdent. J'avois fait prier un jour Mons. Cusson de m'en envoyer de son impression, mais ce fut inutilement. Je souhaite fort la continuation des Tables et Observations Astronomiques de M. de la Hire. J'ay vû ce que M. Vallement a mis dans ses Elemens d'Histoire contre la correction des cartes faite à l'observatoire et publiée par M. la Fer. Je voudrois qu'on luy repondît distinctement ou plustost à Mr Vossius, car la matiere merite d'estre eclaircie à fonds. Un Allemand de Lubec qui a accompagné les derniers Ambassadeurs Moscovites à la Chine, et qui même a fait fonction de membre de l'Ambassade, nous promet des remarques sur la nouvelle carte de la Tartarie de M. Witsen. L'important dessein de l'Academie Royale, de rectifier les cartes de la terre par le moyen des observations celestes, ne peut manquer d'estre estimé. Je voudrois trouver parmy vos Mathematiciens et curieux quelqu'un qui ait assez de loisir pour me communiquer de temps au temps vos nouveautés qu'il est . . . . . . *) de sçavoir et je tacherois de luy donner revange. Quand il ne seroit pas des plus profonds luy même, cela ne feroit rien.

Je vous remercie de la lettre de Mons. des Billettes, et vous supplie, Monsieur, de luy faire tenir ma réponse. C'est une personne excellente dans la connoissance des arts, et qui a beaucoup de belles veues. Comme il est inutile de luy souhaiter vingt ans de moins, je luy souhaite la santé d'alors. Je ne m'etonne point qu'il y a des gens qui se tiennent aux methodes ordinaires de Geometrie. Car il est permis à chacun de se borner ou bon luy semble. Mais ceux qui se persuadent de pouvoir tout faire par leur methodes receues devroient nous en persuader par les effects dans les occasions semblables à la presente. Vostre autorité et vostre livre contribueront également à leur conversion. Je vous souhaite tousjours une parfaite santé, et suis avec zele etc.

P. S. Lorsque je commençay de publier mes sentimens sur la force, je marquay d'abord la difference qu'il faut faire entre la force morte ou embryonée, et entre la force vive ou achevée. Les changemens momentanées dans les actions mutuelles des corps observent tousjours les loix de la force morte

---

*) Unleserliches Wort.

ou de l'equilibre, mais les resultats observent tousjours les loix de la force vive, c'est à dire de celle dont la quantité se conserve.

XXXVI.

De l'Hospital au Leibniz.

Je ne suis de retour de la campagne, Monsieur, que depuis peu de jours. J'ai bien des remercimens a vous faire de la maniere avantageuse dont vous parlés de moi dans les Actes du mois de may, ce que je dois entierement a vôtre honnesteté ordinaire. En examinant la solution de Mr. Bernoulli, professeur à Basle, j'ai trouvé qu'il proposoit un probleme a son frere avec beaucoup d'emphase, cela m'a donné occasion d'essayer, s'il etoit aussi difficile qu'il le croyoit. J'en ai trouvé sur le champ une solution que je vous envoye. Comme je l'ai faite a la haste, je vous prie d'examiner si vous la trouvez bonne, et en ce cas vous me feriez plaisir de l'envoyer à Leipsic et d'y marquer le jour que vous aurez receu ma lettre, afin qu'on ne croye pas que je l'aye tirée de celles qui sont peut estre deja arrivées; car je ne doute point que M. Bernoulli de Groningue avec sa penetration ordinaire n'en ait trouvé aussi tost la solution, qu'il aura peut estre deja envoyée à Leipsic. Je lui ecrivis le dernier ordinaire et je n'ay lui en mandé rien, parceque je n'ai cherché cette solution que depuis, je lui en ferai part a la premiere occasion ayant pour luy une estime tres particuliere et une amitié fort sincere. Je souhaiterois bien, Monsieur, que vous eussiez le loisir d'achever vôtre ouvrage de scientia infiniti et de mettre la derniere main aux belles methodes que vous avez trouvées et dont vous avez bien voulu me communiquer quelque echantillon. Pour moi je suis quasi hors d'etat de m'appliquer fortement, car je suis attaqué aussi tost de douleurs de teste tres vives. Vous voulez bien que je vous fasse ressouvenir de la promesse que vous m'avez faite de me faire faire une de vos machines d'arithmetique, lorsque celles que vôtre ouvrier a commencées seront achevées, et que je vous renouvelle ici les sentimens de respect et d'amitié, avec lesquels je suis, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 30. Septbr.

Au reste je ne vois point que la methode de Mr. Tschirnhaus pour les lieux geometriques ait tout l'usage qu'il veut lui donner, et il me semble qu'il ne devoit point negliger de faire voir comment on en tire la solution du probleme de Mr. Bernoulli. Il paroist aussi qu'il n'a point eu de methode pour trouver la courbe de la plus viste descente, et qu'il n'y est arrivé que par l'examen de ce que Mr. Hugens nous a donné sur cette ligne.

Ma lettre n'ayant pas pû partir le dernier ordinaire, j'ai ajoûté a la solution du probleme de Mr. Bernoulli de Basle celles de quelqu'autres problemes que son frere a proposés ici dans le Journal des Sçavans.

XXXVII.

Leibniz an de l'Hospital.

A Hanover ce $\frac{3}{13}$ Octobr. 1697.

Je suis, Monsieur, bien aisé de vostre heureux retour de la campagne, mais faché en même temps de ce que vous souffrés encor quelques incommodités. C'est pourquoy vous devés vous menager. C'est un paradoxe mais veritable, qu'on peut faire d'avantage en faisant moins. Car c'est le moyen de continuer plus long temps.

Mons. Bernoulli de Groningue me mande d'abord d'avoir trouvé la solution du problême de Monsieur son frere. Et même il m'en a communiqué le fondement assez semblable au vostre, qui est tres ingenieux. Tout cela va bien pour choisir parmy des lignes semblables et semblablement posées. Et M. Bernoulli de Bâle n'en demande point d'autres. Mais pour choisir inter lineas ordinatim positione datas utcunque, il faut quelque chose de plus. Il y a aussi quelque distinction semblable à faire sur les problemes, tels que Mons. Bernoulli a proposés dans nostre Journal des Sçavans, et à l'egard de la methode dont vous vous estes servi dans vos solutions.

Pour achever mes projets de Scientia infiniti, il faudroit pouvoir trouver quelque jeune homme capable de me soulager dans les calculs, et si j'en sçavois, je luy donnerois volontiers l'entretien. Vous autres Messieurs devriés songer en France à en faire elever, pour en avoir de l'assistance, tant pour vous épargner des travaux ou l'esprit a moins de part que pour gagner le temps, qui est la plus pretieuse de toutes les choses, car nostre temps est nostre vie. Vous y devriés songer particulierement, Monsieur, pour menager vostre santé.

Ayant medité sur les pensées et observations Magnetiques de Mons. de la Hire, contenues dans la lettre que vous m'avés envoyée, Monsieur, de sa part, j'ay écrit la dessus le papier cy joint, que je vous supplie de luy faire tenir, et de m'en dire aussi vostre sentiment, et sur ce qui se fait sur ces matieres. Je vous supplie aussi de faire tenir la cy jointe à Mons. des Billettes.

Les maladies et les changemens de mes ouvriers dans un pays ou l'on a de la peine à en trouver des bons, sont cause que le second exemplaire même de machine Numerique n'est pas encor parfaitement fini. Je trouveray pourtant le moyen de vous satisfaire s'il plaist à Dieu, et la paix rendra le commerce plus aisé. Ainsi le meilleur seroit peutestre d'envoyer une de ces Machines en France, et prendre des mesures avec des bons ouvriers, pour en faire bon nombre à la fois.

J'attends que vous pensiés un jour à nos questions Dynamiques pour vous determiner la dessus. Soit que vous veuilliés en conferer avec M. Bernoulli de Groningue, qui s'est rendu à la verité, ou que vous me veuillés proposer vos doutes. Car si vous estiés entré dans ma pensée, vous convertiriés aisement le R. P. Malebranche et autres et la verité deviendroit plus commune. Vous trouverés que la discussion n'est pas fort penible. Je suis avec zele etc.

P. S. Ma solution du second probleme de Mons. Bernoulli a esté trouvée par une voye toute differente de la vostre et de celle de Messieurs Bernoulli. Elle convient dans le fonds avec la methode Angloise, et se fonde sur la multitude des racines d'une même equation, comme je le communiquay à M. Bernoulli de Groningue avant que la solution Angloise parût. J'avois même trouvé ma methode il y a plusieurs années, en lisant un probleme de M. Fermat dans les lettres de Mons. des Cartes. Mais je ne l'avois point appliquée et l'avois presque oubliée.

XXXVIII.

Leibniz an de l'Hospital.

(Im Auszuge.)

$\frac{8}{18}$ Octobr. 1697.

Monsieur Tschirnhaus ne dit pas d'avoir trouvé la ligne de la plus courte descente. Quand il donnoit son discours aux collecteurs des Actes, il estoit, ou avoit esté à Leipzig au temps de la foire qui est au mois d'Avril, ou il estoit déja connu que la cycloide estoit la ligne demandée, et sur le point de la mettre dans les Actes, on n'en faisoit plus de mystere. Car toutes les solutions ont esté inserées dans les Actes du mois de May. Je crois qu'il auroit eu de la peine de la trouver par le livre de Pendules de Mons. Hugens. Et comment s'aviser de l'y chercher?

Je voy que vous, Monsieur, non plus que Mons. Bernoulli et moy n'avés point pû voir comment ce qu'il dit peut servir à resoudre le second probleme de Mons. Bernoulli. Il faut que nous, tout tant que nous sommes, ne soyons pas lectores perspicaces, puisqu'il dit: ex his lector perspicax facile videbit etc. Il n'a pas bien consideré la nature de la Brachystochrone puisqu'il doute si une autre ligne ne peut satisfaire aussi bien que la cycloide. Il rend aussi une raison bien extraordinaire de ce qu'il ne s'applique pas à certains problemes de l'Analyse infinite si mal parce qu'ils ne dependent pas de la simple proportion du triangle caracteristique, mais c'est en cela qu'ils sont beaux et difficiles. Cependant ils n'ont pas besoin pour cela de ce grand travail, qu'il y conçoit. Ce qui marque qu'il ne connoist pas encor les voyes assez aisées dont nous nous servons en bien des rencontres et avec bien du succés. Lorsqu'il s'estoit avisé des Caustiques ou lignes formées par le concours des rayons ou par des developpemens de

Mons. Hugens (en quoy il faut reconnoistre qu'il a fait une belle découverte) il n'en triroit pour cela solution d'aucun probleme; et lorsque je luy dis que par ce moyen on pourroit determiner lineam, quae radios solares a datae figurae speculo reflexos colligeret in unum punctum, ce que j'ay monstré le premier dans les Actes 1689; il n'en voyoit pas la connexion; et encor moins le moyen de l'appliquer aux dioptriques. De sorte que je puis dire d'avoir perfectionné son invention des Caustiques et d'en avoir monstré l'usage. Il a quelques fois des belles pensées, mais il ne les approfondit pas assez. Comme lorsqu'il cherche une construction generale des Tangentes par les foyers. De s'estre avisé de chercher cela, c'est quelque chose d'estimable, mais il se trompe dans la regle qu'il donna sur une induction trop imparfaite.

Je luy ecrivis que cela n'alloit pas bien, et que j'avois un moyen de le mieux determiner. C'estoit par l'effect des fils tendus et par la composition de leur conatus, ce que j'ay publié apres, en dounant ce que Mons. Fatio a trouvé par une autre voye. Mais vous avés trouvé une regle, encor plus generale par nostre calcul. Asseurement Mons. Tschirnhaus a un grand et beau genie, je l'estime, et je l'aime depuis long temps. Mais il feroit des choses bien plus belles et bien plus grandes, si sans tant de reserves mysterieuses il agissoit avec plus d'ouverture et avec plus de concert à nostre egard. Au lieu qu'il semble qu'il espere tousjours de donner quelque chose qui efface tout ce que nous avons fait, et qu'il apprehende que nous n'y penetrions avant le temps. Et cependant il preche à toute occasion les mauvais effects que le desir d'acquerir de la gloire fait dans le monde, comme si elle luy estoit indifferente. Je ne scay comment. Je me suis tant arresté sur luy, mais c'est parce que je regrette de le voir si singulier.

XXXIX.

De l'Hospital an Leibniz.

Je joints ces deux mots, Monsieur, a la lettre de Mr. des Billettes pour vous remercier de toutes vos honnestetez. J'ai eté si fort accablé d'affaires depuis quelque temps que je n'ai eu aucun loisir de penser aux sciances, c'est ce qui m'avoit fait remettre a vous ecrire, mais comme je suis obligé de partir pour aller vers Lion, je n'ai pas pû tarder d'avantage a me quitter en partie de mon devoir. Je suis, Monsieur, avec une estime parfaite vostre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

ce 13 juin (1698?)

XL.

De l'Hospital an Leibniz.

Permettez moi, Monsieur, de vous marquer combien je suis sensible a l'honneur que reçoit nôtre Academie de vous avoir pour un de ses membres, vous aurez sans doute deja appris par Mr. l'Abbé Bignon que le Roy vous en a nommé et qu'il y a a present des reglemens pour ce corps qu'on a imprimés actuellement et qui lui donnent une forme stable et assurée pour toujours. Mr. Bernoulli de Basle a envoyé une lettre de change de cinquante ecus a Mr. Varignon pour être donnée a son frere au cas qu'il publie son analyse devant Pacques et que les juges la trouvent bonne. J'apprens que son frere de Groningue ne veut point publier son analyse qu'a condition que celui de Basle depose auparavant la sienne entre les mains d'un des juges. Il semble par ce procedé qu'ils sont tous deux dans la deffience. En verité il me paroist que c'est trop faire languir et que puisque Mr. Bernoulli de Groningue a marqué dans un ecrit public a son frere que vous aviez ses solutions il y a deja longtemps, il n'avoit qu'a vous envoyer les siennes en vous priant de les rendre toutes deux publiques, apres quoi il seroit facile de juger lequel des deux a raison. J'oubliois a vous dire que celui de Basle adjoute encore une condition sçavoir qu'une personne digne de foi assuré avoir veu cette analyse et qu'elle a été trouvée avant la fin de l'année 1697.

Je suis, etc.

A Paris le 9. Fevrier 1699.

XLI.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover $\frac{13}{23}$ Mars 1699.

Ce n'est pas seulement pour l'honneur de vos lettres que j'ay, Monsieur, à vous remercier, mais bien plus pour celuy que je vous dois sans doute en bonne partie, d'avoir une place dans l'Académie Royale des Sciences. J'apprends que vous y avés part à la direction. Il n'y a rien de si juste et vos lumieres qui vous font aller au delà sans contredit des autres dans le plus profond des Mathematiques, vous y donnent sans doute plus de droit, que tout ce qui vous peut distinguer d'ailleurs. Mais cette autorité que vous y avés acquise par tant de raisons, éclate en ce qu'on y a fait à mon égard, car je ne doute point que vous et M. l'Abbé Bignon n'y aiés contribué le plus, le Roy ne pouvant sçavoir ce que j'ay fait en ces matieres que par vostre témoignage et par celui de cet illustre Abbé, dont M. de Pontchartrain peut avoir fait rapport à sa Majesté.

Outre l'honneur que j'ay maintenant d'estre d'un corps qui jettera les plus solides fondemens des nouvelles connoissances et d'y estre en vostre compagnie, cela me donnera plus d'occasion de contribuer à l'avancement des sciences. Les lumieres de tant de personnes habiles, reflechiront encor sur moy, et j'espere qu'il y aura moyen de me faire apprendre quelque chose de ce qui se fera dans l'Academie. De plus comme je suis bien souvent plus propre à donner occasion aux decouvertes qu'à les faire,

fungens vice cotis acutam
Reddere quae ferrum solet exors ipsa secandi.

J'espere qu'il me pourra estre permis de proposer quelques fois des choses, soit du calcul et raisonnement, soit de l'execution, et de laisser juger si elles meriteront d'estre poursuivies. Et je vous supplie, Monsieur, de me dire vostre sentiment sur ces deux points.

Pour dire un mot de l'Analyse, il y a long temps que j'ay remarqué que toutes les Methodes qui ont paru jusqu'icy pour tirer les racines des Equations, ne satisfont que jusqu'au 4^{me} degré inclusivement. On se plaint ordinairement de la prolixité du calcul qu'il faudroit pour aller au delà. Il en est quelque chose, mais la verité est qu'on manque de Methode pour y arriver, quand on voudroit prendre la peine du calcul. Il y a du temps que j'ay marqué publiquement, que j'avois trouvé une ouverture pour resoudre generalement encor des degrés plus elevés; et j'en ay des echantillons qui me font juger que les resultats seront commodes et utiles. Mais il me faudra des preparatifs qui me rebutent un peu. Je m'imagine qu'avec le temps l'Academie sera fournie de jeunes gens propres à pousser des calculs utiles.

Vous m'avés donné de la joye, Monsieur, en me donnant part d'un ouvrage considerable, que vous avés sous la main, pour resoudre les problemes et equations par les lignes; et quoyque vostre modestie vous fasse dire qu'il ne servira point à ceux qui sont déja avancés en Geometrie, j'ose bien estre en cela d'un autre sentiment: et je gage que vous ne sçauriés rien faire qui ne nous donne des ouvertures considerables, je crois même que nous trouverons là dedans ce qu'il faudra pour pousser le beau dessein de feu M. le pensionnaire de Wit, qui meditoit les Elemens des Lignes des degrés qui suivent de près les Coniques. Permettés moy seulement de vous faire souvenir du nom du public que vous devés menager vostre santé, dont la conservation ou le retablissement parfait nous importe beaucoup. Et je trouve que les calculs incommodent ceux qui ne l'ont pas bien affermie.

Mons. l'Abbé le Torel me mande que vous avés parlé de mon calcul Geometral. C'est apparemment ce que j'appelle Calculum Situs. Je suis faché moy même que je n'ay pas encor pû pousser à mon gré une pensée qui me paroist de quelque consequence. Mais rien n'est plus rebutant que des travaux sans compagnon et dont on ne peut parler avec personne. Cette communication de vive voix entre ceux qui se plaisent à la même recherche, est un des meilleurs assaisonnemens des meditations seches en elles mêmes. Mais je n'y vois point d'apparence à moins que de trouver un jour quelque jeune homme propre à entrer dans mes vues.

Monsieur Bernoulli de Groningue publiera ce qu'il m'avoit envoyé d'abord, car c'est en cela que je dois rendre témoignage à la verité. Je voudrois seulement que la dispute ne se fut pas tant echauffée. Les deux freres estant si excellens Geometres, pourquoy se faire tort, et pourquoy faire plaisir aux envieux. Je l'ay marqué plus d'une fois au plus jeune. Je ne me mêle point de juger ny en premiere ny en seconde instance, qu'avec d'autres. Mais je crois qu'ils n'auront point besoin de juges, et qu'ils se rendront justice l'un à l'autre quand tout paroistra.

une reponse cy jointe au R. P. de Malebranche, vous suppliant, Monsieur, de la luy faire tenir. Je luy dis entre autres choses, qu'il est bien vray qu'il se conserve la même quantité de mouvement non pas absolue, mais du même costé, ce que j'appelle la quantité de la direction, mais qu'il est vray aussi qu'il se conserve la même force absolue, et qui plus est, que j'ay trouvé par un raisonnement bien extraordinaire et pourtant bien simple, qu'il se conserve encor la même quantité de l'action motrice absolue, dont la quantité est encor toute differente de ce qu'on appelle la quantité de mouvement. Ainsi M. Descartes a eu l'intention bonne en voulant conserver la force et l'action, mais il a pris un quiproquo.

Je vous supplie, Monsieur, de me recommander à M. l'Abbé Bignon, et de luy marquer la grandeur de ma reconnoissance. Je vous supplie encor, s'il est vray que M. des Billettes est aussi de l'Academie comme j'ay oui dire, de l'en feliciter de ma part, et de luy recommander de ne pas oublier un ancien ami; car il me doit encor reponse. Je vous souhaite une santé parfaite et durable, c'est tout ce qu'il vous faut pour nous faire attendre des grandes decouvertes. Et je suis entierement etc.

XLII.

De l'Hospital au Leibniz.

Je n'ay pas manqué, Monsieur, de lire dans l'Academie ce qu'il y avoit dans vôtre lettre qui la regardoit. Mr. l'Abbé Bignon et tous nos Mrs. m'ont chargé de vous faire mille remercimens de toutes vos honnêtetez, et de vous marquer qu'ils recevront toujours avec un plaisir tres particulier et beaucoup d'estime tout ce que vous leur enverrez, et comme l'on fera a la fin de chaque année un recueil des pieces que l'on jugera meriter d'être imprimées, vous jugez bien qu'on n'oubliera pas les vôtres.

Je viens de recevoir un livre anglois de M. Fatio sur l'inclinaison que l'on doit donner aux murs pour la meilleure exposition des arbres a fruits. Il y a a la fin de ce livre un ecrit latin dans lequel cet autheur semble vous avoir eu en veue: c'est ce qui me fait vous l'envoyer afin que vous fassiez la dessus ce que vous jugerez a propos.

J'ay pris la liberté de vous envoyer ci joint un pacquet pour Mr. Menkenius dans lequel vous trouverez un petit ecrit que je destine pour les Actes et que je vous prie d'avoir la bonté de lire. Vous aurez aussi celle de faire une enveloppe a ce pacquet, et de mettre l'adresse a M. Menkenius.

Je ne sçais si vous etes instruit que Wallis a fait imprimer un troisieme tome de ses oeuvres mathematiques dans lequel il a inseré quelques unes de vos lettres a Mr. Newton et autres, et cela je crois dans la pensée d'attribuer a ce dernier l'invention de vôtre calcul differentiel que Newton appelle des fluctions. Il me paroist que les Anglois cherchent en toute maniere d'attribuer la gloire de cette invention a leur nation. Je suis, Monsieur, avec beaucoup d'estime etc.

A Paris le 13. juillet.

XLIII.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover $\frac{28 \text{ Juillet}}{7 \text{ Aoust}}$ 1699.

Je n'ay point manqué, Monsieur, d'envoyer à Mr. Menckenius à Leipzig ce que vous m'aviés destiné pour luy, et particulièrement vostre solution du probleme de Mr. Newton qui est portée à ce qui me paroist, à toute la perfection qu'on y peut desirer. La Methode que vous y employés, est celle dont je me suis toujours servi dans les occasions semblables; au lieu que Mons. Fatio a esté reduit à un detour, qui ne luy auroit gueres servi sans la proprieté que M. Newton avoit fournie.

Je vous remercie fort, Monsieur, de ce que vous avés bien voulu m'envoyer le traité de M. Fatio, ou j'ay tant d'interest. Il y paroist beaucoup de passion. Si c'est envie, ou emulation, ou autre chose, je n'en sçay rien. S'il en a tant sçu depuis si long temps, pourquoy ne l'at-il point fait connoistre? Pour recevoir des louanges, il faut les meriter effectivement, et il ne suffit pas, qu'on en ait le pouvoir. Je doute pourtant encor un peu de ce pouvoir ou sçavoir pretendu avant nos communications. Peutestre trouverat-il encor de la difficulté dans quelques Problémes qu'on a déja proposés. Car de faire ce qui a déja esté fait, cela ne prouve rien.

Il donne à mes paroles un sens qu'elles n'ont point. Je ne dis point que ceux que j'ay connues soyent les seuls, qui ayent pû resoudre le probleme. Mais je marque qu'il n'y a que ceux qui entendent nostre calcul, qui le puissent, et c'est pour obliger les Geometres à s'appliquer à une chose utile.

Je n'espere point que Mons. Newton approuvera les expressions de M. Fatio. Il connoist mieux la verité. Monsieur Wallis a demandé mon consentement pour l'edition de mes vieilles lettres et il a même adjouté que je pourrois retrancher ce que je jugerois à propos; mais comme je n'ay rien à craindre de la verité toute nue, j'ay repondu qu'il pourroit publier ce qu'il en jugeroit digne. Il m'en envoye un exemplaire, mais je ne l'ay pas encor receu.

Comme les emportemens de Monsieur Fatio ne me touchent gueres, je luy repondray sans beaucoup d'emotion. Car ces manieres piquantes ne manquent ny politesse ny equité.

Je ne sçay ce que le R. P. Malebranche pense de mes reflexions sur ce qu'il a dit, ou dit presentement, du mouvement.

Je souhaiterois quelques lumieres de ce qui se passe chez vous à l'Academie, mais je juge bien aussi, que je ne les dois esperer que d'une personne, qui auroit assez de loisir et prenoit assez de plaisir à cela, sans estre divertie par des recherches profondes. Car pour vous, Monsieur, quand vous me l'offriries, je ferois conscience de l'accepter, vostre temps estant trop pretieux.

Monsieur Fatio prône certains Theoremes d'un nommé Mons. de Moyvre, mais ils n'ont rien de commun avec nos problemes, et j'en puis donner d'infiniment plus generaux et importans.

Je le feray peutestre dans ma reponse, afin qu'elle ne soit pas tout a fait destituée de realités. Je suis avec zele etc.

XLIV.

Leibniz an de l'Hospital.

4 Avril 1701.

Comme j'espere que vous vous portés bien, en quoy je prends autant de part que qui que ce soit, je me flatte aussi que j'ay tousjours l'honneur d'estre dans vos bonnes graces. Mes distractions m'ostant l'esperance de faire grande chose par moy seul, je tache de sauver quelques pensées qui se pourroient perdre, et pour cet effect, j'ay envoyé à l'Academie Royale un essay qui contient une nouvelle maniere d'Arithmetique, dans la progression dyadique ou il n'y a de caracteres que 0 et 1, ce qui fait que tout y va dans un ordre merveilleux. Je crois de voir que par ce moyen et par les series infinies determinées mises en cette expression, on aura ce qu'on ne sçauroit atteindre facilement par d'autres voyes et que ce sera comme anchora sacra, même dans les transcendentes, reduites aux cas determinés, et dans ceux ou nostre calcul des differences et des sommes nous abandonne. Il y a des belles regles pour les neriodes des colonnes des nombres naturels et de leur multiples. Mais comme les quarrés, cubes et autres puissances et leur sommes vont avec les mêmes periodes et ne les ont pas plus longues que les progressions les plus simples, ce qui est surprenant et de grande consequence, il sera important d'en decouvrir les loix. L'essay que j'ay envoyé n'est pas pour estre imprimé, mais seulement pour faire entendre ma pensée, car pour le public il faudroit avoir pris plus de loisir pour adjouter quelque chose de plus profond. Je l'ay envoyé à M. Fontenelle, mais de peur qu'il l'oublie, je vous supplie de luy en resouvenir. S'il y avoit des jeunes gens qui eussent de la penetration et de la curiosité pour ces recherches, ils y trouveroient de quoy les employer utilement; et comme j'ay envoyé l'essay à l'Academie pour cet effect, je crois, Monsieur, que vostre autorité contribuant à y encourager quelqu'un, ce seroit pour le bien des sciences que vous l'aurés employée.

Je croy que Mons. Jaques Bernoulli sera maintenant ou bientost à Paris. Je ne doute point qu'il ne vous apporte des belles choses. Je voudrois qu'il me coustât quelque chose et que je pusse l'accommoder avec Monsieur son frere de Groningue. Dans la lettre imprimée du premier il y a plusieurs traits qui marquent qu'il n'est pas satisfait de moy. C'est apparemment que la deference de Monsieur son frere pour moy l'a fait concevoir des soupçons. Mais pouvois je refuser le deposé qu'il fit chez moy, et puis je nier qu'il me l'a envoyé dans le temps qu'il a marqué, car je me suis jamais melé d'autre chose en cela. J'espere que vostre autorité, Monsieur, et celle de M. l'Abbé Bignon les mettra enfin d'accord. Vous m'obligerés infiniment, Monsieur, si vous me faites apprendre quelques fois l'estat de vostre santé et le progrés de vos decouvertes, et je suis etc.

XLV.

De l'Hospital an Leibniz.

Les marques de vôtre souvenir, Monsieur, me sont tres precieuses; et je ferai toujours tout mon possible pour les meriter. Je suis tres persuadé qu'en n'employant que deux caracteres dans l'arithmetique, on pourra decouvrir plusieurs proprietez des nombres inconnus jusques a present. L'essai que vous avez envoyé a Mr. de Fontenelle suffit pour en convaincre, mais je souhaiterois extremement que vous pussiez avoir du secours dans les vûes nouvelles qui vous viennent de toutes parts. Il y a ici un jeune homme nommé Parent, qui est eleve a l'Academie qui seroit assez propre a ce dessein, je lui en avois deja parlé lorsque vous me fistes l'honneur de m'en ecrire il y a quelques années, mais il ne jugea pas a propos de quitter ce pays sans avoir quelque chose d'assuré. Il m'est venu trouver depuis peu pour me dire qu'ayant appris que vous etiez directeur d'une nouvelle Academie, si vous pouviez lui procurer quelque pension stable avec laquelle il pust vivre il iroit volontiers s'y etablir et travailleroit sans vous être a charge a ce que vous jugeriez a propos. Ce jeune homme a de la penetration, on m'a dit d'ailleurs qu'il avoit de la peine a quitter ses pensées pour suivre celles des autres.

Je viens de recevoir trois exemplaires de la solution des problemes des isoperimetres par Mr. Bernoulli de Basle, je l'ai parcourue avec avidité, et il me paroist qu'elle est directe et bonne. Je ne doute pas que vous ne l'ayez receue il y a deja du temps, car elle est arrivée ici fort tard. Je ne sais point quel parti Mr. Bernoulli de Groningue prendra la dessus. Comme je n'ai point vû ses analyses, je ne puis pas en juger. Mr. Bernoulli de Basle ne vient point a Paris, et il n'avoit fait courir ce bruit la apparemment que pour detourner son frere de suivre le parti qu'il avoit pris. Au reste l'Academie ne se meslera point de leur different sur le sujet de ce probleme ne voulant point les aigrir d'avantage l'un contre l'autre. Je vous avoue que je serois ravi de voir finir cette querelle, et que je leur en ai mandé mon sentiment plusieurs fois avec liberté.

On n'imprimera point vôtre ecrit puisque vous le deffendez quoi qu'il me paroisse tres digne de l'être, si cependant vous poussiez cette recherche plus loin et que vous voulussiez nous faire part de ce que vous y decouvririez on feroit tout imprimer ensemble. J'ai une extreme curiosité de voir quelque essai de vôtre analyse de la situation, celá me paroist si nouveau que j'ai mesme de la peine a m'en former une idée. Mandez moi, je vous prie, si l'ouvrier qui travailloit a vôtre machine d'arithmetique y a reussi, et en ce cas je vous prierois de lui en commander une pour moi, car j'estime infiniment tout ce qui vient de vous. Je ne doute pas que vous n'ayez vû pendant vôtre sejour a Paris la roue de Mr. Pascal, j'ai eu occasion depuis peu d'en voir une. Je la trouve fort bien inventée par rapport aux additions et soustractions, mais pour les multiplications et divisions elle est fort embarassante. Je suis tres veritablement etc.

A Paris le 9. Juin 1701.

XLVI.

Leibniz an de l'Hospital.

Bronsvic ce 26 Septembr. 1701.

Je suis bien aise que mon Essay d'une Nouvelle Science Numerique ne vous a point deplû. Avec cette penetration profonde, dont vous estés doué, Monsieur, vous ne pouviés point manquer d'en voir les consequences un peu mieux que ceux qui ne connoissent les usages des choses qu'apres en avoir vû les applications. Si j'y pouvois venir aisement parmy d'autres objects, qui me demandent, je n'aurois point eu recours à employer le secours d'autruy. Cependant je crois, qu'un des principaux usages qu'on en pourra tirer, sera pour la Geometrie et Analyse des Transcendentes, en trouvant moyen d'exprimer en nombres entiers continuables reglemens à l'infini, des grandeurs determinées comme du cercle entier, d'une certaine portion de l'Hyperbole, et autres. Car l'expression de Ludolphe par exemple pour la circonference est en entiers, mais dont la serie ou continuation ne paroist pas: et ma quadrature Arithmetique en explique la quantité par une serie aisée à continuer, mais qui n'est qu'en rompus. Or les expressions par les rompus estant variables d'une infinité de façons, en sorte que deux series peuvent estre egales, sans qu'on le sache avant que de reduire les rompus aux entiers; il est manifeste que l'expression par des series des entiers, est la plus parfaite des rationelles. Mais je n'espere pas qu'on y arrive plus aisement que par les dyadiques que j'ay proposés. Cette suite de considerations m'y avoit mené il y a plusieurs années, et l'esperance de pousser un peu cette recherche avant que de la produire, m'avoit empêché d'en parler; mais j'ay vu qu'ayant tant d'autres choses à faire, je courois risque de laisser perir une pensée qui sembloit digne d'estre conservée.

Mon Analyse de la situation paroist bien plus curieuse encor, et donneroit à mon avis outre meditation, des grands usages de practique, pour faciliter l'imagination et ce qui en depend; ce que l'analyse usitée jusqu'icy ne fait pas. Il faut que je m'attache un jour à en commencer des Elemens. Un tres habile homme de mes amis, Geometre insigne d'ailleurs, y estoit entré, mais sa mort nous a privé de ce qu'il auroit pu faire. Il me faudroit l'assistance d'une personne comme luy, qui estoit profond, avoit de l'ardeur pour la verité, et estoit d'une humeur tres douce et tres raisonnable. Mais l'assemblage de ces qualités est rare. Outre que cette personne n'avoit point besoin d'estre à charge à qui que ce soit, car vous jugés bien, Monsieur, que s'il me falloit entretenir un habile assistent, et si j'estois tousjours obligé de faire des grandes depenses pour executer des bonnes pensées, je payerois un peu trop cher le plaisir et l'avantage d'en avoir; temoin ma Machine Arithmetique, qui faute de bons ouvriers, il a fallu faire et refaire, et doubler ou tripler la depense. Mon ouvrier qui travailloit au second exemplaire estant mort, il m'a fallu du temps pour en avoir un autre, qui n'est pas même sur le lieu. Mais ce second exemplaire a bien des avantages sur le premier, sur tout à l'egard de la durabilité. On travaille à present pour l'achever, et quand je seray satisfait, je ne manqueray point, Monsieur, de tacher de vous satisfaire aussi. C'est un bonheur pour cette machine, que j'ay eu plus de vie graces à Dieu, que je ne m'en promettois; autrement elle auroit esté ensevelie avec moy.

Dans la Societé des sciences de Berlin les depenses ne seront au commencement que pour ce qui est le plus necessaire; ainsi tout directeur que j'en suis, je n'ay garde d'y conseiller qu'on fasse sur des inventions plus écartées, tandis qu'il faut penser à un bon observatoire, et autres choses indispensables. Il n'y a que vostre Academie Royale ou plustost il n'y a que le Roy qui l'a fondée, qui ait pu et voulu faire de grandes avances de supererogation, pour ainsi dire, en envoyant même des personnes exprés dans les lieux où ils pouvoient profiter et faire des recherches. Mais j'avoue que la situation presente de l'Europe, ne permettra pas facilement à ce prince, tout grand qu'il est, de continuer ainsi au delà de l'ordinaire que M. de Pontchartrain a fixé heureusement. Ainsi quand je saurois quelque personne qui m'accommoderoit pour pousser des recherches utiles, je n'oserois point faire à son avantage des propositions qu'on pourroit faire raisonnablement dans un autre temps, et que vous, Monsieur, avec M. l'Abbé Bignon, auriés peutestre pousées alors. La Machine de M. Pascal est d'une invention tres ingenieuse, mais l'effect en est tres petit, quand même on y adjoute la rhabdologie comme Grillet a fait apres Mons. Morland. S'il n'y avoit que cela, je ne prendrois pas la peine d'y penser apres M. Pascal. Mais Mons. Perrier, neveu de ce grand homme, voyant mon echantillon à Paris, en reconnut et publia sincerement la difference. Car en un mot, il n'y a presque aucun rapport: et toutes les additions et soustractions auxiliaires de la multiplication et division se font icy sans qu'on y pense.

Vous avés eu plustost que moy, l'Analyse de M. Bernoulli de Bâle, qui est bonne, mais qui ne me paroist pas la meilleure qui se puisse, car on n'a point besoin d'aller descendre jusqu'aux troisiemes differences. Son frère voudroit se soumettre au jugement de l'Academie Royale de Sciences à Paris, pourveu qu'on depose l'argent en question. La lettre de l'ainé contenoit des choses tres capables de reveiller l'animosité du cadet; mais j'ay fait tout ce que j'ay pû pour l'arrester, et je voudrois qu'il y eut moyen de finir cette querelle.

Ja'y oublié de dire à l'egard de l'usage des dyadiques, que les periodes tres simples dans les plus hautes puissances ou leur sommes, font esperer des grands abregés de practique, rensemblans en quelque façon à ceux des Logarithmes. Ayés la bonté de temps en temps de m'informer de vos progrés, qui ne scauroient manquer d'estre importans, et croyés que je seray tousjours parfaitement etc.

P. S. On me demande si M. Cassini a encor corrigé ou adjouté quelque chose aux Tables des Satellites de Jupiter. Ce personnage dont vous parlés, Monsieur, paroist tres capable de faire quelque chose de son chef et tres porté (comme il a temoigné et comme vous semblés remarquer) à ne faire que ce qu'il puisse dire n'estre venu que de son fonds.

Berichtigungen

im ersten Bande.

Seite 91 Zeile 13 für $\frac{3233a^6}{1874161r^6}$ lies $\frac{62a^6}{2835r^6}$

— 117 — 22 lies Hyperbolae aequilaterae.

— 145 — 1 z^a ist mit dem letzten Ausdruck der vorhergehenden Seite als Factor zu verbinden.

Druck von Julius Plessner in Berlin.

Fig: 7.

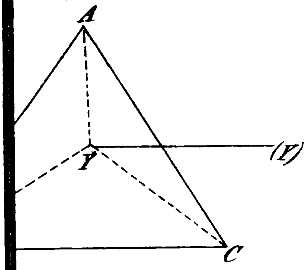
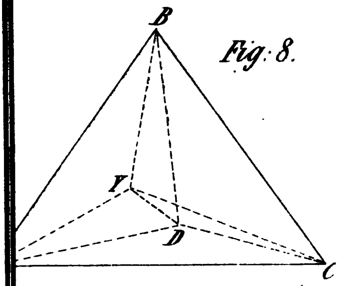


Fig: 8.



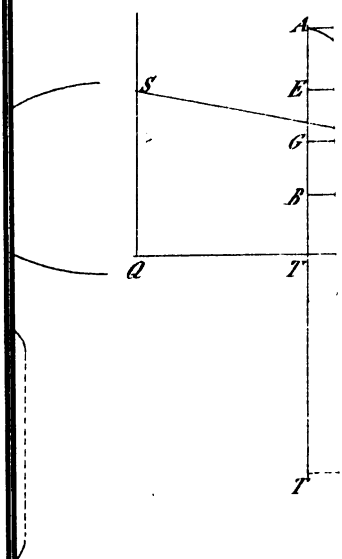


Fig: 25.

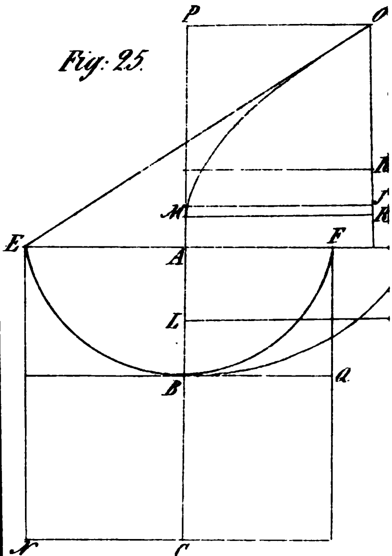


Fig: 31.

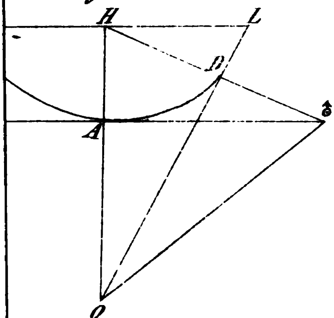


Fig. 32.

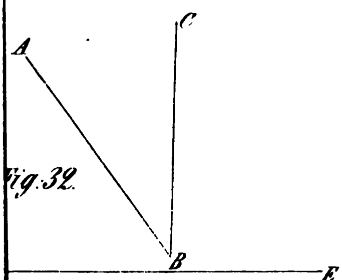


Fig. 45.

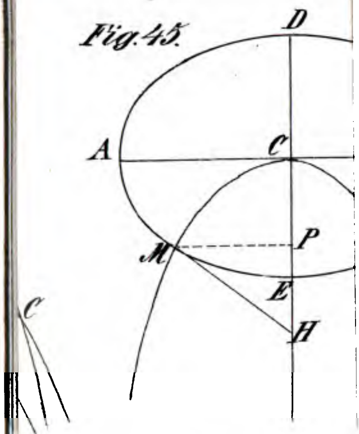
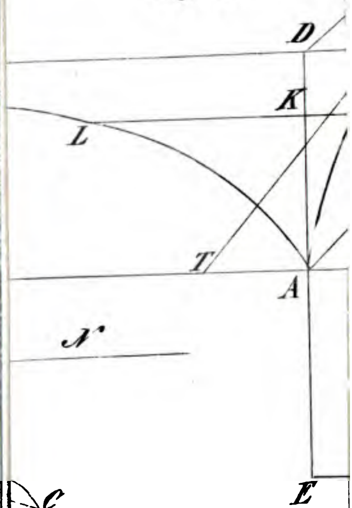


Fig. 46.



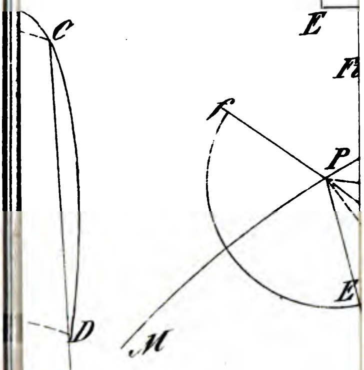


Fig. 53.

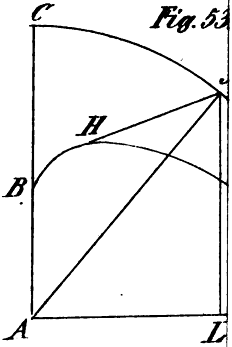


Fig. 54.

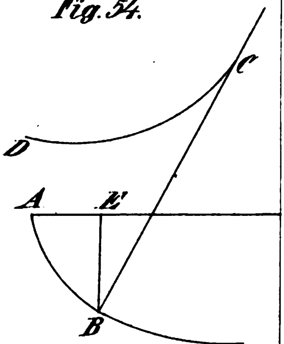
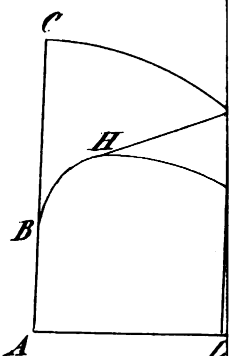


Fig. 55.



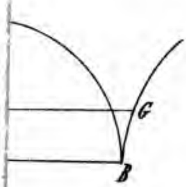


Fig: 5.

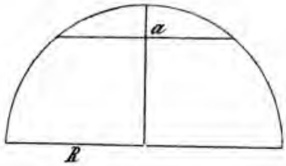
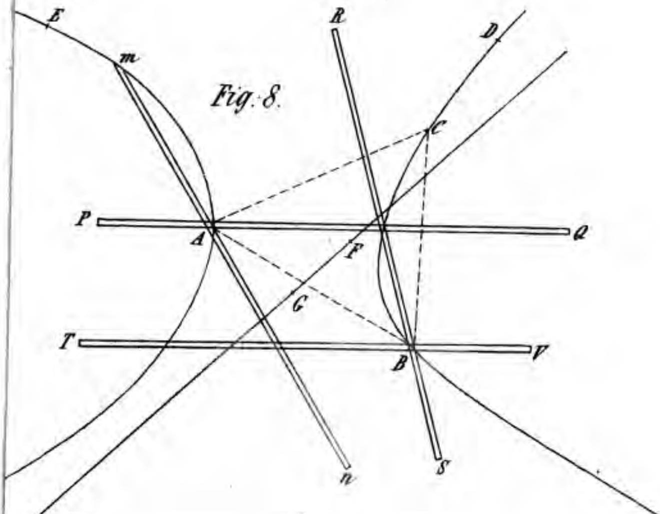


Fig: 8.



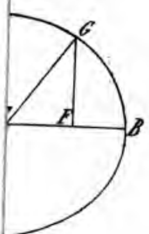


Fig: 13.

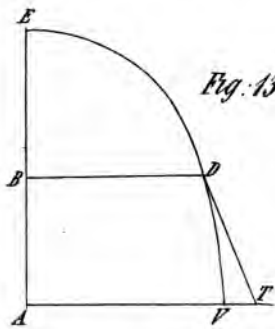


Fig: 14.

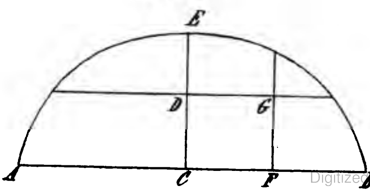


Fig: 18.

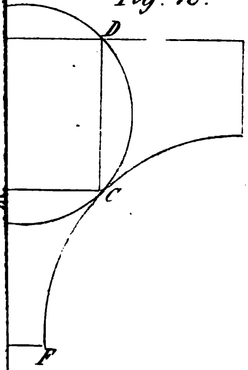


Fig: 19.

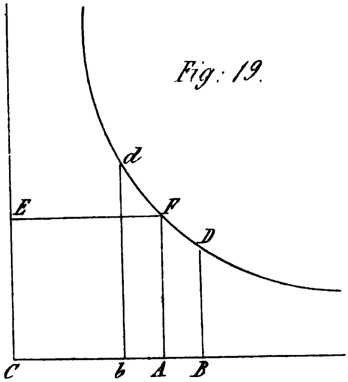


Fig: 25.

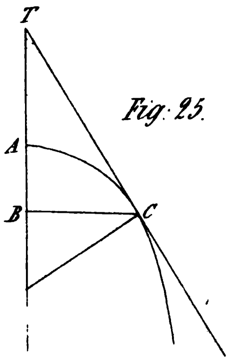


Fig: 26 u. 27.

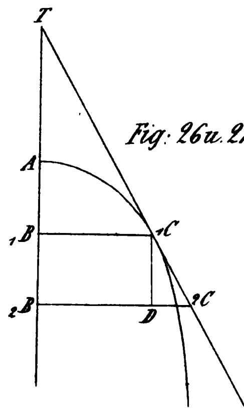


Fig: 24.